Tõnu Tõnso Allar Veelmaa

Matemaatika 10

Matemaatika 10. kl.

Tõnu Tõnso Ahar Veelmaa

MATEMAATIKA

X klassile

3. parandatud trükk

TALLINNA
PRANTSUSE
LÜTSEUM

NR. .....

TALLINN "MATHEMA" 1998

Haridusministeerium kinnitab: õpik ei vasta õppekavale

Retsenseerinud Ivar Petersen ja Aksel Telgmaa

Kaaned kujundanud ja illustreerinud Heiki Looman

Joonised teinud Maris Tõnso

ISBN 9985-9053-4-2 © Tõnu Tõnso, Allar Veelmaa, 1996, 1998

Trükitud Tallinna Raamatutrükikojas

ÕNNETU LUGEJA!

Meie eesmärgiks oli kirjutada selline õpik, mida saaks kasutada nii keskkooli reaalharus ja süvaklassides, aga osaliselt ka üldharus või humanitaarharus. Seetõttu püüdsime teooriat esitada võimalikult lihtsalt ning anda senisest enam ülesandeid. Osa neist õpetab matemaatikateadmisi rakendama erinevates eluvaldkondades, mõnede ülesannete lahendamiseks kasutatakse personaalarvuti abi. Viimaste juures on märgis 💻.

Arvutiülesannete lahendamata jätmine ei takista järgmiste teemade omandamist, sest need on mõeldud eelkõige iseseisvaks tööks.

Üks osa ülesannetest on nii keeruline, et eeldab pikemaajalist tõsist tööd. Niisugused ülesanded on märgitud raamiga.

Õpikus on ka mõned lisateemad ja vahepalad matemaatika ajaloost, mis on mõeldud lugemiseks asjast huvitatuile.

Lisateemade pealkirjade juures on kiri: *Lisaks põhikursusele.*

Kuidas kasutada seda õpikut? Pöörata pärast lugemist!

Õpiku tekstis kasutatakse olulise väljatoomiseks kolme võimalust. Kõige tähtsamad valemid, definitsioonid ja reeglid on ümbritsetud raamiga. Need tuleks kindlasti meelde jätta. Mõisted, mida peab teadma peast, on trükitud rasvase kirjaga; veidi vähem olulised, kuid siiski esiletõstmist väärivad mõisted ja lausedon trükitud kaldkirjas.

Kui kohtad õpiku tekstis mõnda matemaatilist mõistet, mille sisu ja tähendust Sa ei tea ja mida selles teemas ei selgitata, siis võib abi leida õpiku lõpus olevast „Lühileksikonist".

Lühileksikoni järel on aineloend.

Et õpikus kasutatakse näidete ja ülesannetega lühikesi BASIC-keelseid programmilõike, siis on õpik varustatud ka juhendiga, millest saab algteadmisi BASIC-keelest. Kui tunned BASIC'us programmeerimise vastu tõsisemat huvi, siis võid abi leida juhendi lõpus antud kirjanduse loetelust. BASIC'u lühijuhendi järel on nn. BASIC'u spikker, mida saab programmi koostamisel kasutada.

Lühileksikonile järgnevas osas toodud retsepte, reegleid jms. läheb edaspidi väga tihti vaja. Seetõttu on selle osa pealkirjaks „Pea meeles".

Õpikut hoia korralikult. Puhast ja tervet õpikut on sul endalgi meeldivam kasutada. Ehk on see raamat hiljem teistelegi abiks kohandusega tutvumisel.

Matemaatika õppimine ei ole kerge. Me ei oska anda retsepti, kuidas küpsetada matemaatikat nii, et oleks huvitav ja tulemused head. Küll aga oleme veendunud, et korraliku kohanduse kõrval on väga oluline hea ülesannete küpsetamisoskus.

Soovime Sulle palju jõudu!

TÕNU TÕNSO
ALLAR VEELMAA

ÜLESANDEID ÜLDISEKS KORDAMISEKS

Järgnevaid ülesandeid lahendades tuleta meelde põhikoolis õpitu. Vajaduse korral saad abi õpiku lõpus olevast „Lühileksikonist" või „Koolimatemaatika käsiraamatust".

1. Leia 4 viga. Selgita, milles viga seisneb.

a) $\frac{2}{3}+\frac{1}{4}=\frac{11}{12}$ b) $\frac{1}{2}:\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$ c) $-2^3=-8$

d) $\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{30}$ e) $a^7\cdot a^6\cdot a=a^{14}$ f) $(-2)^3=8$

g) $-4^2=16$ h) $-4^2=-16$ i) $(a^3)^2=a^5$

2. Kumb teisendus on õige? Põhjenda.

a) $(16x^3y^2+24x^2y^2+4xy):4xy=4x^2y+6xy+1$

b) $(16x^3y^2+24x^2y^2+4xy):4xy=4x^2y+6xy$

3. Lahenda võrrand.

a) $4x+3=7x$ b) $\frac{x}{2}+\frac{x}{3}=\frac{5x}{6}$ c) $-x-(x-1)=0$

d) $(x+1)x=x^2+x$ e) $\frac{x}{3}=\frac{7}{8}$ f) $-x=-(x-7)$

Missugusel võrrandil puuduvad lahendid? Miks?
Missuguse võrrandi lahendiks sobib iga arv? Miks?

4. Lahenda võrrandisüsteem.

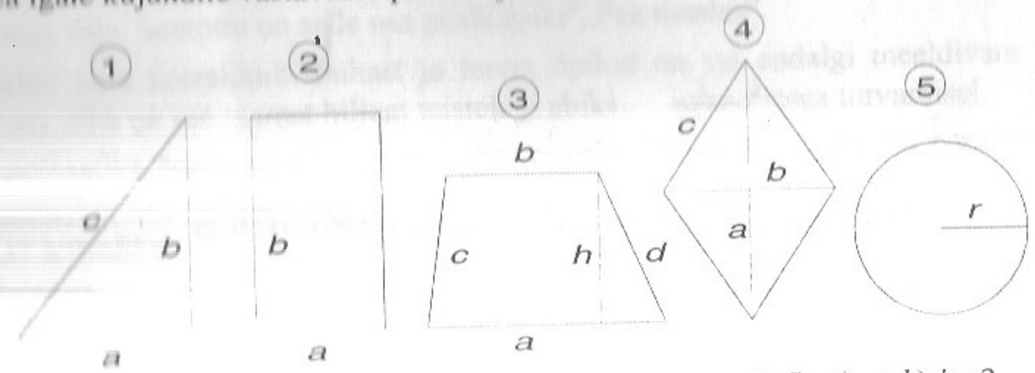
a) $\begin{cases}2x+y=3\\x+2y=3\end{cases}$ b) $\begin{cases}4x+5y=9\\5x+4y=9\end{cases}$ c) $\begin{cases}x-2y=-1\\x+2y=3\end{cases}$

d) $\begin{cases}5x+6=y\\y-x=-2\end{cases}$ e) $\begin{cases}3x+4y=0\\7x+8y=0\end{cases}$ f) $\begin{cases}\frac{x}{2}+\frac{y}{3}=\frac{5}{6}\\\frac{x}{3}-\frac{y}{4}=\frac{1}{12}\end{cases}$

5. Lahenda ruutvõrrand (võimaluse korral peast).

a) $x^2-16=0$ b) $x^2-2x=0$ c) $x^2=4$
d) $x^2-x-2=0$ e) $x^2-5x-6=0$ f) $x^2-2x=3$
g) $2x^2+9x+10=0$ h) $4x^2-4x-3=0$ i) $5t^2-11t+2=0$
j) $x(x+2)=0$ k) $(u+7)^2=28u$ l) $(3u-9)^2=0$

6. Sea igale kujundile vastavusse pindala ja ümbermõõdu valem.



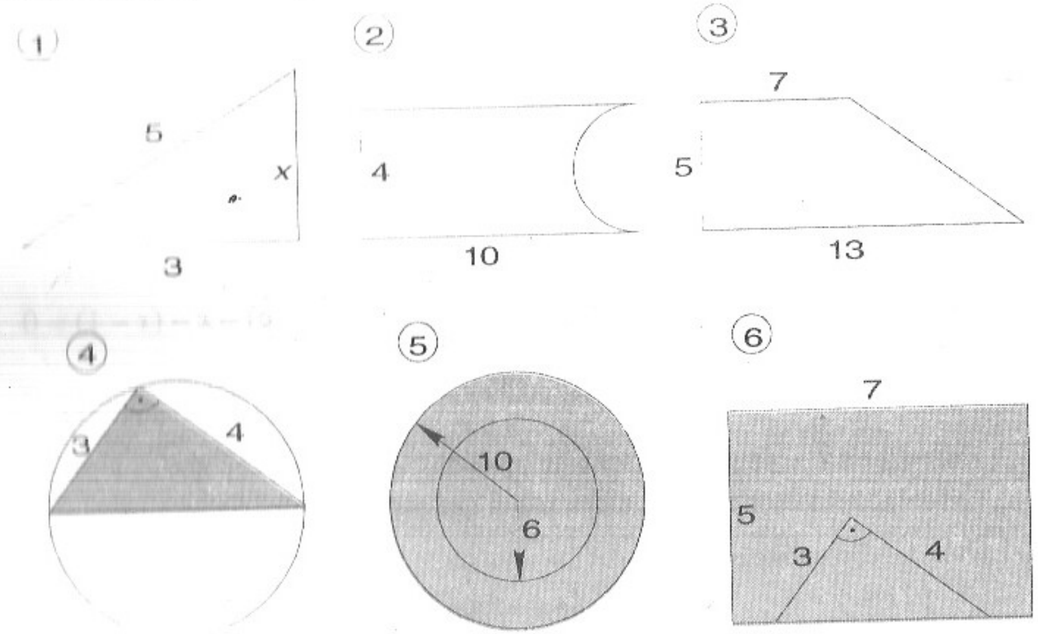
1) $S = (a \cdot b) : 2$ 2) $S = 2ab$ 3) $S = (a + b) \cdot h : 2$

4) $S = \pi r^2$ 5) $S = ab$

6) $P = a + b + c$ 7) $P = 4c$ 8) $P = 2(a + b)$

9) $P = a + b + c + d$ 10) $P = 2\pi r$

7. Arvuta kujundi pindala ja ümbermõõt.

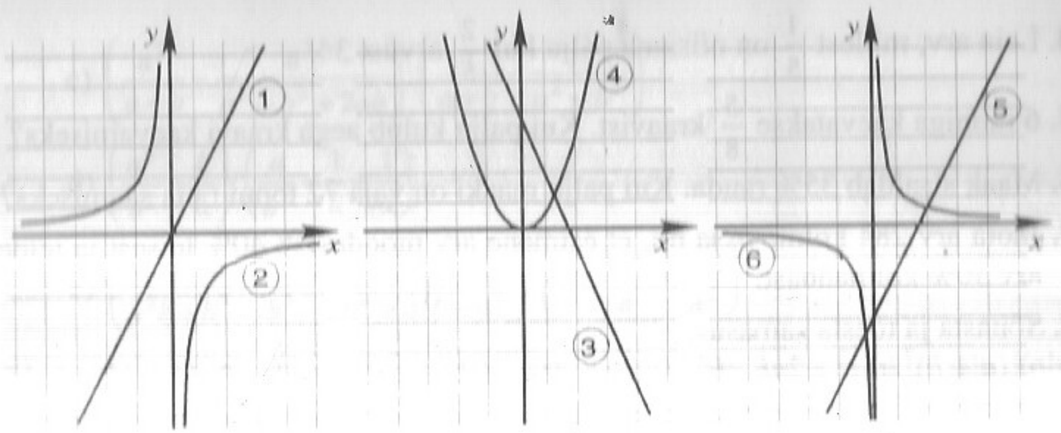


8. Tõnis joonestas ringjoone raadiusega 5 cm ja konstrueeris selle sisse võrdkülgse kolmnurga. Tekkinud kolmnurga ümbermõõduks sai ta 15 cm. Seejärel konstrueeris ta sama ringi sisse ruudu ja sai ümbermõõduks 28,3 cm. Kontrolli, kas Tõnis sai õiged tulemused.

9. Sea iga seos vastavusse tema graafikuga. Kui võimalusi on mitu, siis näita nad kõik.

1) $y = ax + b, a > 0$ 5 2) $y = ax, a > 0$ 1 3) $y = ax^2, a > 0$ 4

3) $y = ax + b, a < 0$ 3 5) $y = \frac{a}{x}, a < 0$ 2 6) $y = \frac{a}{x}, a > 0$ 6

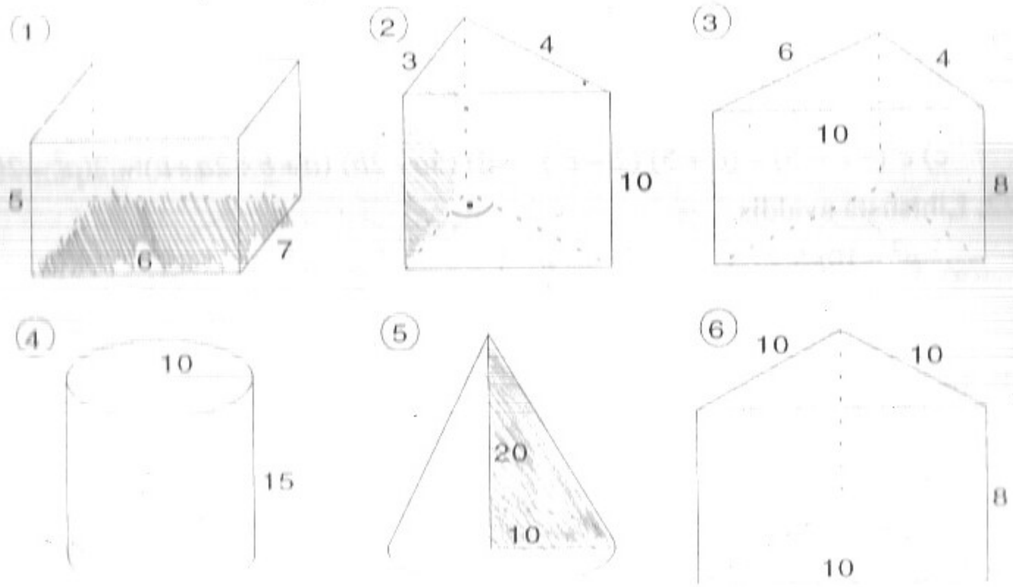


10. Missugused graafikud eelmiselt jooniselt kirjeldavad võrdelist seost, pöördvõrdelist seost, lineaarset seost, ruutsõltuvust?

11. Leia korrapärase 5-nurga, 8-nurga, 12-nurga ja 16-nurga sisenurkade summa ja ühe sisenurga suurus. Vali pakutavate vastuste seast õige. Missugune variant on üleliigne?

a) 540° ja 128° b) 1080° ja 135° c) 1800° ja 150° d) 2520° ja 157,5° e) 540° ja 108°

12. Arvuta keha täispindala ja ruumala.



13. Arvuta.

a) $\left(2\frac{3}{4} - 2\frac{1}{6}\right) : 2{,}8 + 2\frac{1}{6}$ b) $1\frac{1}{3} + \frac{8}{23} \cdot \left(3\frac{2}{3} - 2{,}9\right)$

c) $\dfrac{\frac{5}{6} - 0{,}4}{2\frac{3}{5} - 2{,}2}$ d) $\dfrac{(0{,}6 + 0{,}425 - 0{,}005) : 0{,}01}{10{,}5 + 5\frac{1}{4} + 3\frac{1}{6} + 15\frac{1}{12}}$

14. Leia arv, millest $\frac{1}{5}$ on niisama palju kui $\frac{2}{5}$ arvust 34.

15. 6 tunniga kaevatakse $\frac{5}{8}$ kraavist. Kui palju kulub aega kraavi kaevamiseks?

16. Maak sisaldab 35% rauda. Kui palju maaki on vaja 72 tonni raua saamiseks?

17. Jaota arv 284 kolme ossa nii, et esimene arv moodustab 40% teisest ja teine arv 30% kolmandast.

18. Sõnasta ja tõesta samasus.

a) $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
b) $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
c) $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$
d) $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
e) $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$
f) $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$
g) $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$

19. Kasutades eelmises ülesandes toodud valemeid, arvuta.

19^2; 81^2; 101^2; 199^2; $29 \cdot 31$; $6{,}5 \cdot 7{,}5$; $5{,}8 \cdot 6{,}2$; $41^2 - 39^2$; 9^3; 51^3; $39^3 + 11^3$; $28^3 - 22^3$

20. Leia avaldise väärtus.

a) $3a^2 - 2b^3$, kui $a = -1$ ja $b = -2$
b) $5m^2n^3 + 4(m-n)$, kui $m = -0{,}5$ ja $n = -1$
c) $\frac{a^3 - 1}{a^2 + a + 1}$, kui $a = 1{,}1$
d) $\frac{a^2 - 2a + 1}{a^3 + a^2 - a - 1}$, kui $a = -\frac{2}{3}$

21. Lihtsusta avaldis.

a) $3(3-8c) - (3-4c)^2$
b) $4(4a^2 - 1) - (4a+3)(4a-3)$
c) $c^2(-c-5) - (c+5)(2-c^2)$
d) $(3a-2b)(a+b+2a+b) - 2(a^2 - 2b^2)$

22. Lihtsusta avaldis.

a) $\frac{p^2 - 10p + 21}{1 - p^2} \cdot \left(\frac{1}{p^2 - 7p} - \frac{p}{p-7} \right)$
b) $\left(\frac{b}{b+3} - \frac{4}{b^2 + 3b} \right) : \frac{b^2 - 4}{b^2 + 8b + 15}$
c) $\left(y - 2 + \frac{3}{2+y} \right) : \frac{y^2 - 1}{y^2 - y - 6}$
d) $\frac{a^2 - 4a + 4}{a^3 - 8} : \frac{5a - 10}{a^2 + 2a + 4}$
e) $\left(3 + \frac{x^2}{3-x} \right) \cdot \frac{3-x}{27 + x^3}$
f) $\left(\frac{4a^2c}{b^3} \right)^2 : \left(-\frac{12a^4}{b^2c} \right)$
g) $\left(6a^2bc \right)^2 : \left(-\frac{16a^4c}{b^2} \right)$
h) $\left(-\frac{3c^2}{2y^3} \right) : \left(-\frac{9c^5}{d^3y^6} \right)$

23. Lihtsusta avaldis.

a) $\left(\frac{a+1}{2a-2} + \frac{6}{2a^2 - 2} - \frac{a+3}{2a+2} \right) \cdot \frac{4a^2 - 4}{3}$
b) $\left(\frac{3a}{1-3a} + \frac{2a}{3a+1} \right) : \frac{6a^2 + 10a}{1 - 6a + 9a^2}$
c) $\left(\frac{a^2}{a+b} - \frac{a^3}{a^2 + b^2 + 2ab} \right) : \left(\frac{a}{a+b} - \frac{a^2}{a^2 - b^2} \right)$
d) $\left(\frac{a^2}{b^2} + \frac{b}{a} \right) : \left(\frac{a}{b^2} - \frac{1}{b} + \frac{1}{a} \right)$
e) $\left(\frac{a^2 - ab}{a^2b + b^3} - \frac{2a^2}{b^3 - ab^2 + a^2b - a^3} \right) \cdot \left(1 - \frac{b-1}{a} - \frac{1}{a^2} \right)$

24. Mitu sirget saab joonestada läbi ühe punkti, läbi kahe punkti, läbi kolme mitte ühel sirgel asetseva punkti?

25. Võta 5 punkti nii, et mistahes kolm punkti ei asuks ühel sirgel. Ühenda saadud punktid paarikaupa sirgetega. Mitu sirget said?

26. Mitu kodarat on rattal, kui nurk kodarate vahel on 18°, 7°30′?

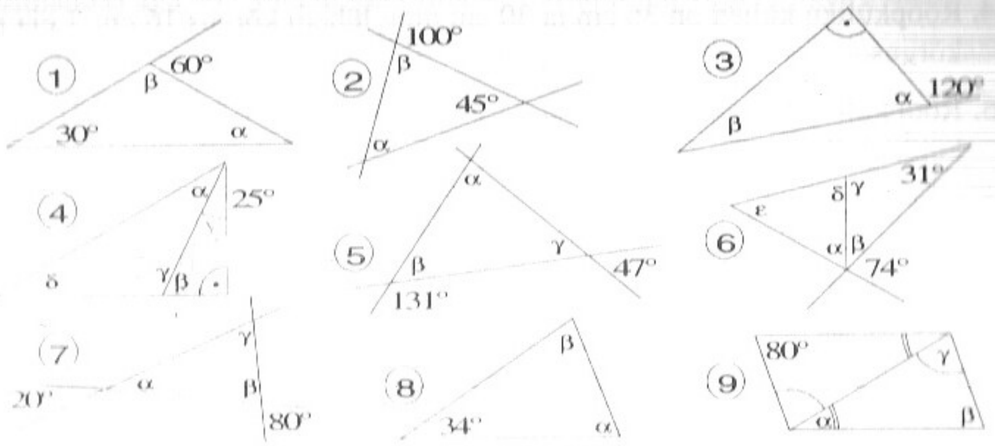
27. Kui suured on nurgad võrdkülgse kolmnurga nurgapoolitajate vahel?

28. Kui suured on nurgad täisnurkse võrdhaarse kolmnurga nurgapoolitajate vahel?

29. Võrdhaarse kolmnurga üks külg on 12 cm, teine 5 cm. Kui pikk on kolmas külg?

30. Võrdhaarse kolmnurga ümbermõõt on 20 m. Üks külg on teisest kaks korda pikem. Leia külgede pikkused.

31. Arvuta puuduvad nurgad.



32. Jaota täisnurk sirkli ja joonlaua abil kolmeks võrdseks osaks.

33. Kolmnurga ABC küljed on $AB = 40$ mm ja $AC = 5{,}6$ cm. Nurk nende külgede vahel on 60°. Joonesta see kolmnurk vihikusse. Mõõda kolmnurga kõrgused ning arvuta kolmnurga pindala.

34. Konstrueeri kolmnurk külgedega 5 cm, 6 cm ja 7 cm ning joonesta sise-ringjoon. Kas tekkinud ringi sisse võib täielikult paigutada ruudu, mille külg on 2 cm?

35. Konstrueeri kolmnurk ABC, kui külg $AB = 8$ cm ja selle külje lähisnurgad on 34° ja 68°. Konstrueeri selle kolmnurga ümberringjoon ning mõõda selle raadius.

36. Rööpküliku kaks külge suhtuvad nagu 2:5 ja tema ümbermõõt on 70 cm. Arvuta külgede pikkused.

37. Arvuta rööpküliku nurgad, kui üks nurk on teisest 20° võrra suurem.

38. Rombi teravnurk ja nürinurk suhtuvad nagu 2:3. Leia rombi nurgad.

39. Rombi diagonaali ja külje vaheline nurk on 22°30′. Leia rombi nurgad.

40. Trapetsi haarad on 15 cm ja 13 cm, ümbermõõt 48 cm. Leia trapetsi kesk-lõigu pikkus.

41. Trapetsi alused on 12 cm ja 18 cm. Kui ühte haara pikendada 16 cm võrra, siis lõikub selle haara pikendus teise haara pikendusega. Leia esimese haara pikkus.

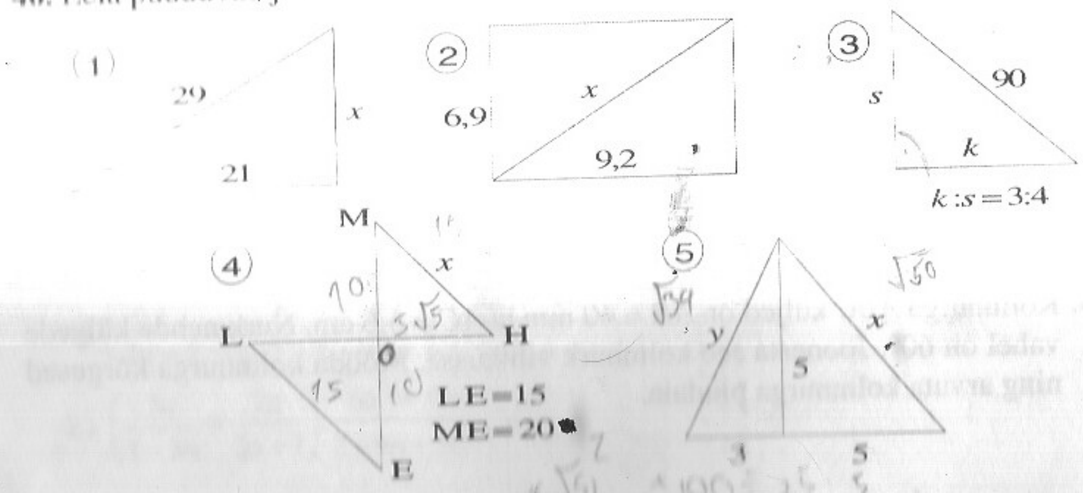
42. Trapetsi alused on 16 cm ja 12 cm, kõrgus 8 cm. Kui kaugel lühemast alusest lõikuvad haarade pikendused?

43. Kolmnurga kaks külge on 3 cm ja 4 cm. Lühemale küljele tõmmatud kõrgus on 2 cm. Leia pikemale küljele tõmmatud kõrgus.

44. Rööpküliku küljed on 36 cm ja 30 cm ning lühem kõrgus 16 cm. Leia pikem kõrgus.

45. Rööpküliku kõrgused on 12 cm ja 8 cm ning ümbermõõt 60 cm. Leia rööp-küliku küljed.

46. Leia puuduvad joonelemendid.



47. Täisnurkse kolmnurga kaatetid on a ja b. Kolmnurka on joonestatud ruut, mille nurk ühtib kolmnurga nurgaga ja üks tipp asub hüpotenuusil. Avalda ruudu külje pikkus.

48. Avalda võrdkülgse kolmnurga külje pikkus kõrguse kaudu (kõrgus külje pikkuse kaudu).

49. Lahenda võrrand.

a) $\frac{u}{2}+\frac{2u}{5}=\frac{9}{5}$

b) $\frac{2}{7}y+\frac{1}{14}y=\frac{5}{7}$

c) $\frac{6z}{5}-\frac{z}{2}=\frac{7}{10}$

d) $3x-\frac{6}{5}x=13$

e) $2(x-1)(x+1)=2(x^2-7)+12$

f) $\frac{3}{2}(x+1)-\frac{2}{3}x-\frac{5x-1}{2}=\frac{6-5x}{3}$

g) $\frac{2x-5}{6}+\frac{x+2}{4}+\frac{5-2x}{3}=\frac{6-7x}{4}-x$

50. Õe ja venna vanus on kokku 50 aastat. 10 aastat tagasi oli vend kaks korda nii vana kui õde. Kui vanad on nad praegu?

51. Leia kolm järjestikust paaritut arvu, teades, et nende ruutude summa on 155.

52. Kui kahekohaline arv jagada oma numbrite summaga, siis saame jagatiseks 6 ja jäägiks 2. Kui aga jagada see arv oma numbrite korrutisega, siis saame jagatiseks 5 ja jäägiks 2. Mis arv see on?

53. Kolmes aidas oli kokku 500 t vilja. Esimeses aidas on 20 t enam kui teises, kolmandas aga 50 t vähem kui esimeses. Mitu tonni vilja oli igas aidas?

54. Kui ruudukujulisest plekitahvlist lõigati ära 3 cm laiune riba, siis saadi tahvel pindalaga 10 cm^2. Leia esialgse tahvli mõõtmed.

55. Ühe toru kaudu täitub bassein 2 tundi kauem, teise toru kaudu 4 tundi kauem kui kahe toru kaudu üheaegselt. Mitme tunniga täidaks kumbki toru üksinda bassein?

56. Vajatakse karpe 378 apelsini pakkimiseks. Kui igasse karpi panna 9 apelsini rohkem, siis vajatakse üks karp vähem. Mitu karpi on vaja?

57. Kui rong oli sõitnud 4 tundi, siis peeti ta teerikke tõttu üheks tunniks kinni. Nüüd suurendas vedurijuht 20% võrra kiirust ja jõudis 750 km kaugusel olevasse sihtkohta õigeaegselt. Missugune oli rongi esialgne kiirus?

58. Triinu ja Martti otsustasid suvel teenitud raha panna panka. Aasta pärast oli Triinul 550 krooni ja Marttil 460 krooni. Kumb paigutas oma raha kasulikumalt, kui algsummad olid 500 krooni ja 420 krooni?

59. Tõesta, et $\frac{a^2+b^2}{b^2+c^2}=\frac{a}{c}$, kui $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}$.

60. Missugused peavad olema arvud p ja q, et võrrandi $x^2 + px + q = 0$ lahendid oleksid p ja q?

61. „Merelahingut" mängitakse 7×7 ruudustikus. Missugune on laskude miinimaalne arv selleks, et kindlasti tabada laeva kujuga □□□□ ? Mitut lasku on vaja laeva □□ tabamiseks?

62. Kas on võimalik mööda ringjoont paigutada arvud 0; 1; 2; . . .; 9 nii, et suvalised kõrvuti olevad arvud erineksid teineteisest kas 3, 4 või 5 võrra? Kontrolli seda arvude 1 — 13 puhul. Kui sellega oled hakkama saanud, siis näita, et arvude 1 — n, kus $n > 13$, korral on selline paigutus võimalik.

I peatükk. REAALARVUD

Põhikooli kursusest tunneme naturaalarvu, täisarvu ja ratsionaalarvu mõisteid. Missugused on nende arvuhulkade omadused? Mis tingis nende hulkade kasutuselevõtu? Mille poolest need arvuhulgad üksteisest erinevad? Nendele ja paljudele teistele küsimustele püüamegi selles peatükis vastused leida.

1.1. NATURAALARVUDE HULK JA SELLE OMADUSED

Naturaalarvu mõiste on aastatuhandete vältel välja kasvanud meid ümbritsevate esemete loendamise vajadusest.

Naturaalarvudeks nimetatakse arve 1; 2; 3; . . .;n–1; n; n+1; . . .

Naturaalarvude hulka tähistatakse tähega $\mathbb{N}$.

Mõnikord loetakse ka arv 0 naturaalarvuks. Senini ei ole üheselt kokku lepitud, kas alustada naturaalarvude loendamist 0-st või 1-st. Siin ja edaspidi meie arvu 0 naturaalarvuks ei loe.

Iga kahe naturaalarvu a ja b korral esineb kolmest võimalusest parajasti üks:

— arvud a ja b on võrdsed, tähistame $a = b$;
— arv a on arvust b suurem, tähistame $a > b$;
— arv a on arvust b väiksem, tähistame $a < b$.

Järjestades naturaalarvud seose „on väiksem" põhjal, saame naturaalarvude hulga esitada kujul

$$\mathbb{N} = \{1; 2; 3; \ldots; n-1; n; n+1; \ldots\}.$$

Selles hulgas *leidub esimene arv ja iga arvu korral sellele vahetult järgnev arv, kuid ei ole viimast arvu — niisugust naturaalarvu, mis oleks kõigist suurem.*

Varasemast on teada, et naturaalarve saab liita ja lahutada, korrutada ja jagada. Tulemuseks on vastavalt summa, vahe, korrutis ja jagatis.

Kui liita kaks naturaalarvu, siis summa on alati naturaalarv. Samamoodi võib väita, et kahe naturaalarvu korrutis on alati naturaalarv. Kuna naturaalarvude summa ja korrutis kuuluvad alati naturaalarvude hulka, siis öeldakse, et **naturaalarvude hulk on kinnine liitmise ja korrutamise suhtes.**

Kui tahame naturaalarvust a lahutada naturaalarvu b, siis saame tulemuseks naturaalarvu vaid juhul, kui vähendatav on suurem kui vähendaja, s.t. kui $a > b$.

Näide: $7 - 2 = 5 \in \mathbb{N}$ ja $3 - 5 = -2 \notin \mathbb{N}$.

Seega võib öelda, et **naturaalarvude hulk ei ole lahutamise suhtes kinnine.**

Jagamisega leitakse korrutise ja ühe teguri järgi teine tegur. Olgu meil naturaalarvud a ja b. Kui leidub selline naturaalarv x, et $bx = a$, siis öeldakse, et arv a jagub arvuga b. Arvu x nimetatakse arvude a ja b jagatiseks ja kirjutatakse $a : b = x$ ehk $\frac{a}{b} = x$. Seega $b \cdot \frac{a}{b} = a$. Viimane võrdus väljendab jagamise definitsiooni.

Naturaalarvude hulk ei ole jagamistehte suhtes kinnine. Näiteks jagatis $22 : 3$ ei ole naturaalarv.

Liitmis- ja korrutamistehtel on hulgas $\mathbb{N}$ järgmised omadused:

1. Iga $a, b \in \mathbb{N}$ korral $a + b = b + a$. **Liitmise kommutatiivsus.**
2. Iga $a, b \in \mathbb{N}$ korral $a \cdot b = b \cdot a$. **Korrutamise kommutatiivsus.**
3. Iga $a, b, c \in \mathbb{N}$ korral $a + (b + c) = (a + b) + c$. **Liitmise assotsiatiivsus.**
4. Iga $a, b, c \in \mathbb{N}$ korral $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$. **Korrutamise assotsiatiivsus.**
5. Iga $a, b, c \in \mathbb{N}$ korral $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$.
   Korrutamise distributiivsus liitmise suhtes.

63. Arvuta peast.

a) $68 + 146 + 32$ b) $55 \cdot 5 - 1$
c) $683 \cdot 10 - 829$ d) $1 + 3 + 2 + 199 + 198 + 197$
e) $6^2 + 5^2 + 4^2$ f) $(15 - 2) \cdot (15 + 2)$
g) $2 + 4 + 6 + \ldots + 96 + 98 + 100 - 1 - 3 - 5 - \ldots - 97 - 99$
h) $2 \cdot 13 + 2 \cdot 45 + 2 \cdot 42 - 200$
i) $\dfrac{10^2 + 11^2 + 12^2 + 13^2 + 14^2}{365}$

64. On teada, et $a \in \mathbb{N}$ ja $b \in \mathbb{N}$. Kas alati $a + b \in \mathbb{N}$; $a - b \in \mathbb{N}$; $a : b \in \mathbb{N}$?

65. Kuidas selgitada, et naturaalarvude hulk on lõpmatu?

66. On teada, et $a \in \mathbb{N}$ ja $b \in \mathbb{N}$. Kas leiduvad a ja b sellised väärtused, et $a + b = a$?

Järgmiste ülesannete lahendamiseks meenuta kõigepealt:

Missuguseid arve nimetatakse algarvudeks (kordarvudeks)?
Kuidas leitakse kahe või enama arvu suurim ühistegur (vähim ühiskordne)?
Kuidas esitatakse kordarv algtegurite korrutisena?
Missugused on jaguvuse tunnused 2-ga; 3-ga; 5-ga; 9-ga; 10-ga?

67. Kontrolli, kas arvud 484; 1361; 376; 999; 3016 ja 444144 jaguvad 2-ga; 3-ga; 5-ga; 9-ga; 10-ga.

68. Leia arvude 64 ja 32; 162 ja 36 ning 6; 14 ja 20 suurim ühine tegur ja vähim ühiskordne.

69. Võta suvaliselt mõned naturaalarvude paarid (kolmikud) ning leia suurim ühistegur (olgu see k) ja vähim ühiskordne (olgu see t). Leia nüüd korrutis $k \cdot t$. Missuguse järelduse teed?

70. Naturaalarvud a ja b ($a > b$) jaguvad naturaalarvuga c. Kas ka $a + b$; $a - b$; $a \cdot b$ ja $a + b + c$ jaguvad arvuga c?

71. Kontrolli, kas paarisarvude (paaritute arvude) hulk on kinnine liitmise ja korrutamise suhtes.

72. Naturaalarvude kolmikuid (a; b; c) nimetatakse Pythagorase kolmikuteks, kui on täidetud tingimus $a^2 + b^2 = c^2$. Koosta arvutil programm, mille abil saab selliseid arvukolmikuid leida. Püüa koostada niisugune programm, mis annaks igast arvukolmikust vaid ühe esindaja (trükib näiteks 3; 4 ja 5, kuid ei trüki enam 4; 3 ja 5 või 6; 8 ja 10, sest viimane arvukolmik on saadud esialgsest iga arvu 2-ga korrutamisel).

73. Tõesta, et 1) kahe paarisarvu summa ja korrutis on paarisarv, 2) kahe paaritu arvu summa on paarisarv, kuid korrutis on paaritu arv.

74. Lahenda järgmised võrrandid. Leia naturaalarvuliste lahendite ruutude summast ruutjuur

a) $x^2 - 2x - 3 = 0$ b) $(x - 1)(x - 3) = 7 - 2 - \sqrt{25}$ c) $x(x - 1) = 0$
d) $x^2 - 16 = \cos 90°$ e) $\dfrac{x - 2}{2} + \dfrac{x - 3}{3} = 1$ f) $\dfrac{5}{6}x^2 = 2$

75. Liikluspolitsei otsib avarii tekitanud sõiduautot. Juhuslik möödakäija, matemaatikahuviline Tõeleid Roosinupp teadis öelda, et viimane number oli 8 ning auto numbrite neljandate astmete summa on võrdne auto numbriga. Kas politseinikel õnnestub nende andmete järgi otsitav auto leida? Auto numbris esinevat tähekombinatsiooni politseinikud teavad. Auto numbris on neli numbrit.

76. Kümme neegrit leidsid Aarete saarelt varanduse. Kui varandus jagada kõigi kümne vahel võrdselt, siis jääb üks münt üle. Samuti jääb üks münt üle siis, kui varandus jaotada võrdselt üheksa, kaheksa, . . . , kolme või kahe neegri vahel. Missugune on müntide minimaalne arv, mis rahuldab ülesande tingimusi?

1.2. TÄISARVUDE HULK JA SELLE OMADUSED

Naturaalarvud lõi hea Jumal, kõik ülejäänu on inimese kätetöö.

Kronecker

Kui inimkond võttis kasutusele naturaalarvud, siis lahendas ta enda jaoks loendamise probleemi. Kuid üsna pea selgus, et olemasolevate arvude abil on ebamugav kirjeldada mõningaid ettetulevaid olukordi.

Näiteks:
kuidas märkida võlga? külmakraade? liikumist etteantud suunale vastupidises suunas?

Ka matemaatikutel tekkisid omad probleemid. Võrrandeid lahendades jõuti tihti olukorrani, kus saadi negatiivsed lahendid. Seda, et võrrandil võivad olla ka negatiivsed lahendid, ei tunnistatud kaua aega. Selliseid lahendeid sageli ignoreeriti, vahel isegi asendati saadud lahend tema absoluutväärtusega.

Kui naturaalarvude hulka $\mathbb{N}$ täiendada arvuga 0 ja arvude 1; 2; 3; . . .; n - 1; n; $n + 1$; ... vastandarvudega, siis saame uue arvuhulga. Seda arvuhulka nimetatakse **täisarvude hulgaks** ja tähistatakse tähega $\mathbb{Z}$.

Edaspidi kasutame järgmisi sümboleid:

positiivsete täisarvude hulga tähistame $\mathbb{Z}^+$;
negatiivsete täisarvude hulga tähistame $\mathbb{Z}^-$.

Kokku võttes saame, et

$\mathbb{Z} = \mathbb{Z}^+ \cup \mathbb{Z}^- \cup \{0\}$.

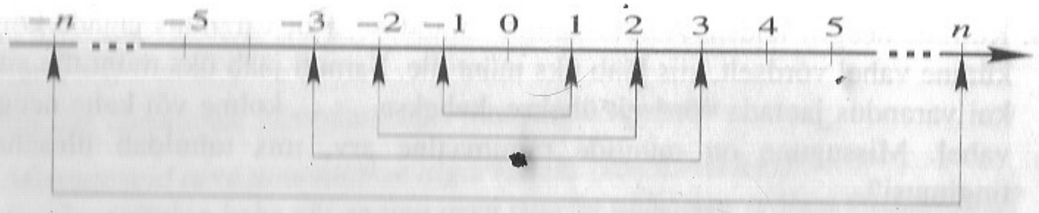
Täisarvude hulka võib üles märkida ka nii: $\mathbb{Z} = \{0; \pm1; \pm2; \pm3; \ldots\}$.
Lahutamistehe on täisarvude hulgas teostatav.

Viimatiöeldu tähendab seda, et võrrandil

$b + x = a$,

kus $a, b \in \mathbb{N}$, leidub lahend x ka juhul, kui $b \geq a$. Kokkuleppeliselt avaldame viimase võrrandi lahendi kujul $x = a - b$.

Kui $a > b$, siis $x \in \mathbb{N}$. Kui $b = a$, siis $x = 0$ ja kui $b > a$, siis esitame lahendi kujul $-(b - a)$. Tähistame $n = b - a$. Kuna $b > a$, siis $b - a > 0$ ja saadud lahend esitub kujul $-n$.



Arve n ja $-n$ nimetatakse teineteise vastandarvudeks.

Selleks et arvu ja tema vastandarvu arvteljel kujutada, pikendame arvkiirt nullpunkist vasakule poole.

Arvu $-n$ kujutiseks arvteljel loeme punkti, mis on sümmeetriline punktiga n nullpunkti suhtes.

Naturaalarvude hulk on kinnine liitmise ja korrutamise suhtes. Lahutamistehte tulemus ei ole alati naturaalarv. Täisarvude hulgas kuulub lahutamistehte tulemus alati täisarvude hulka. Kui $a \in \mathbb{Z}$ ja $b \in \mathbb{Z}$, siis on võrrandil $b + x = a$ alati olemas lahend $x = a - b$. Sisuliselt tähendab see seda, et arvust a arvu b lahutamine on sama mis arvule a arvu b vastandarvu liitmine.

Et täisarvude liitmisel, lahutamisel ja korrutamisel saame tulemuseks täisarvu, siis on täisarvude hulk nende tehete suhtes kinnine. Jagamistehte tulemus ei ole alati täisarv ja seetõttu öeldakse, et jagamistehte suhtes täisarvude hulk ei ole kinnine.

Tehete omadused on täisarvude hulgal samad mis naturaalarvude hulga korral.

77. Selgita, miks võeti kasutusele täisarvude hulk.

78. Missugused järgmistest lausetest on tõesed:
a) kui $a \in \mathbb{N}$, siis $a \in \mathbb{Z}$;
b) kui $a \in \mathbb{Z}^+$, siis $a \in \mathbb{N}$;
c) kui $a \in \mathbb{Z}^-$, siis $a \in \mathbb{N}$;
d) igal täisarvul leidub vastandarv;
e) $-a$ on alati negatiivne arv?

79. Missuguseid tingimusi peavad rahuldama täisarvud a ja b selleks, et $a \cdot b = 0$; $a \cdot b > 0$; $a \cdot b < 0$; $a^2 b < 0$; $a \cdot b \leqslant 0$; $a \cdot b \geqslant 0$?

80. Kuidas esitada üldkujul suvalist kahekohalist või kolmekohalist positiivset täisarvu?

81. Määra avaldise märk, kui $m > 0$ ja $n < 0$.

a) $m^2 n$	b) $n^3 n^5$	c) $-m^2 n^4$	d) $(-m^2 n^2)^3$
e) $-m^0 n^0$	f) $-(m^2 n^3)^4$	g) $(-m^2 n^3)^4$	h) $(m^2 n^3)(-nm^3)^3$

82. Eval on 12-liitrine anum õunamahla. Kuidas saab ta sellest poole välja valada, kui tal on veel kaks anumat: üks mahuga 8 liitrit ja teine mahuga 5 liitrit?

83. Leia x, kui $\left(\frac{1000000 - 7x}{8} \cdot 5 + 529210\right) \cdot 10 - 9999999 = 1$.

84. Mitu kilogrammi toorkohvi kulub 10 kg praetud kohvi saamiseks, kui kohv kaotab praadimisel massist 12,5%?

85. Kui palju puhast hõbedat tuleb lisada 400 grammile hõbedale prooviga 835, et saada hõbe prooviga 875?

TALLINNA PRANTSUSE

86. Tõesta, et mitte ühegi $n \in \mathbb{N}$ korral ei ole arvudel $21n + 4$ ja $14n + 3$ ühiseid tegureid.

87. Olgu antud mingi kolmekohaline arv. Sellest arvust saadakse esimese ja viimase numbri vahetamisel uus arv. Tõesta, et esialgse ja saadud arvu vahe jagub 9-ga.

88. Tõesta, et kui paaritu arvu ruutu ühe võrra vähendada, siis tulemus jagub alati 8-ga.

89. Tõesta, et suvaline ühesuguste numbritega kirjutatud kolmekohaline arv jagub 37-ga.

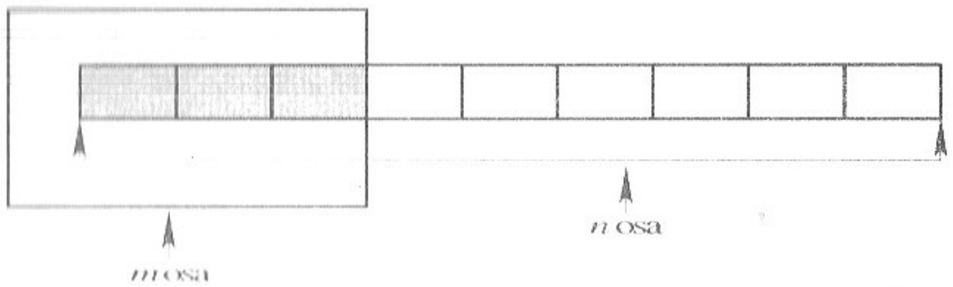
90. Olgu arvud $a_1; a_2; \ldots; a_7$ mingid täisarvud ning arvud $b_1; b_2; \ldots b_7$ samad täisarvud võetuna mingis teises järjekorras. Tõesta, et korrutis $(a_1 - b_1)(a_2 - b_2) \ldots (a_7 - b_7)$ on paarisarv.

91. On teada, et $a + b + c = 0$ ja $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Leia $a^4 + b^4 + c^4$.

1.3. RATSIONAALARVUDE HULK JA SELLE OMADUSED

Juba vanal ajal tegeleti jaotamise ja mõõtmisega. Seetõttu võeti kasutusele murdarvud — harilikud murrud.

Harilik murd $\frac{m}{n}$, kus $m \in \mathbb{N}$ ja $n \in \mathbb{N}$ tähendab tulemust, mis saadakse, kui mingi ühik jaotada n võrdseks osaks ja võtta m sellist osa.



Sama tulemuse saaksime siis, kui jaotame m ühikut n võrdseks osaks ja võtame igast ühikust ühe sellise osa. Mõlemal juhul saame, et

$$n \cdot \frac{m}{n} = m,$$

millest jagamise definitsiooni (vt. punkt 1.1) kohaselt järeldub, et $\frac{m}{n} = m:n$.

Seega on murrujoonel jagamismärgi tähendus.

Arve $\frac{2}{3}; \frac{4}{9}; \frac{12}{6}; \ldots$ nimetatakse positiivseteks harilikeks murdudeks.

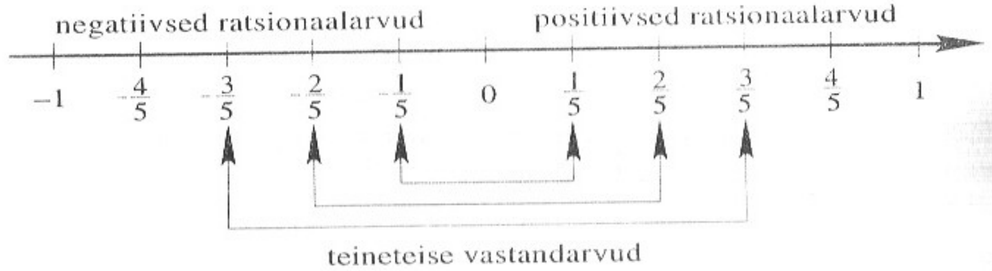
Nende arvude kasutuselevõtmise tulemusena osutub positiivsete täisarvude jagamine alati teostatavaks. Kui murdude hulka täiendada positiivsete murdude vastandarvudega, siis saame negatiivsed harilikud murrud, neid tähistame kujul: $-\frac{m}{n}$, kus $m \in \mathbb{N}$ ja $n \in \mathbb{N}$.

Vaatleme nüüd murdu $\frac{m}{n}$, kus $m \in \mathbb{Z}$ ja $n \in \mathbb{N}$. Selline murd võib esitada täisarvu (sel juhul m jagub n-ga), tulemuseks võib olla ka taandumatu positiivne murdarv või negatiivne murdarv (too näiteid).

Kõik täisarvud, positiivsed ja negatiivsed murdarvud kokku moodustavad arvuhulga, mida nimetatakse **ratsionaalarvude hulgaks** ja seda arvuhulka tähistatakse tähega $\mathbb{Q}$.

Kuna iga täisarvu saab esitada jagatisena, siis võib öelda, et **ratsionaalarvuks nimetatakse sellist arvu, mis avaldub jagatisena $\frac{m}{n}$, kus $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{Z}$ ja $n \neq 0$.**

Igale ratsionaalarvule $\frac{m}{n}$ vastab arvteljel oma kindel punkt. Positiivsed ratsionaalarvud asuvad punktist 0 paremal ja negatiivsed ratsionaalarvud asuvad punktist 0 vasakul.



Positiivsele ratsionaalarvule vastava punkti saame, kui ühiklõigu (lõik pikkusega 1) jaotame n võrdseks osaks ja saadud lõigu pikkusega $\frac{1}{n}$ kanname arvteljel alguspunktist paremale poole m korda. Antud punktiga alguspunkti suhtes sümmeetriline punkt on arvu $-\frac{m}{n}$ kujutiseks arvteljel. Murdude võrdsus ja tehted murdudega on määratud järgmiselt

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \iff a \cdot d = b \cdot c \text{ ja } b \neq 0,\ d \neq 0$$

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad \pm bc}{bd},\ b \neq 0 \text{ ja } d \neq 0$$

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d},\ b \neq 0 \text{ ja } d \neq 0$$

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c},\ b \neq 0,\ d \neq 0,\ c \neq 0.$$

Et tehete sooritamisel murdudega saame murru, siis seetõttu võib öelda, et ratsionaalarvude hulk on kinnine kõigi aritmeetiliste tehete suhtes (välja arvatud jagamine nulliga).

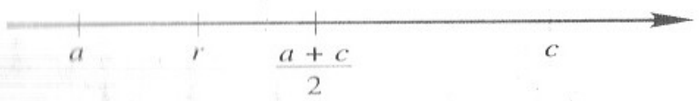
Murdude summal ja korrutisel on samad omadused mis naturaalarvude ja täisarvude korral. Kuid ratsionaalarvude hulgas ei saa leida antud ratsionaalarvule vahetult eelnevat ega vahetult järgnevat arvu, kuigi arvuhulk on järjestatud.

Näitame, et kehtib teoreem.

TEOREEM: Iga kahe erineva ratsionaalarvu vahel leidub ratsionaalarve.
EELDUS: Olgu a ja c ratsionaalarvud nii, et $a < c$.
VÄIDE: Leidub selline ratsionaalarv b, mille korral $a < b < c$.

TÕESTUS: Leiame arvude a ja c aritmeetilise keskmise $\frac{a+c}{2}$. Et a ja c on ratsionaalarvud, siis on ka $a + c$ ratsionaalarv. Kui saadud tulemuse jagame kahega, siis saame jällegi ratsionaalarvu, sest ratsionaalarvude hulk on jagamistehte suhtes kinnine (välja arvatud jagamine nulliga).
Kuna eelduse järgi $a < c$, siis ilmselt kehtib võrratus

$$\frac{a+a}{2} < \frac{a+c}{2} \text{ ehk } \frac{2a}{2} < \frac{a+c}{2} \text{ ehk } a < \frac{a+c}{2} \quad (*)$$



Teiselt poolt aga saame võrratuse $\frac{c+c}{2} > \frac{a+c}{2}$ ehk $c > \frac{a+c}{2}$ (**)

Võttes nüüd kokku tulemused (*) ja (**) võime kirjutada, et

$$a < \frac{a+c}{2} < c.$$

Seega oleme tõestanud, et ratsionaalarvude a ja c vahel leidub selline ratsionaalarv $b = \frac{a+c}{2}$. Loomulikult võib sellist mõttekäiku korrata nüüd arvude a ja b korral. Tulemuseks saame ratsionaalarvu r, mis osutub arvude a ja b aritmeetiliseks keskmiseks. Jätkates niisugust arutlust selgub, et kahe mittevõrdse ratsionaalarvu vahel on veel lõpmata palju ratsionaalarve.
Kuna iga kahe mittevõrdse ratsionaalarvu vahel leidub veel lõpmata palju ratsionaalarve (miks me võime nii väita?), siis öeldakse, et **ratsionaalarvude hulk on tihe.**

1.3.1. RATSIONAALARVUD JA KÜMNENDMURRUD

Iga ratsionaalarvu $\frac{m}{n}$ saab esitada kümnendmurruna. Selleks jagame murru lugeja nimetajaga. Vaatleme mõningaid näiteid:

a) $\frac{3}{5} = 0{,}6$; b) $\frac{2}{3} = 0{,}666\ldots 6\ldots$; c) $\frac{59}{90} = 0{,}6222\ldots 2\ldots$

Näites a saame tulemuseks **lõpliku kümnendmurru**, näidetes b ja c on tulemuseks **lõpmatu kümnendmurd**. Selgitame, miks see on nii.

Jagamisel tekkivad jäägid on alati jagajast väiksemad. Kui jagame arvu m arvuga n (olgu n positiivne täisarv), siis jäägiks võime saada 0; 1; 2; . . .; $n - 1$. Kui jääk on 0, siis on jagamine lõppenud ja me saame tulemuseks lõpliku kümnendmurru. Kui kõik jäägid on nullist erinevad, siis jagamine ei lõpe. Kuna erinevate jääkide hulk on lõplik, siis mingi jääk peab korduma. Sellisel juhul hakkavad korduma ka numbrid jagatises (näiteks $\frac{4}{33} = 0{,}121212\ldots$). Sellisel juhul saame tulemuseks **perioodilise kümnendmurru**. Juhul kui periood (korduma hakkav numbrite rühm) algab kohe pärast koma, siis selliseid kümnendmurde nimetatakse **puhtperioodilisteks kümnendmurdudeks**. Puhtperioodiliste kümnendmurdude kirjutamisel märgitakse periood tavaliselt sulgudesse, näiteks $0{,}666\ldots = 0{,}(6)$; $0{,}1212\ldots = 0{,}(12)$. Ka näites c hakkavad jagatises numbrid korduma, kuid mitte kohe pärast koma. Kümnendmurdu, milles periood ei alga vahetult pärast koma, nimetatakse **segaperioodiliseks kümnendmurruks**. Kümnendmurru $0{,}6222\ldots$ võib kirjutada ka kujul $0{,}6(2)$.

Kuna ka iga lõplik kümnendmurd on esitatav lõpmatu perioodilise kümnendmurruna (näiteks $4{,}3 = 4{,}300000\ldots = 4{,}(3)$), siis võime öelda, et **iga ratsionaalarv avaldub lõpmatu perioodilise kümnendmurruna.**

Samuti on võimalik näidata, et **iga lõpmatu perioodiline kümnendmurd avaldub ratsionaalarvuna**. Vaatleme selle kohta näiteid.

Näide: Teisendame $0{,}\mathbf{36}3636\ldots$ ja $2{,}1\mathbf{453}453\ldots$ harilikuks murruks.

a) Tähistame $0{,}363636\ldots$ tähega x, siis

$$\begin{array}{rl} 100x = & 36{,}3636\ldots \\ x = & 0{,}3636\ldots \\ \hline 99x = & 36, \end{array} \qquad x = \frac{36}{99} = \frac{4}{11}.$$

b) Tähistame $2{,}1453453\ldots$ tähega x, siis

$$\begin{array}{rl} 10000x = & 21453{,}453\ldots \\ 10x = & 453\ldots \\ \hline 9990x = & 21432 \end{array} \qquad x = \frac{21432}{9990} = 2\frac{242}{1665}.$$

Paragrahvi lõpetuseks esitame veel ühe küsimuse. Igale ratsionaalarvule vastab arvteljel parajasti üks punkt. Kas igale arvtelje punktile vastab ka ratsionaalarv? Vastuse küsimusele leiad järgmisest paragrahvist.

92. Kontrolli missugused antud arvudest on ratsionaalarvud, missugused mitte.

a) 0,225225225. . . b) 0,252255222. . . c) 3,125125. . .
d) 4,317327337. . . e) 2,141416. . . f) 0,2305305305. . .

Kas esitatud kirjapildi järgi saab küsimusele alati üheselt vastata?

93. Arvuta täpselt.

a) $4\frac{5}{14}-\left[1\frac{11}{49}:\left(76\cdot\frac{25}{38}-47\frac{3}{7}\right)\right]\cdot\frac{12}{55}$

b) $\left[\left(\left(\frac{17}{24}+\frac{9}{40}\right)-\left(\frac{11}{48}+\frac{31}{80}\right)\right):3\frac{4}{5}\right]\cdot 1\frac{5}{7}$

c) $\dfrac{8:\left[3:\left(2\frac{3}{4}-1\frac{15}{28}\right)+\frac{2}{3}:\frac{3}{2}\right]+\frac{57}{223}}{14\cdot\left(5\frac{5}{7}-4\frac{3}{4}\right)-9\frac{5}{7}+\frac{3}{14}}$

94. Teisenda kümnendmurruks.

a) $\frac{3}{4}$ b) $\frac{5}{8}$ c) $\frac{9}{16}$ d) $\frac{7}{4}$ e) $\frac{11}{8}$
f) $\frac{5}{32}$ g) $\frac{41}{50}$ h) $\frac{3}{11}$ i) $\frac{15}{11}$ j) $\frac{11}{15}$
k) $\frac{53}{100}$ l) $\frac{53}{99}$ m) $\frac{1}{9}$ n) $\frac{4}{9}$ o) $\frac{12}{11}$

95. Esita järgmised kümnendmurrud hariliku murruna.

a) 0,(142857) b) 0,(428571) c) 0,4(9) d) 0,(9)
e) 2,1(21) f) 3,12746(0) g) 3,(12) h) – 1,(2)

96. Leia vähemalt 3 taandumatut murdu arvude $\frac{1}{2}$ ja $\frac{2}{3}$ vahelt.

97. Arvuta.

a) 1,(2) + 2,0(45) b) 0,(3)·0,(4) : 0,(5)
c) 3,03(23) + 2,(1234) d) 2,3(5) – 2,3(4)

98. Missugused järgmistest lausetest on tõesed? Põhjenda vastust.

a) arvude 3 ja 4 vahel on lõpmata palju ratsionaalarve;
b) iga ratsionaalarv avaldub lõpliku kümnendmurruna;
c) kõik naturaalarvud on ratsionaalarvud;
d) leidub ratsionaalarve, mis ei ole naturaalarvud;
e) ratsionaalarvude hulka ei saa järjestada.

99. Järjesta murrud kasvavas (kahanevas) järjekorras.

$2\frac{3}{5}$; $2\frac{15}{25}$; $2\frac{23}{47}$; $2\frac{34}{69}$; $2\frac{55}{109}$; $2\frac{57}{111}$; 2,(1034); 2,23(45)

100. Piimast saab 15% koort, koorest 25% võid. Kui palju tuleb võtta piima, et saada 600 kg võid?

101. Näita, et kui murru nimetaja ei sisalda ühtegi algtegurit peale arvude 2 ja 5, siis see murd teiseneb lõplikuks kümnendmurruks.

102. Mida teeb järgmine arvutiprogramm? Püüa programmi täiustada.

```
10 INPUT "ANNA MURRU LUGEJA JA NIMETAJA"; A,B
20 T=INT(A/B)
30 PRINT "TÄISOSA ON ";T
40 INPUT "MITU KOHTA PEALE KOMA";N
50 FOR I=1 TO N
60 A=(A-T*B)*10
70 T=INT(A/B)
80 PRINT T;
90 NEXT I
100 END
```

103. Koosta programm, mis esitab kordarvu algarvuliste tegurite korrutisena.

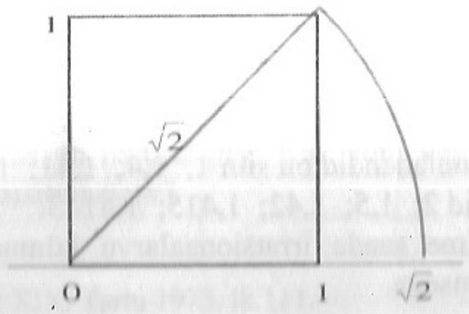
104. Koosta arvutiprogramm, mis taandab hariliku murru (või teatab, et antud murd on taandumatu).

1.4. IRRATSIONAALARVUDE HULK JA SELLE OMADUSED

Enne, kui asume vastama eelmise paragrahvi lõpus esitatud küsimusele, teeme lühikese ajaloolise tagasivaate.

535. a. e. Kr. asutas Pythagoras Lõuna-Itaalia linnas Krotonis nn. pütaagorlaste liidu. See olevat olnud üheaegselt poliitiline organisatsioon, ususekt kui ka matemaatikaga tegelev koolkond. Pütaagorlaste üheks avastuseks oli ka see, et ühikruudu (ruut külje pikkusega 1 ühik) diagonaali pikkust pole võimalik ratsionaalarvuna avaldada.

TEOREEM: Ühikruudu diagonaali pikkus ei esitu ratsionaalarvuna.
EELDUS: Olgu antud ruut külje pikkusega 1.
VÄIDE: Ruudu diagonaali pikkus ei ole ratsionaalarv.
TÕESTUS: Oletame väite vastaselt, et ühikruudu diagonaali d pikkus on ratsionaalarv.



Pythagorase teoreemist $d^2 = 1^2 + 1^2$ ehk $d^2 = 2$, siit $d = \sqrt{2}$. Kui $\sqrt{2}$ on ratsionaalarv, siis esitub ta taandumatu murruna kujul $\frac{a}{b}$.

Seega $\frac{a}{b} = \sqrt{2}$ ning võttes viimase võrduse mõlemad pooled ruutu, saame

$\frac{a^2}{b^2} = 2$ ehk $a^2 = 2b^2$.

Kuna viimase võrduse paremal pool on paarisarv (esimene tegur on 2), siis peab ka vasakul pool olema paarisarv. Kui a^2 on paarisarv, siis on ka a paarisarv, sest ainult paarisarvu ruut on paarisarv. Järelikult võime nüüd arvu a kui paarisarvu esitada kujul $a = 2c$.

Tõstame võrduse mõlemad pooled ruutu, saame $a^2 = 4c^2$ ning arvestades eespool saadud tulemust $a^2 = 2b^2$ saame, et

$4c^2 = 2b^2$ ehk $b^2 = 2c^2$

Viimasest võrdusest järeldub, et b^2 on paarisarv ning seetõttu on b paarisarv. Murd $\frac{a}{b}$ pidi olema taandumatu murd, kuid selgus, et a ja b on paarisarvud ja seega murdu on võimalik 2-ga taandada. Seega väitevastane oletus, et $\sqrt{2}$ on esitatav taandumatu murruna, ei pidanud paika.

Järelikult ühikruudu diagonaali pikkust ei saa esitada ratsionaalarvuna.

Mitteratsionaalsele arvule $\sqrt{2}$ omistatakse mitteratsionaalse e. irratsionaalse (lad. k. *irrationalis* — mittemõistuslik, mõistusega mitteseletatav) arvu tähendus. Samuti on irratsionaalarvud $\sqrt{3}$; $\sqrt[3]{2}$; π jt. Tekib küsimus: kas irratsionaalarv on avaldatav lõpmatu perioodilise kümnendmurruna? Kui see oleks nii, siis oleks irratsionaalarv ühtlasi ka ratsionaalarv. Järelikult on vastus eitav. Kuidas siis avalduvad irratsionaalarvud?

Taskuarvutil saame arvu $\sqrt{2}$ väärtuseks 1,4142135. Saadud tulemus on ligikaudne. Praktikas kasutatakse irratsionaalarvude asemel nende puuduga ja liiaga võetud kümnendlähendeid. Puuduga võetud kümnendlähendid on täpsest väärtusest väiksemad ja liiaga võetud kümnendlähendid on täpsest väärtusest suuremad.

Näide:

$1 < \sqrt{2} < 2$, sest $1^2 < 2 < 2^2$,

$1{,}4 < \sqrt{2} < 1{,}5$, sest $1{,}4^2 < 2 < 1{,}5^2$,

$1{,}41 < \sqrt{2} < 1{,}42$, sest $1{,}41^2 < 2 < 1{,}42^2$,

$1{,}414 < \sqrt{2} < 1{,}415$, sest $1{,}414^2 < 2 < 1{,}415^2$,

$1{,}4142 < \sqrt{2} < 1{,}4143$, sest $1{,}4142^2 < 2 < 1{,}4143^2$.

. . . . . .

Puuduga võetud kümnendlähendid on siin 1; 1,4; 1,41; 1,414; 1,4142 ja liiaga võetud kümnendlähendid 2; 1,5; 1,42; 1,415; 1,4143.

Niiviisi jätkates võime saada irratsionaalarvu kümnendmurruna esituvaid lähendeid mistahes täpsusega.

Arvu, mis avaldub lõpmatu mitteperioodilise kümnendmurruna, nimetatakse irratsionaalarvuks.

Tehete omadused on irratsionaalarvudel samad mis ratsionaalarvude korral. Vastates eelmise paragrahvi lõpus esitatud küsimusele, peame ütlema, et arvteljel on punkte, millele ei vasta ratsionaalarv. Need punktid kujutavad irratsionaalarve.

Üks tuntumatest irratsionaalarvudest on arv π. Esimene teadlane, kes andis range meetodi π arvutamiseks, oli **Archimedes** (u. 287 – 212 e. Kr.). Ta sai tulemuseks $3\frac{10}{17} < \pi < 3\frac{1}{7}$. Aritmeetiline keskmine annab siit 3,142. **Apollonius** Pergest (u. 260 – u. 170 e. Kr.) sai Archimedese väärtusega võrreldes täpsema tulemuse: $\pi = 3{,}1416$. Suured on arvu π uurimisel Samarkandi astronoomi ja matemaatiku **al-Kaši** teened. Väidetavalt olnud ta esimene, kes esitas π kümnendmurruna. Tema poolt saadud tulemus oli $2\pi = 6{,}2831853071795865$. Sada seitsekümmend aastat võttis aega, enne kui al-Kaši poolt saavutatud täpsus osutus ületatuks. Aastal 1600 arvutas hollandlane **Ludolph van Ceulen** (1539–1610) arvu π kolmekümne viie kümnendkohaga. Suur täpsus vapustas matemaatikuid ja arv π (tol ajal teda veel nii ei nimetatud) sai *Ludolphi* arvu nimetuse.

1844. a. arvutas Tartu Ülikooli astronoom-vaatleja **Thomas Clausen** arvu π 250 kümnendkohta. Aastatel 1850 – 1853 leidis inglane **William Shanks** arvul π 607 kümnendkohta ning aastaks 1873 oli leidnud koguni 707 kümnendkohta. Alles 1946. a. selgus, et arvutustes oli alates 528. kohast viga.

1962. a. avaldasid D. Shanks ja J. Wrenchi artikli „Calculation of π to 100 000 Decimals" Mõningate andmete järgi leiti 100 265 kümnendkohta [1]. Praktikas pole muidugi sellise hulga kümnendkohtade kasutamine sagedane. Kui meie kasutame arvu π lähendina sageli arvu 3,14, siis Ameerika koolides on kasutatud Archimedese murdu $\frac{22}{7}$. Sellega seoses pakub huvi järgmine fakt. USA-s kasutatakse tänapäevani vedelikkude mõõtmisel nn. *vana veinigallonit*. Selle mahumõõdu definitsoon ise kõlab järgmiselt: *galloniks nimetatakse läbimõõduga 7 tolli ning kõrgusega 6 tolli silindri mahtu ehk 231 kuuptolli*. Selgita, kuidas see on seotud arvuga π? Arvuta, kui palju on see ruumala liitrites.

105. Selgita, kuidas on avaldatavad irratsionaalarvud (ratsionaalarvud).

106. Leia järgmiste arvude seast neli irratsionaalarvu.

$\sqrt{2}$; $\sqrt{3}$; 0; $-\sqrt{25}$; 0,1011011101111; $\sqrt{11}$; 0,(8)

107. Ruudu külje pikkus on naturaalarv. Kas võib väita, et ruudu diagonaali pikkus on alati irratsionaalarv?

[1] Matemaatika ja kaasaeg XIX. Tartu 1973, lk.111.

108. Leia taskuarvuti abil arvu $\sqrt{3}$ puuduga ja liiaga kümnendlähendid täpsusega 0,1; 0,01; 0,001; 0,0001.

109. $A=\sqrt{8}+\sqrt{5}$ ja $B=\sqrt{6}+\sqrt{7}$. Leia A ja B ligikaudne väärtus täpsusega 0,0001. Kas $A>B$?

110. Olgu A momendi aastaarv. Kumb on suurem, kas $\sqrt{A+3}+\sqrt{A}$ või $\sqrt{A+1}+\sqrt{A+2}$?

111. Tõesta, et $\sqrt{3}$ ja $\sqrt{8}$ on irratsionaalarvud.

112. Kas lause on tõene või väär?

a) iga a ja b korral $\sqrt{ab}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$

b) kui $a\geq 0$ ja $b>0$, siis $\sqrt{a:b}=\sqrt{a}:\sqrt{b}$

c) kui $a\geqslant 0$, siis $\sqrt{a^2}=a$

d) iga a korral $\sqrt{a^2}=a$

113. Lihtsusta avaldist, kui a ja b on suvalised ratsionaalarvud.

a) $\sqrt{36a^2}$ b) $\sqrt{196b^4}$ c) $\sqrt{225a^6}$

d) $\sqrt{(a-b)^2}$ e) $\sqrt{a^2-6a+9}$ f) $\sqrt{b^2+4b+4}$

114. Lihtsusta avaldis.

a) $\sqrt{50}+\sqrt{32}-\sqrt{18}$ b) $\sqrt{245}-\sqrt{5}+\sqrt{125}$

c) $\sqrt{50}+\sqrt{150}-\sqrt{550}$ d) $-\left(5\sqrt{0{,}02}-\sqrt{300}\right)$

e) $2(\sqrt{252}-\sqrt{175})\cdot(\sqrt{112}-\sqrt{63}-\sqrt{28})$

115. Leia üks ratsionaal- ja üks irratsionaalarv antud arvude vahelt.

a) 1 ja 2 b) $-\frac{1}{8}$ ja $-\frac{1}{16}$ c) π ja $\pi+1$ d) $\sqrt{3}$ ja $\sqrt{5}$

e) 1,(2) ja 1,(3) f) 0 ja 1 g) 2,3 ja 3 h) 4,(9) ja 5

116. Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) tuletas arvu π leidmiseks valemi $\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\ldots$. Koosta arvutiprogramm, mille abil saab leida arvu π kümnendkohti.

1.5. REAALARVUDE HULK JA SELLE OMADUSED

Varasemast teame naturaalarvude hulka $\mathbb{N}$, täisarvude hulka $\mathbb{Z}$, ratsionaalarvude hulka $\mathbb{Q}$ ja irratsionaalarvude hulka $\mathbb{I}$. Teame ka seda, et ratsionaalarvude hulk on tihe (*mida see tähendab?*), kuid ratsionaalarvud ei täida kogu arvtelge. Seega leiduvad arvteljel punktid, millele vastavat ratsionaalarvu ei leidu. Täiendades ratsionaalarvude hulka irratsionaalarvude hulgaga, jõuame olukorrani, kus arvtelje igale punktile vastab üks kindel arv ning vastupidi.

Ratsionaalarvude hulk $\mathbb{Q}$ ja irratsionaalarvude hulk $\mathbb{I}$ kokku moodustavad arvuhulga, mida edaspidi nimetame **reaalarvude hulgaks** ja tähistame tähega $\mathbb{R}$.

Seega,

$$\mathbb{R}=\mathbb{Q}\cup\mathbb{I}.$$

Reaalarvude hulga kohta öeldakse, et ta on **pidev**. Pideva joone all mõistame tavaliselt sellist joont, mida saab paberile joonestada pliiatsit paberilt võtmata. Eemaldades pliiatsi paberilt tekib joones lünk — pidevus katkeb. Analoogiliselt võime öelda, et reaalarvude hulk on pidev, s.t. lünkadeta. Eemaldades arvteljelt kasvõi ühe reaalarvu, näiteks $\sqrt{2}$, ei saa enam rääkida tekkinud arvuhulga pidevusest.

Nagu sirgjoone punktide hulk, nii ka **reaalarvude hulk** on **järjestatud**, s.t. iga kahe erineva reaalarvu a ja b korral on õige üks väidetest: kas $a<b$ või $b<a$. Praktiliselt võrreldakse kaht reaalarvu nende teisendamise teel kümnendmurdudeks

$$\left.\begin{array}{l}\sqrt{2}=1{,}4142\ldots\\ 1\frac{6}{13}=1{,}4615\ldots\end{array}\right\}\Rightarrow\sqrt{2}<1\frac{6}{13}.$$

Ülesande 115 alaülesandes h tekkisid mõningad probleemid. Meil ei õnnestu leida ühtegi ratsionaalarvu (samuti irratsionaalarvu) arvude 4,(9) ja 5 vahelt. Põhjus on selles, et arvud 4,(9) ja 5 on võrdsed. Tõepoolest, kui $x=4{,}999\ldots$, siis $10x=49{,}999\ldots$ ning järelikult $9x=45$, seega $x=5$.

> Iga lõpmatut kümnendmurdu, mis ei lõpe numbriga 9 perioodis, nimetatakse reaalarvuks.

Vaatleme nüüd, kuidas sooritada tehteid reaalarvudega, kui andmete seas on irratsionaalarve.

Olgu vaja leida summa $a+b$ ja korrutis $a\cdot b$, kui $a=\frac{1}{3}$ ja $b=\sqrt{2}$.

Teisendame arvud a ja b kümnendmurdudeks: $a=0{,}33333\ldots$ ja $b=1{,}41421\ldots$ Otsitav summa peab olema suurem igast puuduga võetud kümnendlähendite summast ja väiksem igast liiaga võetud kümnendlähendite summast. Niiviisi saame summa jaoks järgmised tõkked:

$0{,}3+1{,}4<x<0{,}4+1{,}5$	ehk	$1{,}7<x<1{,}9$
$0{,}33+1{,}41<x<0{,}34+1{,}42$	ehk	$1{,}74<x<1{,}76$
$0{,}333+1{,}414<x<0{,}334+1{,}415$	ehk	$1{,}747<x<1{,}749$
$0{,}3333+1{,}4142<x<0{,}3334+1{,}4143$	ehk	$\mathbf{1{,}7475<x<1{,}7477}$

. . . . . .

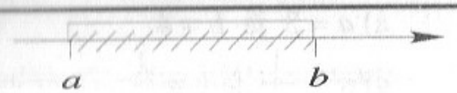
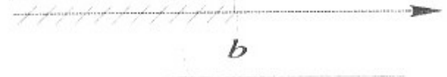
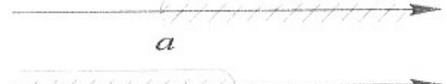
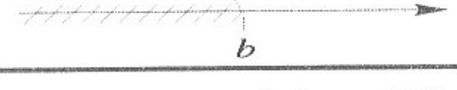
Otsitava summa x jaoks saame kaks kümnendlähendite jada, mille vastavate liikmete vahed on 0,2; 0,02; 0,002; 0,0002 jne. Arvutusi analoogiliselt jätkates saab see vahe kuitahes väikeseks. Sellest järeldame, et leidub **üksainus arv**, millele mõlemad jada liikmed lähenevad. Viimasest võrratusest näeme, et

$\frac{1}{3}+\sqrt{2}=1{,}747\ldots$.

Tulemus on lõpmatu mitteperioodiline kümnendmurd, seega irratsionaalarv.

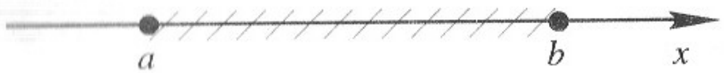
Täiesti analoogiliselt leiame antud arvude korrutise.

$$\begin{array}{rcl} 0{,}3\cdot 1{,}4 < x < 0{,}4\cdot 1{,}5 & \text{ehk} & 0{,}42 < x < 0{,}60 \\ 0{,}33\cdot 1{,}41 < x < 0{,}34\cdot 1{,}42 & \text{ehk} & 0{,}4653 < x < 0{,}4828 \\ 0{,}333\cdot 1{,}414 < x < 0{,}334\cdot 1{,}415 & \text{ehk} & \mathbf{0{,}470862} < x < \mathbf{0{,}472610} \\ \ldots\ldots\ldots\

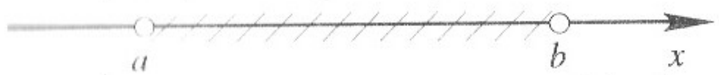
Nimetus	Tingimus	Tähis	Graafiline esitus
lõik a-st b-ni	$a \leqslant x \leqslant b$	$[a; b]$	
vahemik a-st b-ni	$a < x < b$	$]\,a; b\,[$	
poollõik a-st b-ni	$a < x \leqslant b$	$]\,a; b\,]$	
	$a \leqslant x < b$	$[\,a; b\,[$	
lõpmatu poollõik	$x \geqslant a$	$[\,a; \infty[$	
	$x \leqslant b$	$]-\infty; b\,]$	
lõpmatu vahemik	$x > a$	$]\,a; \infty\,[$	
	$x < b$	$]-\infty; b\,[$	

Mõnikord kasutatakse esitatust veidi erinevat sümboolikat. Näiteks poollõiku $]\,a; b\,]$ märgitakse ka $(\,a; b\,]$, lõpmatut vahemikku $]\,a; \infty\,[$ ka $(\,a; \infty\,)$ jne.

Erinevusi võib olla ka antud arvuhulkade graafilisel kujutamisel. Lõiku $[\,a; b]$ võime joonisel märkida nii, nagu eespool tabelis on näidatud. Mõnikord kasutatakse aga järgmist kujutamisviisi:



Vahemikku $]\,a; b\,[$ tuleb sel juhul kujutada nii:



Üldiselt, kui punkt kuulub vaadeldavasse piirkonda, siis kasutame vastava punkti märkimisel sümbolit „•", vastasel juhul kasutame sümbolit „○".
Järgnevalt tuletame meelde tehted hulkadega.

1. **Hulkade A ja B ühend.**

Hulkade A ja B ühendiks nimetatakse hulka A∪B, mille korral

$A \cup B = \{\, x \mid x \in A \vee x \in B \,\}$.

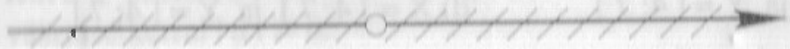
Viimast kirjutist tuleb mõista nii: *hulkade A ja B ühendiks on hulk, mis koosneb elementidest, mis kuuluvad hulka A või hulka B.*

Näide: $A = \{1; 2; 5\}$ ja $B = \{3; 4\}$. $A \cup B = \{1; 2; 3; 4; 5\}$.

Näide: $A = [-1; 1]$ ja $B =]0; 3[$. $A \cup B = [-1; 3[$.

Näide: $A =]-\infty; 3[$ ja $B =]3; \infty[$. Antud juhul on hulkade A ja B ühendiks kogu reaalarvude hulk, välja arvatud arv 3. Sellisel juhul märgime hulkade A ja B ühendi järgmiselt:

$A \cup B = \mathbb{R} \setminus \{3\}$ (loe: reaalarvude hulk ilma elementita 3).
Seda hulka võib arvteljel kujutada järgmiselt:



2. **Hulkade A ja B ühisosa.**

Hulkade A ja B ühisosaks nimetatakse hulka $A \cap B$, mille korral

$A \cap B = \{\, x \mid x \in A \wedge x \in B \,\}$.

Hulkade A ja B ühisosasse kuuluvad mõlema hulga ühised elemendid.

Näide: $A = \{1; 2; 3; 4\}$ ja $B = \{2; 4; 5\}$. $A \cap B = \{2; 4\}$

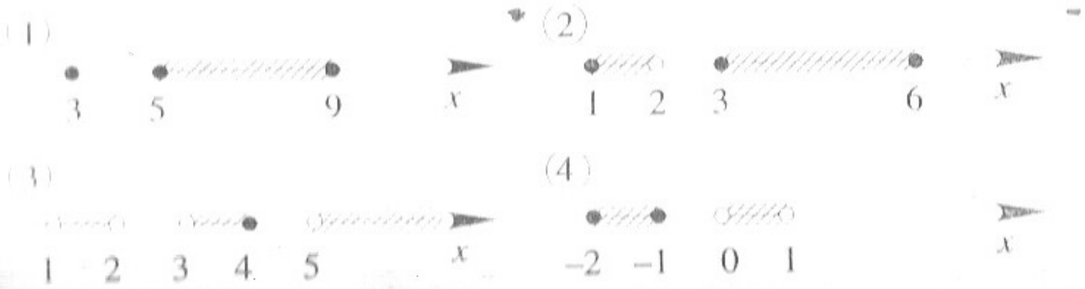
Näide: $A =]\,3; 7\,]$ ja $B = [\,4; 5\,[$. $A \cap B = [\,4; 5\,[$. Sama joonisel:

Näide: $A =]\,7; 11\,[$ ja $B = [\,11; 13\,[$. $A \cap B = \varnothing$, sest hulkadel A ja B ühiseid elemente ei ole, joonisel

128. Märgi arvteljele järgmised piirkonnad.

a) $-3 < x < 6$ b) $4 \leqslant x < 7$ c) $-2 \leqslant x \leqslant 4$ d) $-3 < x < -6$
e) $]\,3; 7\,[$ f) $[-2; 5\,[$ g) $[-3; 5\,[$ h) $]\,0; \pi\,[$
i) $]-\infty; -3\,[$ j) $[-4; \infty\,[$ k) $]-\infty; \infty\,[$ l) $]\,0; \infty\,[$

129. Esita arvtelje viirutatud osad reaalarvude piirkondade abil.



130. Mida tähendab sümbol „ \ " ? Esita järgmised hulgad sümboli ∪ abil.

a) $\mathbb{R} \setminus \{4\}$ b) $\mathbb{R} \setminus [-2; 5]$ c) $\mathbb{R} \setminus \{1; 2; 3\}$ d) $[-2; 13] \setminus [5; 7]$

131. Leia järgmiste reaalarvude piirkondade ühend ja ühisosa.

a) $X =]-\infty; 7[$ ja $Y =]3; 7[$ b) $X = \mathbb{R}$ ja $Y = \varnothing$

c) $X =]4; 7[$ ja $Y = [4; 7]$ d) $X =]4; 7]$ ja $Y = [4; 7[$

132. Kanna järgmised reaalarvude piirkonnad arvteljele ja leia nende piirkondade ühend ja ühisosa.

a) $X =]-7; 13[\cup]13; \infty[$ ja $Y = [-8; 6[\cup]7; 11[$

b) $X = \{x \mid x < 3 \vee x \geq 3\}$ ja $Y = \{x \mid x \geq 0\}$

c) $X = \{x \mid x^2 - 2x - 3 = 0\}$ ja $Y = \mathbb{R}$

d) $X = \mathbb{R} \setminus]3; 7[$ ja $Y = \mathbb{R} \setminus [5; 8]$

e) $X =]-3; \infty[\cup]5; 11[$ ja $Y =]7; 8[\cup]6; 13]$

133. Ühe kolmnurga kaks külge on 6 ja 13, teise kolmnurga kaks külge on 7 ja 21. Kui pikk võib olla lõik, mis sobiks mõlemale kolmnurgale kolmandaks küljeks?

1.7. REAALARVU ABSOLUUTVÄÄRTUS

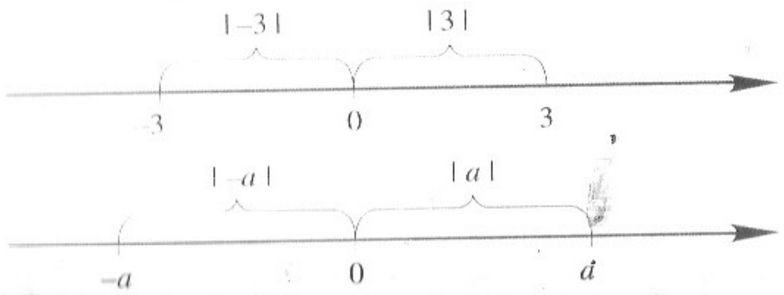
Reaalarvu a absoluutväärtseks (mooduliks) $|a|$ nimetakse arvu a, kui $a \geq 0$ ja arvu a vastandväärtust $-a$, kui $a < 0$.

Sümbolites: $|a| = \begin{cases} a, \text{ kui } a \geq 0; \\ -a, \text{ kui } a < 0. \end{cases}$

Näited: $|5| = 5$; $|-7| = 7$; $|0| = 0$.

Reaalarvu absoluutväärtusel on lihtne geomeetriline sisu. Võtame suvaliselt kaks reaalarvu a ja b. **Absoluutväärtus $|a - b|$ on võrdne arvtelje punktide a ja b vahelise kaugusega.**

Erijuhul kui $b = 0$, näeme, et punkti a kaugus nullpunktist on $|a|$. Võime öelda, et reaalarvu absoluutväärtus $|a|$ tähendab punkti a kaugust nullpunktist.



Lihtne on tõestada, et kehtivad järgmised omadused:

1. Arvu absoluutväärtus on mittenegatiivne, s.t. $|a| \geq 0$.

2. Vastandarvude absoluutväärtused on võrdsed, s.t. $|-a| = |a|$.

Tõestame, et omadused 1 ja 2 kehtivad.

1. Kui $a \geq 0$, siis $|a| = a \geq 0$. Kui aga $a < 0$, siis $|a| = -a > 0$. Seega suvalise a väärtuse korral $|a| \geq 0$.

2. Kui $a > 0$, siis $-a < 0$ ja $|-a| = -(-a) = a = |a|$.
Kui aga $a \leq 0$, siis $-a \geq 0$ ja $|-a| = -a = |a|$.

3. Arvu absoluutväärtus pole arvust väiksem, s.t. $|a| \geq a$.

4. Arvu absoluutväärtus pole väiksem antud arvu vastandarvust, s.t. $|a| \geq -a$.

Lisaks eespool toodutele kehtivad järgmised omadused:

5. $||a| - |b|| \leq |a + b| \leq |a| + |b|$.

6. $||a| - |b|| \leq |a - b| \leq |a| + |b|$.

7. Absoluutväärtus korrutisest on võrdne tegurite absoluutväärtuste korrutisega, s.t. $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$.

8. Absoluutväärtus jagatisest on võrdne jagatava ja jagaja absoluutväärtuste jagatisega, s.t. $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$, kui $b \neq 0$.

Anna arvudele a ja b suvalised väärtused ja kontrolli, kas omadused 5 — 8 kehtivad nende arvude korral. Kui kehtivad, kas siis võime väita, et sellega on nende omaduste paikapidavus tõestatud?

Teades mingit arvu, saame leida tema absoluutväärtuse. Aga vastupidi?

Näide: Leiame x, kui 1) $|x| = 5$; 2) $|x| = 0$; 3) $|x| = -4$; 4) $|x - 2| = 5$.

1. $|x| = 5$

kui $x \leq 0$, siis	kui $x \geq 0$, siis
$\lvert x\rvert = -x$.	$\lvert x\rvert = x$.
$-x = 5$	$x = 5$
$x = -5$	

Võrrandi lahendid on -5 ja 5.

2. Kui $|x| = 0$, siis ilmselt $x = 0$.

3. Kui $|x| = -4$, siis tekib vastuolu esimese omadusega. Sellist x-i väärtust ei ole.

4. Kui $|x - 2| = 5$, siis on jällegi kaks võimalust:

kui $x - 2 < 0$, siis	kui $x - 2 \geq 0$, siis
$\lvert x - 2\rvert = 2 - x$,	$\lvert x - 2\rvert = x - 2$,
seega $2 - x = 5$ ehk	seega $x - 2 = 5$ ehk
$x = -3$	$x = 7$

Võrrandi lahendid on -3 ja 7.

134. Lahenda võrrand.

a) $|x| = 3$ b) $|x| = -7$ c) $|x| = 0$ d) $|x| = \pi$
e) $|-x| = 4$ f) $|x-2| = 4$ g) $|x+3| = 0$ h) $|3-x| = 2$

135. Kontrolli, kas järgmised väited on alati tõesed, erijuhul tõesed või alati väärad.

a) kui $a < b$, siis $|a| < |b|$ b) kui $a > b$, siis $|a| > |b|$
c) $a + b < |a + b|$ d) $a + b \leqslant |a + b|$ e) $|a + b| \leqslant |a| + |b|$
f) $|a + b| = |a| + |b|$ g) $|a - b| = |a| - |b|$ h) $|a - b| \leqslant |a| - |b|$

136. Missuguseid tingimusi peab rahuldama reaalarv a selleks, et

a) $|a| + a = 2a$ b) $|a| + a = 0$ c) $-|a| = |-a|$

137. Kas võrdusest $|a| = |b|$ järeldub, et $a = b$? Too näiteid.

138. Lihtsusta avaldis juhul, kui $a = 0$, $a > 0$, $a < 0$.

a) $a + |a|$ b) $a - |a|$ c) $\frac{|a|}{a}$ d) $|a - 1|$ e) $|a^2 - 1|$

139. Tõesta, et $|x + y| + |x - y| = 2M$, kus $x, y \in \mathbb{R}$ ja M on arvudest x ja y suurem.

140. Uuri, mida teeb järgmine arvutiprogramm:

```
10 INPUT"ANNA POSITIIVSED ARVUD A JA B ";A,B
20 S=(A+B+ABS(A-B))/2
30 PRINT"SUURIM ON ";S
```

Muuda programmi 20-ndat rida nii, et ta leiaks kahest etteantud arvust vähima.

141. Tõesta, et kui $x, y \in \mathbb{R}$, siis $|x + y| + |x - y| = |x + \sqrt{x^2 - y^2}| + |x - \sqrt{x^2 - y^2}|$. Kas võrdus kehtib ka juhul, kui $|x| < |y|$?

1.8. KÜSIMUSI JA ÜLESANDEID KORDAMISEKS

142. Leia järgmiste arvude suurim ühistegur ja vähim ühiskordne.

a) 168 ja 576 b) 336; 432; ja 756 c) 125; 400; 500 ja 750

143. Leia arv, millest 3,6% on

$$\frac{3 + 4{,}2 : 0{,}1}{\left(1 : 0{,}3 - 2\frac{1}{3}\right) \cdot 0{,}3125}$$

144. Teisenda kümnendmurd harilikuks murruks.

a) 0,(63) b) 0,(243) c) 0,5(19) d) 1,(007) e) $-2{,}9(4)$

145. Teisenda harilik murd kümnendmurruks.

a) $\frac{7}{8}$ b) $\frac{5}{13}$ c) $\frac{2}{9}$ d) $\frac{8}{11}$ e) $\frac{3}{13}$ f) $\frac{55}{99}$ g) $\frac{337}{999}$

146. Arvuta.

a) $0{,}(2) + 0{,}(37)$ b) $0{,}(73) - 0{,}(487)$ c) $\frac{0{,}125 + 0{,}(125)}{0{,}75 + 0{,}(75)}$

d) $\frac{0{,}725 + 0{,}6 + 0{,}175 + 0{,}42(6) + 0{,}12(3)}{0{,}128 \cdot 6{,}25 - (0{,}0345 : 0{,}12)}$

147. Kuidas otsustada, kumb kahest positiivsest ratsionaalarvust $\frac{a}{b}$ ja $\frac{c}{d}$ on suurem (väiksem)?

148. Järjesta kasvavalt $\frac{7}{13}$; $0{,}(47)$; π; $\frac{21}{7}$; 1,4142; $\sqrt{2}$; $\sqrt{10}$.

149. Missugused tehted on arvuga 0 teostatavad, missugused mitte? Tõesta näidete abil, et irratsionaalarvude hulk $\mathbb{I}$ ei ole kinnine korrutamistehte suhtes.

150. Kuubi serv on 4 cm. Leia kuubi diagonaali pikkus, täispindala ja ruumala. Kas kõik saadud tulemused on ratsionaalarvud?

151. Selgita, miks me ei kasuta praktilises elus mõõtmistulemusena irratsionaalarvu ja asendame selle tema mingi kümnendlähendiga.

152. Tõesta, et arvud $\sqrt{11}$ ja $\sqrt{26}$ on irratsionaalarvud.

153. Leia järgmiste lausete seast väärad laused ja paranda vead.

a) $\mathbb{N} \cup \{0\} = \mathbb{Z}^-$ b) $\mathbb{N} \cup \{0\} \cup \mathbb{Z}^- = \mathbb{Z}^+$ c) $\mathbb{R} \setminus \mathbb{I} = \mathbb{Q}$
d) $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} = \mathbb{R}$ e) $\mathbb{Q} \cap \mathbb{I} = \varnothing$ f) $(\mathbb{R} \cap \mathbb{Z}) \cap \mathbb{N} = \mathbb{Z}$

154. Esita järgmised hulgad arvteljel.

a) $L = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant 3\} \cap \{x \in \mathbb{R} \mid x > -1\}$
b) $M = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leqslant x < 3\} \cup \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant x < 4\}$
c) $K = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 \leqslant x < 0\} \cap \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 2\}$

155. Leia hulkade ühend ja ühisosa.

a) $X =]3; 7[$ ja $Y = \mathbb{R}$ b) $X = [-4; 21[$ ja $Y =]3; 7[$
c) $X =]-\infty; 6[$ ja $Y =]7; 8[$ d) $X =]-\infty; 3[$ ja $Y =]3; 6[$
e) $X = \varnothing$ ja $Y = \mathbb{R}$ f) $X = [3; 8]$ ja $Y =]3; 8[$

156. Kontrolltöös ei lahendanud 12% õpilastest ühtki ülesannet, 32% lahendas osa ülesandeid ja ülejäänud 14 õpilast lahendasid kõik ülesanded. Mitu õpilast oli klassis?

157. Kapsas sisaldab 90% vett. Leia vee hulk kapsastes, mis kogutakse ristkülikukujuliselt põllult laiusega 60 m ja pikkusega 500 m, kui keskmine saak hektarilt on 150 tonni.

158. Defineeri reaalarvu absoluutväärtuse mõiste. Mida näitab reaalarvu absoluutväärtus geomeetriliselt?

159. Lahenda võrrand.

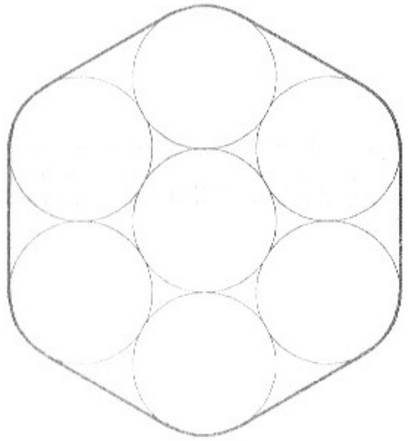
a) $|x| = 10$ b) $-|x-3| = 9$ c) $|x-2| = 3$ d) $|1-x^2| = 0$
e) $|x-1| = |1-x|$ f) $|x-1| + |x-2| = 0$ g) $|x-2| = -|x-2|$

160. Kas koordinaattasandil leidub vähemalt üks selline punkt, mille kaugus punktidest $A(2; 2)$, $B(-2; 3)$ ja $C(0; -4)$ oleks vähem kui 2 ühikut? Jaatava vastuse korral leia vähemalt ühe sellise punkti koordinaadid. Kuidas seda ülesannet kõige lihtsamalt lahendada?

161. Võrdle murdude A ja B suurust, kui $A = \frac{5678901234}{6789012345}$ ja $B = \frac{5678901235}{6789012347}$.

162. Triinu pidi korrutama kaks kolmekohalist arvu ja tulemuse jagama viiekohalise arvuga. Ta ei märganud korrutusmärki ja luges kõrvutiseisvad arvud üheks kuuekohaliseks arvuks, mistõttu saadud täisarvuline jagatis osutus kolm korda suuremaks tõelisest. Leia kõik kolm arvu.

163. Seitse võrdse raadiusega ringi on joonisel näidatud viisil piiratud joonega. Leia tekkinud kujundi ümbermõõt ja pindala, kui ringide raadius on r.



164. 10 toru, läbimõõduga 52 cm, on asetatud virna nii, et alumises reas on 4 toru, järgmises 3, siis 2 ning lõpuks 1 toru. Kui kõrge on see torude virn?

165. On teada, et $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \ldots = \frac{a_n}{b_n} = k$. Tõesta, et $\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{b_1 + b_2 + \ldots + b_n} = k$.

166. Leia kuus järjestikust paarisarvu, mille ruutude summa on arv, mille moodustavad neli ühesugust numbrit.

Lisaks põhikursusele

1.9. ARVUSÜSTEEMID

1.9.1. AJALOOLISI MÄRKMEID. POSITSIOONILISED JA MITTEPOSITSIOONILISED ARVUSÜSTEEMID

Kümnendsüsteemi eelised pole matemaatilised, vaid zooloogilised. Kui meie kätel oleks kümne sõrme asemel kaheksa sõrme, siis inimkond kasutaks kaheksandsüsteemi.

N. N. Luzin (1883 – 1950)

Arve nullist üheksani oleme harjunud tähistama spetsiaalsete märkidega: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Kõigi arvude jaoks eraldi sümboleid kasutada ei oleks mõistlik ega võimalikki (näiteks arvude ühest tuhandeni märkimiseks oleks vaja meeles pidada 1000 erinevat sümbolit). Loendamisel võib aga piirduda üheainsa sümboliga, näiteks kriipsuga.

See, juba kiviajal tuntud märkimisviis (tegu on sisuliselt ühendsüsteemiga) on aga olulise puudusega suuremate arvude kirjapanek ja kontroll muutub tülikaks.

Arvude üleskirjutus tuleb lühike ning samal ajal kergesti meeldejääv ja üheselt mõistetav, kui arve grupeerida. Näiteks meie kümnendsüsteemis tehakse seda kümne kaupa. Samas tuleb võtta kasutusele teatud tähised ja märkimiskokkulepped nende gruppide jaoks. Seda kõike tehakse arvusüsteemide abil.

Arvusüsteemiks e. numeratsioonisüsteemiks nimetatakse võtete kogu, mis võimaldab arve ühesel viisil nimetada ja tähistada.

Et inimese ühel käel on viis sõrme, kahel käel kokku kümme ja kakskümmend kokku koos mõlema jala varvastega, siis on inimene arvutanud viie, kümne ja kahekümne kaupa. Laialt on kasutatud veel kaheteistkümnendsüsteemi (ühes jalas on 12 tolli, ööpäevas 2×12 tundi), kaheksandsüsteemi (ühes bussèlis on 8 gallonit, ühes gallonis 8 pinti), kuuendsüsteemi (mõned vanad rahaühikud), kolmendsüsteemi (ühes süllas on 3 arssinat, ühes jardis 3 jalga).

Kümnendsüsteemi ja rahvusvahelise mõõtühikute süsteemi (*SI — System International*) leviku laienemise tõttu on osa neist mõõtühikutest jäämas ajalukku. Arvutusoskust kolmend-, kuuend-, kaheksand- ja kaheteistkümnendsüsteemides läheb tänapäeval vaja vähem kui mõni sajand tagasi.

Kuuekümnendsüsteemi (minutid ja sekundid nii aja arvutamisel kui ka nurkade mõõtmisel), samuti kuueteistkümnend- ja kahendsüsteemi (mõlemat kasutatakse elektronarvutites), kasutatakse ilmselt ka tulevikus.

ROOMA NUMERATSIOONISÜSTEEMIST

Rooma numbrite märkimisel tähistatakse arve ladina tähestiku suurte tähtedega, kusjuures olulised on järgmised, nn. *võtmearvud*:

1 tähistakse I,
5 tähistakse V,
10 tähistakse X,
50 tähistakse L,
100 tähistakse C,
500 tähistakse D,
1000 tähistakse M.

Tähed C, D ja M arvude tähistena on neid arve tähistavate ladinakeelsete sõnade algustähed (Centum = 100, Demimille = 500, Mille = 1000).

Kasutades neid märke, kirjutame välja arvud ühest kümneni:

I, II, III, IV, V, VI, VII, VIII, IX, X

Paneme tähele, et kui suurem arv on väiksema ees, siis need arvud liidetakse (VI = 5 + 1, VII = 5 + 1 + 1, VIII = 5 + 1 + 1 + 1).

Kui aga suurem arv on väiksema järel, siis väiksem arv lahutatakse suuremast (IV = 5 − 1, IX = 10 − 1). Viimast reeglit kasutatakse ainult selleks, et mitte kirjutada järjest nelja ühesugust sümbolit.

Samad põhimõtted kehtivad ka kümnest suuremate arvude korral. Kahes alljärgnevas reas olgu mõned arvud kümnendsüsteemis ja samad arvud rooma numbrisüsteemis[1]:

40	72	94	113	909	1994
XL	LXXII	XCIV	CXIII	CMIX	MCMXCIV

[1] Rooma numbrisüsteemi arve nimetame edaspidi *rooma arvudeks*.

Et rooma arvudega arvutamine on üldiselt ebamugav, siis kasutatakse kaasajal neid ennekõike seal, kus pole vaja teha tehteid (näit. raamatu peatükkide nummerdamisel, sajandite, aastaarvude ja kuude märkimisel).

Meil igapäevaelus kasutatavas araabia numeratsioonisüsteemis sõltub iga numbri tähendus sellest kohast arvus, millele see number on kirjutatud.

Näiteks arvus 373 tähendab esimene number kolme sajalist ja viimane kolme ühelist.

Rooma arvude korral numbri tähendus ei sõltu tema asukohast arvus. Näiteks 373 on rooma arvuna CCCLXXIII. Siin tähendab iga C täht ikka ja alati sadat, iga X kümmet, ja iga I ühte, sõltumata sellest, millisel kohal ta arvus paikneb.

Arvusüsteemi, milles numbri väärtus ei sõltu selle numbri asukohast arvus, nimetatakse mittepositsiooniliseks arvusüsteemiks. Arvusüsteemi, milles numbri väärtus sõltub selle numbri asukohast arvus, nimetatakse positsiooniliseks arvusüsteemiks.

Arve I, V, X, L, C, D, M, mille abil kirjutatakse kõik rooma numbrisüsteemi arvud, võib nimetada ka rooma numbrisüsteemi *baasiks*. Rooma arvud saadakse nende baasi arvude liitmise ja lahutamise teel.

Võtame näiteks arvu 3409. See arv märgitakse rooma numbrite abil nii: MMMCDIX.

MMMCDIX = M + M + M − C + D − I + X

Meie kümnendsüsteemi baasiks on arvu 10 astmed:

$q_0 = 10^0 = 1,\ q_1 = 10^1 = 10,\ q_2 = 10^2 = 100, \ldots, q_n = 10^n = 10, \ldots$

Kirjutis 3409 tähendab kümnendsüsteemis arvu

$3409 = 3 \cdot 10^3 + 4 \cdot 10^2 + 0 \cdot 10^1 + 9 \cdot 10^0$

Kõik kümnendsüsteemi arvud on saadavad arvude 0 kuni 9 korrutamisel arvu 10 sobivalt valitud astmetega (nn. järguühikutega) ja saadud korrutiste liitmise abil.

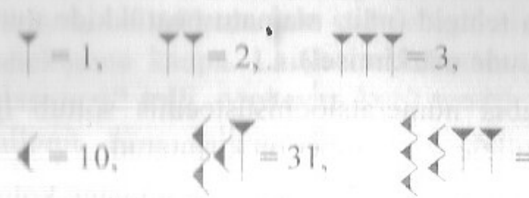
Et arvul 10 on selles süsteemis eriline koht, siis nimetatakse teda *süsteemi aluseks*.

BABÜLOONIA, MAIADE JA VANA-KREEKA (JOONIA) NUMERATSIOONISÜSTEEMIDEST

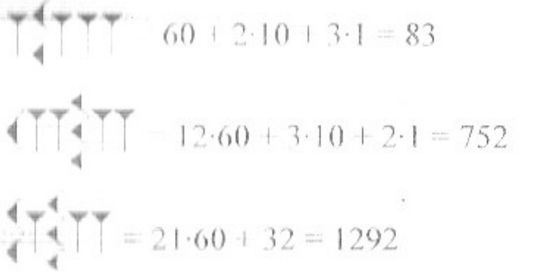
Üheks esimeseks arvestatavaks positsiooniliseks arvusüsteemiks oli *babüloonia kuuekümnend-kümnendsüsteem*.

Meieni säilinud savitahvlitel kasutati arvude kirjapanekuks kahte märki: ühelist märgiti sümboliga ▼ ja kümnelist sümboliga ◀.

Arvude 1 — 59 märkimiseks kasutati kümnendsüsteemi:



Arvu 60 tähistati sellesama märgiga, millega tähistati ühte:



Nii sai üles märkida arve 60 kuni 3599-ni. Arvu $3600 = 60^2$ (samuti kõiki järgnevaid arvu 60 astmeid) tähistati jälle märgiga . Kuigi sellist märkimisviisi kasutasid babüloonlased üle tuhande aasta, oli sellel üks oluline puudus — ta ei olnud üheselt mõistetav. Näiteks võis tähendada nii arvu 2 kui ka 61. Segaduste vältimiseks tuli lugeda arvude juures olevat teksti, mis täpsustas selle, kui suure arvuga oli tegemist.

Probleemi lahendasid babüloonlased nulli kasutuselevõtuga. See toimus hiljemalt 3. saj. e. Kr. Arvu null tähistasid babüloonlased kahe üksteise kohale vajutatud märgikesega: .

Näiteks tähendas arvu 2593292

$(12 \cdot 60^3 + 0 \cdot 60^2 + 21 \cdot 60 + 32 = 2593292)$.

Babüloonia arvusüsteemi baasiks olid arvud:

1, 10, 60, $10 \cdot 60$, 60^2, $10 \cdot 60^2$, 60^3, . . .

Babüloonia arvumärkimisviisile sarnane oli maiade tsivilisatsiooni numbrisüsteem. Maiad kasutasid viiend-kahekümnendsüsteemi. Arvu 1 tähistas punkt, arvu 5 horisontaalne jooneke.

Arvu nulli märkisid maiad spetsiaalse kujuńdiga, mis meenutas poolsuletud silma: .

Maiade arvusüsteemi baasiks olid järgmised arvud:

1, 5, 20, $18 \cdot 20$, $18 \cdot 20^2$, $18 \cdot 20^3$, $18 \cdot 20^4$, . . .

Mõned näited maia süsteemi arvudest:

$2 \cdot 20 + 0 = 40$ $19 \cdot 360 + 13 \cdot 20 + 12 = 7112$ $10 \cdot 360 + 0 \cdot 20 + 6 = 3606$.

Kreeklased kirjutasid arve ateena ja joonia viisil. Peatume põhjalikumalt joonia numeratsioonil. Numbreid 1 — 9, samuti kümneid ja sadu tähistati alfabeedi järjestikuste tähtedega. Selleks, et eristada sõnu ja arve, tehti numbrit märkiva tähe kohale katusekene või ülakoma. Näiteks:

$\alpha = 1$, $\beta = 2$, $\gamma = 3$, . . . , $\tau\mu\gamma = 343$ (sest $\tau = 300$, $\mu = 40$, $\gamma = 3$).

Kuigi selline alfabeetiline kirjaviis on lühike ja suhteliselt mugav arvutamiseks, on sel ka oluline puudus: ei saa kirjutada kuitahes suuri arve. Kreeklased olid sunnitud arve 1000, 2000, . . . , 9000 tähistama samade tähtedega mis arve 1, 2, . . . , 9. Selleks, et neid eristada, lisasid nad alakoma arvu ette:

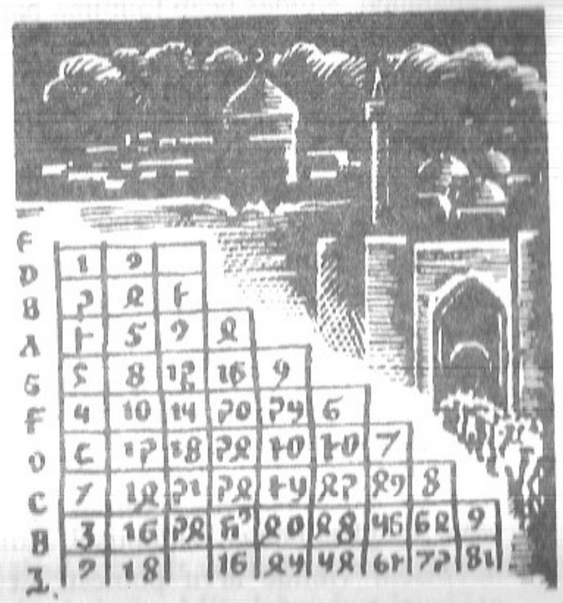
$,\alpha = 1000$; $,\beta = 2000$, ...

Arvu 10 000 tähistati järgmiselt: $\overset{\alpha}{\mathrm{M}}$ [1].

Joonia süsteemist on eeskuju võtnud vana slaavi numeratsioon, mida kasutati Venemaal kuni 18. sajandi alguseni. Näiteks arv 343 nägi slaavi numeratsioonis välja nii: ТМГ.

Babüloonia kümmend-kuuekümnendsüsteemi mõjul tekkis Indias hiljemalt 5. saj. p. Kr. kümnendsüsteem. Algselt kasutati numbreid 1 — 9. Nulli kohale jäeti tühi koht. Alles hiljem hakati seda kohta märkima punktikesega või väikese ringikesega.

Positsioonilises kümnendsüsteemis oli võimalik kirja panna kuitahes suuri arve. Arvude üleskirjutus muutus üheselt mõistetavaks ja kompaktseks. Kümnendsüsteemis oli mugav teha aritmeetilisi tehteid. Need eelised said kümnendsüsteemi laialdase leviku põhjuseks.



Araablastele tutvustas kümnendsüsteemi Muhammed ibn Musa al Horezmi (783 umbes 850).

Kõrvaloleval pildil on korrutustabel al Horezmi käsikirjast: et araablaste kaudu jõudis kümnendsüsteem 10. saj. p. Kr. Hispaaniasse, siis on kombeks numbreid 0, 1, 2, . . . , 9

[1] Kreeka sõna Μυριας (*myrias* — kümme tuhat) esitähe järgi.

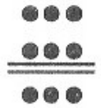
nimetada ka *araabia numbriteks*. Mujal Euroopas hakkas kümnendsüsteem levima 12. — 13. sajandil. Tuntud Itaalia matemaatik Leonardo Fibonacci kirjeldas neid oma 1202. a. avaldatud töös „Abakuse raamat" (*Liber abaci*). Kümnendsüsteem sai teaduses, tehnikas ja igapäevaelus üldkasutatavaks 16. - 17. sajandil.

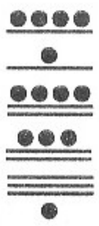
167. Sankt-Peterburgis Peeter I mälestussambal (tuntud ka „Vaskratsaniku" nime all) on aastaarv MDCCLXXXII. Mis aastal püstitati see mälestussammas?

168. Kirjuta rooma numbritega
a) oma sünniaasta;
b) käesolev aastaarv;
c) aasta, mil Kolumbus avastas Ameerika.

169. Esita toodud arvud kümnendsüsteemis:

MDCCLXXXIX





Mis juhtus neil aastatel?

170. Kõrvalolev arv on kõige suurem arv, mis on maiade tekstidest meieni jõudnud. Kui suur on see arv?

171. Miks on raske teha tehteid rooma numbritega? Proovige!

172. Pankuril on pangas 200-, 100-, 50-, 20-, 10-, 5-, 3- ja 1-kroonised rahatähed. Kuidas peab toimima pankur, kui ta tahab raha nii välja maksta, et väljaantavate rahatähtede arv oleks minimaalne? Kuidas maksta nii
a) 499 kr, b) 374 kr?
Missugune on selle nn. pankuri arvusüsteemi baas?

173. Kaupmehel on kangkaalude ja vihtide komplekt, milles on järgmised vihid: 10 g, 20 g – 2 tk., 50 g, 200 g – 2 tk., 500 g, 1 kg, 2 kg – 2 tk. ja 5 kg. Kaupmees paneb vihte ainult ühele kaalukausile. Missugune oleks „kaupmehe arvusüsteemi" baas? Miks on mõistlik hoida komplektis kahte 20-grammist, kahte 200-grammist ja kahte 2-kilogrammilist vihti?

174. Miks ükski riik ei kasuta paberrahana ainult ühelisi, kümnelisi, sajalisi ja tuhandelisi rahatähti?

175. Vihtide süsteem, mida kasutab kaupmees, on mugavam kui kümnendsüsteem kangkaaludega kaalumisel. Kuid see süsteem ei ole siiski kõige ökonoomsem vihtide arvu poolest. Et selles veenduda, lahenda järgmised ülesanded.

a) Milline hulk vihte peab olema, et kaaluda suvaline arv täiskilogramme vahemikust 1 – 30 kangkaaludel, kui vihte tohib panna ainult ühele kaalukausile? (Vihtide kaalu valik on vaba.)

b) Küsimus sama, mis a) alaülesandes, kuid vihte võib asetada mõlemale kaalukausile.

c) Samad tingimused, mis a) ja b) alaülesannetes, kuid kaaluda on vaja 1 - 1000 grammi täisgrammides.

176. Järgnev programm teisendab araabia numbrisüsteemi arve rooma numbrisüsteemi arvudeks. Käivita see programm ja katseta erinevaid arve sisestades. Kas oskad seda programmi nii täiustada, et oleks võimalik sisestada ainult naturaalarve?

```
10 PRINT"Sisesta arv araabia numbrina";:INPUT A
20 PRINT"See on arv rooma numbrisüsteemis";
30 READ A$,P
40 IF P=A THEN 90
50 IF P>A THEN 30
60 A=A-P
70 PRINT A$;
80 GOTO 40
90 PRINT A$
100 DATA M,1000,CM,900,D,500,CD,400,C,100
110 DATA XC,90,L,50,XL,40,X,10,IX,9,V,5,IV,4,I,1
120 END
```

Mida tuleks selle programmi juures muuta, et seda programmi ei peaks iga araabia numbri rooma numbriks teisendamiseks uuesti käivitama?

177. Kirjuta arvutiprogramm, mis teataks iga sisestatava rahasumma korral, millistes rahatähtedes tuleks see summa välja maksta, et maksmisel oleks vaja kasutada minimaalset arvu rahatähti.

178. Kirjuta arvutiprogramm, mis teisendab rooma numbreid araabia numbriteks.

179. Kasutusel on kaaluvihtide komplekt (1 g, 2 g, 5 g, 10 g, 20 g, 50 g, 100 g, 200 g, 500 g ja 1000 g). Vihte tohib asetada mõlemale kaalukausile. Kirjuta arvutiprogramm, mis näitaks, kuidas tuleks asetada vihid, kui me tahame kaaluda vahemikus 1 – 1000 g ja teha seda nii, et kasutatavate vihtide arv oleks minimaalne.

180. Selles, nn. liitmise ruudus on kasutatud rooma numbreid.

AB + AAA = BAA	Asenda tähed sobivalt valitud rooma numbritega, nii et võrdus kehtiks. Mitu lahendust leiad?
AA + CAA = CAB	
BA + CB = ...	

1.9.2.KÜMNENDSÜSTEEMIST JA KAHENDSÜSTEEMIST

Mõte väljendada kõik arvud mõne üksiku tähise abil, andes neile peale kujust oleneva väärtuse veel kohast oleneva väärtuse, on niivõrd lihtne, et just selle lihtsuse tõttu on raske hinnata, kui imetlusväärne ta on. Kuivõrd raske oli selleni jõuda, seda näeme kreeka teaduse suurimate geeniuste Archimedese ja Apolloniuse näidetest, kes selle mõtteni ei jõudnud.

P. S. Laplace (1749 — 1827)

Arvude kümnendsüsteemis tähendab mitmekohalises naturaalarvus ühelisi paremalt esimene number, kümnelisi paremalt teine number, sajalisi paremalt kolmas number jne. Kui me kirjutame kümnendsüsteemis arvu 325, siis see kirjaviis tähendab, et selles arvus on 3 sajalist, 2 kümnelist ja 5 ühelist. Seega

$$325 = 3\cdot100 + 2\cdot10 + 5\cdot1$$

Kasutades arvu 10 astmeid võib selle summa kirja panna nii:

$$325 = 3\cdot10^2 + 2\cdot10^1 + 5\cdot10^0$$

Analoogiliselt ülaltooduga esituvad arvud 85 287 ja 3046 järgmiselt:

$$85\,287 = 8\cdot10^4 + 5\cdot10^3 + 2\cdot10^2 + 8\cdot10^1 + 7\cdot10^0$$
$$3406 = 3\cdot10^3 + 4\cdot10^2 + 0\cdot10^1 + 6\cdot10^0$$

Positsioonilises kümnendsüsteemis esitub iga naturaalarv üheliste, kümneliste, sajaliste jne. summana.
Olgu meil naturaalarv N, mille kümnendnumbrid paremalt poolt loetuna on

$a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n-1}, a_n$. Siis

$$N = a_n10^n + a_{n-1}10^{n-1} + \ldots + a_1 10^1 + a_0 10^0$$

Siin 10 on kümnendsüsteemi alus, numbrid $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ (kümnendnumbrid) peavad olema naturaalarvud nullist üheksani.

Igapäevaelus kasutame ka kümnendmurde. Kümnendmurd tähendab *kümnendsüsteemis kirjutatud murdarvu*. Kümnendmurdude esitamiseks arvu 10 astmete kaudu kasutame ka negatiivseid täisarvulisi astendajaid.
Näiteks:

$$38{,}45 = 3\cdot10^1 + 8\cdot10^0 + 4\cdot10^{-1} + 5\cdot10^{-2}$$
$$2{,}703 = 2\cdot10^0 + 7\cdot10^{-1} + 0\cdot10^{-2} + 3\cdot10^{-3}$$

Positsioonilise kümnendsüsteemi eelistest rääkisime eelmise teema juures. Peab aga ütlema, et sellel süsteemil ei ole olulisi eeliseid positsioonilise kaheksand- või kaheteistkümnendsüsteemi ees. Lihtsamana tundub arvutamine kümnendsüsteemis seetõttu, et selles süsteemis arvutamisega oleme harjunud.

Kümme arvusüsteemi alusena on kompromisslahendus, mille korral arvude üleskirjutus ei ole eriti pikk ja korrutustabel (10×10) on meeldejätmiseks jõukohane enamikule inimkonnast.

Mida väiksema numbrite arvuga saame arvu kirja panna (mida väiksem on süsteemi alus), seda pikem on arvu esitus.

Näide: Positsioonilises viiendsüsteemis kasutatakse ainult viit numbrit (0, 1, 2, 3 ja 4). Selle teema alguses näiteks toodud kümnendsüsteemi arv 325 (märgitakse ka 325_{10} — rõhutamaks, et tegu on just kümnendsüsteemi arvuga) esitub viiendsüsteemis neljakohalise arvuna 2300 (edaspidi märgime seda 2300_5 — rõhutamaks, et tegu on viiendsüsteemi arvuga).

$$2300 = 2\cdot5^3 + 3\cdot5^2 + 0\cdot5^1 + 0\cdot5^0 = 2\cdot125 + 3\cdot25 = 325_{10}.$$

Seesama kümnendsüsteemi arv 325_{10} esituks neljakümnendsüsteemis kahekohalise arvuna 85_{40}.

$$85_{40} = 8\cdot40^1 + 5\cdot40^0 = 325_{10}.$$

Kuigi positsioonilises neljakümnendsüsteemis on arvud lühemad, on selles arvutamine ebamugav. Vaja läheb 40 erinevat märki arvude 0 — 39 jaoks; ka oleks 40×40 korrutustabeli meelespidamine tülikas.

Tänapäevastes elektronarvutites kasutatakse kahendsüsteemi, sest kahendsüsteemi tehted on lihtsad ja neid on mugav teostada elektronlülitustes.

Selleks, et kirjutada kahendsüsteemi arve, läheb vaja kahte numbrit: 0 ja 1. Kahendsüsteemi aluseks on 2, kuid seda märgitakse kujul[1] 10. Liites sellele arvule 1, saame 11, mis oleks kümnendsüsteemis arv 3. Liites kahendsüsteemi arvule 11 arvu 1, saame kahendsüsteemi arvu 100 jne.

Mõned kümnendsüsteemi arvud ja neile vastavad kahendsüsteemi arvud on toodud järgnevas tabelis:

Kümnend-süsteemi arv	Kahend-süsteemi arv	Kümnend-süsteemi arv	Kahend-süsteemi arv
1	1	13	1101
2	10	14	1110
3	11	15	1111
4	100	16	10000
5	101	17	10001
6	110	18	10010
7	111	19	10011
8	1000	20	10100
9	1001	25	11001
10	1010	50	110010
11	1011	100	1100100
12	1100	200	11001000

[1] Selline on mujale iga süsteemi aluse kirjutusviis.

Sellest tabelist näeme, et esitus kahendsüsteemis on oluliselt pikem esitusest kümnendsüsteemist. Võib öelda, et kahendsüsteemi arv on oma vastest kümnendsüsteemist umbes 3 korda pikem.

Kahendsüsteemi arvud on esitatavad arvu 2 astmete abil. Võtame näiteks kümnendsüsteemi arvu 13. See arv on kahendsüsteemis 1101. Arv 1101 esitub arvu 2 astmete abil järgmiselt:

$1101_2 = 1\cdot2^3 + 1\cdot2^2 + 0\cdot2^1 + 1\cdot2^0 = 8 + 4 + 0 + 1 = 13_{10}$.

Seda esitust kasutakse kahendarvude teisendamisel kümnendarvudeks. Leiame näiteks, mis arvud on 11101_2 ja 1101011_2 kümnendsüsteemis:

$11101_2 = 1\cdot2^4 + 1\cdot2^3 + 1\cdot2^2 + 0\cdot2^1 + 1\cdot2^0 = 16 + 8 + 4 + 0 + 1 = 29_{10}$

$1101011_2 = 1\cdot2^6 + 1\cdot2^5 + 0\cdot2^4 + 1\cdot2^3 + 0\cdot2^2 + 1\cdot2^1 + 1\cdot2^0 =$
$= 64 + 32 + 8 + 2 + 1 = 105_{10}$.

Liitmine ja korrutamine on kahendsüsteemis väga lihtsad:

liitmine: $0 + 0 = 0$; $0 + 1 = 1$; $1 + 1 = 10$ ja

korrutamine: $0\cdot0 = 0$; $0\cdot1 = 0$; $1\cdot1 = 1$.

Ehk tabeli kujul:

+	0	1
0	0	1
1	1	10

×	0	1
0	0	0
1	0	1

Mitmekohaliste arvude liitmine toimub sarnaselt liitmisele kümnendsüsteemis. Näiteks

$$\begin{array}{r} 101101_2 \\ +\ 10100_2 \\ \hline 1000001_2 \end{array}$$

Kontrollime arvutuste õigsust. Selleks esitame need liidetavad ja summa kümnendsüsteemi arvudena.
Saame:

$101101_2 = 2^5 + 2^3 + 2^2 + 2^0 = 32 + 8 + 4 + 1 = 45_{10}$

$10100_2 = 2^4 + 2^2 = 16 + 4 = 20_{10}$

$1000001_2 = 2^6 + 2^0 = 65_{10}$

Et $45_{10} + 20_{10} = 65_{10}$, siis järelikult oleme arvutanud õigesti. Mitmekohaliste kahendarvude korrutamine taandub peamiselt liitmisele, sest korrutamine nulliga annab nulli ja korrutamine ühega annab arvu enese. Leiame näiteks $11101_2\cdot1101_2$:

$$\begin{array}{rl} 11101 & \text{— esimene tegur} \\ \times\ 1101 & \text{— teine tegur} \\ \hline 11101 & \text{— esimene tegur} \\ 11101 & \text{— esimene tegur, nihutatuna 2 kohta vasakule} \\ 11101 & \text{— esimene tegur, nihutatuna 3 kohta vasakule} \\ \hline 101111001 & \text{— korrutis} \end{array}$$

Kontroll: $11101_2 = 29_{10}$, $1101_2 = 13_{10}$, $101111001_2 = 377_{10}$.
Et $13_{10}\cdot29_{10} = 377_{10}$, siis ilmselt vigu ei ole.

Lahutamise korral tuleb teada, et

$0 - 0 = 0$
$1 - 0 = 1$
$1 - 1 = 0$
$10_2 - 1 = 1$

Näiteks leiame $111010111_2 - 1100001_2$

$$\begin{array}{r} 111010111_2 \\ -\ 1100001_2 \\ \hline 101110110_2 \end{array}$$

Punktid, mis on märgitud vähendatava mõnede järkude juurde, tähistavad seda, et nende järkude „laenuks võtmisel" need järgud annavad madalamas järgus 10_2 madalama järgu ühikut.

Kontroll: $111010111_2 = 2^8 + 2^7 + 2^6 + 2^4 + 2^2 + 2^1 + 2^0 = 471_{10}$,
$1100001_2 = 2^6 + 2^5 + 2^0 = 97_{10}$, $101110110_2 = 2^8 + 2^6 + 2^5 + 2^4 + 2^2 + 2^1 = 374_{10}$.
Et $471_{10} - 97_{10} = 374_{10}$, siis ilmselt on lahendus õige.

Ka jagamine ei ole keeruline, näiteks leiame $111100_2 : 1010_2$:

$$\begin{array}{r|l} 111100_2 & 1010_2 \\ \hline -\ 1010 & 110_2 \\ \hline 1010 & \\ -\ 1010 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Kontrolli tulemust korrutamise teel.

Olgu meil mingi kümnendsüsteemi arv, näiteks 325_{10}. Kuidas seda arvu teisendada kahendsüsteemi?

Selleks jagame 325 2-ga:

325	2
2	162 (Jäägi 1 kirjutame jagatava 325 alla.)

Seejärel jagame 162 2-ga:

162	2
0	81 (Jäägi 0 kirjutame jagatava 162 alla.)

Seejärel jagame 81 2-ga:

81	2
1	40 (Jäägi kirjutame jagatava 81 alla.)

Jagades nii lõpuni, saame järgmise pildi:

325	2									
1	162	2								
	0	81	2							
		1	40	2						
			0	20	2					
				0	10	2				
					0	5	2			
						1	2	2		
							0	1	2	
								1	0	

Nüüd kirjutame välja kõik jäägid, aga teeme seda vastupidises järjekorras (alt üles), saame 101000101. See arv ongi 325_{10}. Vahel kasutatakse arvude teisendamisel kümnendsüsteemist kahendsüsteemi teist, lühemat märkimisviisi. Siis kirjutatakse ühte tulpa jagatava alla jagatised, teise tulpa jäägid, mis tekivad kahega jagamisel. Vaatame kahte näidet, leiame millega võrduvad 325_{10} ja 797_{10} kahendsüsteemis:

325	1	797	1	Kirjutame välja jäägid, aga lugedes neid alt
162	0	398	0	üles, saame:
81	1	199	1	$325_{10} = 101000101_2$
40	0	99	1	$797_{10} = 1100011101_2$
20	0	49	1	
10	0	24	0	
5	1	12	0	
2	0	6	0	
1	1	3	1	
		1	1	

Kahendsüsteemi baasiks on arvu 2 astmed, s. o. arvud

$2^0, 2^1, 2^2, 2^3, 2^4, \ldots$

Analoogiliselt kümnendmurdudega saab kasutada ka *kahendmurde*. Neid saab esitada arvu 2 negatiivse astendajaga astmete abil:

$0{,}1_2 \quad 0 \cdot 2^0 + 1 \cdot 2^{-1} = \frac{1}{2} = 0{,}5_{10}$

$0{,}01_2 \quad 0 \cdot 2^0 + 1 \cdot 2^{-2} = \frac{1}{4} = 0{,}25_{10}$

$0{,}011_2 = 0 \cdot 2^0 + 1 \cdot 2^{-2} + 1 \cdot 2^{-3} = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8} = 0{,}375_{10}$

$10{,}101_2 = 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 + 1 \cdot 2^{-1} + 0 \cdot 2^{-2} + 1 \cdot 2^{-3} = 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8} = 2\frac{5}{8} = 2{,}625_{10}.$

181. Ajakirja „Matemaatika ja Kaasaeg" 1975. a. ilmunud numbri kaanel on kahendarv 10100. Mitmes selle ajakirja number ilmus 1975. a.?

182. Missugust arvusüsteemi kasutab järgmise venekeelse luuletuse autor A. N. Starikov?

Необыкновенная девочка

Ей было тысяча сто лет.
Она в сто первый класс ходила,
В портфеле по сто книг носила
Все это правда, а не бред.

Когда, пыля десятком ног,
Она шагала по дороге,
За ней всегда бежал щенок
С одним хвостом, зато стоногий.

Она ловила каждый звук
Своими десятью ушами,
И десять загорелых рук
Портфель и поводок держали.

И десять темно-синих глаз
Рассматривали мир привычно...
Но станет все совсем обычным,
Когда поймете нас рассказ.

183. Esita järgmised kahendsüsteemi arvud kümnendsüsteemis:

a) 1100	b) 11010	c) 11011	d) 11001	e) 1000
f) 1100011	g) 11111	h) 111111	i) 1000000	j) 111
k) 0,11	l) 11,11	m) 101,011	n) 11,1	o) 0,111

184. Liida ja lahuta kahendsüsteemis. Tulemust kontrolli kümnendsüsteemis:

a) $10101_2 + 101_2$	b) $101101_2 - 111_2$	c) $10100_2 + 11110_2$
d) $111110_2 + 1011_2$	e) $10001_2 - 1100_2$	f) $10111_2 - 10011_2$

185. Korruta kahendsüsteemis. Tulemust kontrolli kümnendsüsteemis:

a) $11_2 \cdot 11_2$	b) $11_2 \cdot 100_2$	c) $11_2 \cdot 110_2$	d) $11_2 \cdot 1010_2$
e) $101_2 \cdot 101_2$	f) $101_2 \cdot 1001_2$	g) $1101_2 \cdot 11010_2$	h) $11011_2 \cdot 1011_2$

186. Jaga kahendsüsteemis. Kontrolli tulemust.

a) $11011_2 : 11_2$	b) $10100_2 : 101_2$	c) $101011111_2 : 11011_2$
d) $1100100_2 : 1010_2$	e) $1100000_2 : 1100_2$	f) $1011010_2 : 1001_2$

187. Teisenda järgmised arvud kümnendsüsteemist kahendsüsteemi:

a) 235 b) 95 c) 127 d) 256 e) 500.

188. Kirjuta kahendsüsteemis
a) oma sünniaasta
b) käesolev aastaarv
c) aasta, mil avastati Antarktika.

Enne järgmise ülesande sõnastamist esitame lõigu E. Tamme artiklist „Positsioonilised arvusüsteemid"[1]:

„Korrutamise lihtsus kahendsüsteemis viib mõttele, kas ka kümnendarvude korrutise leidmiseks pole otstarbekohane kõigepealt teisendada tegurid kahendsüsteemi, korrutada nad selles süsteemis ning teisendada tulemus tagasi kümnendsüsteemi. Seda ideed ongi osaliselt kasutatud korrutamisvõttes, mida kirjanduses nimetatakse „vene talupoja korrutamismeetodiks". Selle abil korrutise leidmiseks tuleb ainult osata liita ja kahega korrutada ning jagada, millega tulid toime ka vähese arvutamisoskusega talupojad. Märgime, et sisuliselt samal viisil korrutasid egiptlased juba umbes 4000 a. tagasi.

Tutvume vene talupoja korrutamismeetodiga näite 163·274 varal. Korrutise leidmiseks kirjutame tegurid kõrvuti. Jagame nüüd esimese teguri kahega (jättes arvestamata jäägi), teise aga korrutame kahega. Sama operatsiooni kordame seni, kuni vasakus tulbas jõuame arvuni 1. Edasi tõmbame parempoolsest tulbast maha need arvud, millele vasakus tulbas vastavad paarisarvud (s. t. mille jagamisel kahega tekkis jääk 0). Paremas tulbas allesjäänud arvude summa annabki otsitava korrutise.

163	275
81	550
40	~~1100~~
20	~~2200~~
10	~~4400~~
5	8800
2	~~1760~~
1	35200
	44825

Võtte põhjendamiseks paneme tähele, et 163 avaldub kahendsüsteemis kujul 10100011_2. Seega

$$163 = 2^7 + 2^5 + 2 + 1$$

ning

$$163 \cdot 275 = 2^7 \cdot 275 + 2^5 \cdot 275 + 2 \cdot 275 + 275 =$$
$$= 35200 + 8800 + 550 + 275 = 44852."$$

189. Leia ülalkirjeldatud meetodi abil järgmised korrutised:
a) 25·243 b) 327·142 c) 257·123 d) 130·539.

[1] Ilmus ajakirjas „Matemaatika ja Kaasaeg", nr. 4, Tartu 1964.

189. Teame, et harilikku murdu saab väljendada lõpliku kümnendmurruna, kui tema nimetaja algteguriteks ei ole teisi arve peale 2 ja 5. Missuguseid harilikke murde saab teisendada lõplikeks kahendmurdudeks?

1.9.3. KAHEKSANDSÜSTEEMIST JA KUUETEISTKÜMNENDSÜSTEEMIST

Elektronarvutite paljud osad koosnevad niisugustest elementidest, mis oma loomu poolest saavad omada ainult kahte erinevat seisundit (lüliti on avatud või suletud, elektriimpulss kas on või ei ole, magnetsüdamik kas on magneeditud või ei ole).

Kümnendsüsteemi kasutamine arvuti protsessoris oleks ebaotstarbekas. Kõik kümme numbrit tuleks kujutada arvutis erineval viisil, näiteks kümnele erinevale pingeastmele vastavate elektriimpulsside kaudu. See muudaks arvuti ehituse keerukamaks ja kallimaks. Ka oleks vigade esinemise tõenäosus suurem.

Informatsiooni sisestamisel ja väljastamisel ei ole kahendsüsteem aga kõige otstarbekam. Arvud on liiga pikad. Seetõttu kasutatakse laialdaselt ka kaheksand- ja kuueteistkümnendsüsteeme.

Kaheksandsüsteemis kasutatakse 8 numbrit (0, 1, 2, . . . , 7). Arvu 8_{10} märgitakse 10_8.

Kümnendsüsteemi arvude teisendamine kaheksandsüsteemi on sarnane teisendamisega kahendsüsteemi, erinevus on selles, et jagame 8-ga.

Teisendame 797 kaheksandsüsteemi:

797	8	
5	99	8
3	99	8
4	99	8
1	0	

ehk teisel viisil:

797	5
99	3
12	4
1	1

Kirjutades välja jäägid (alt üles), saame 1435.

Kontrolliks esitame arvu 1435_8 arvu 8 astmete abil kümnendsüsteemis

$$1435_8 = 1 \cdot 8^3 + 4 \cdot 8^2 + 3 \cdot 8^1 + 5 \cdot 8^0 = 512 + 4 \cdot 64 + 3 \cdot 8 + 5 = 797_{10}.$$

Tehted kaheksandarvudega ei erine oma algoritmi poolest tehetest kümnendsüsteemis. Paraku tuleb teada kaheksandarvude liitmis- ja korrutamistabelit:

+	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	1	2	3	4	5	6	7
1	1	2	3	4	5	6	7	10
2	2	3	4	5	6	7	10	11
3	3	4	5	6	7	10	11	12
4	4	5	6	7	10	11	12	13
5	5	6	7	10	11	12	13	14
6	6	7	10	11	12	13	14	15
7	7	10	11	12	13	14	15	16

×	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7
2	0	2	4	6	10	12	14	16
3	0	3	6	11	14	17	22	25
4	0	4	10	14	20	24	30	34
5	0	5	12	17	24	31	36	43
6	0	6	14	22	30	36	44	52
7	0	7	16	25	34	43	52	61

Toome mõned näited arvutustest kaheksandsüsteemis:

$$\begin{array}{r} 172_8 \\ +\ 57_8 \\ \hline 251_8 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 721{,}5_8 \\ -\ 135{,}21_8 \\ \hline 564{,}27_8 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 463_8 \\ \times\ 23_8 \\ \hline 1532_8 \\ 1074_8 \\ \hline 12472_8 \end{array}$$

Kõrvalolevas tabelis on kaheksandsüsteemi arvud 0 7 ja neile vastavad kahendsüsteemi arvud. Selliseid kaheksandsüsteemi arvude vasteid kolmekohaliste kahendsüsteemi arvudena nimetatakse *kahendtriaadideks*.

Kaheksandsüsteemi arv	Kahendsüsteemi arv
0	000
1	001
2	010
3	011
4	100
5	101
6	110
7	111

Kahendtriaade kasutatakse siis, kui on vaja teisendada kahendsüsteemi arve kaheksandsüsteemi või kaheksandsüsteemi arve kahendsüsteemi. Vaatame näiteid.

Olgu meil kaheksandarv 134_8. Kümnendsüsteemis oleks see arv 92_{10}, kahendsüsteemis aga 1011100_2 (kontrolli!). Jaotame selle arvu nüüd kolmenumbrilisteks gruppideks (lõpust lugedes). Saame $\underset{1}{001}\ \underset{3}{011}\ \underset{4}{100}$. Need triaadid vastavad aga kaheksandarvudele 1, 3, ja 4.

Kaheksandarv 625_8 oleks kümnendarvuna 405_{10}, kahendarvuna 110010101. Esitades selle kahendarvu triaadidena, saame $\underset{6}{110}\ \underset{2}{010}\ \underset{5}{101}$. Kirjutades välja neile triaadidele vastavad kaheksandnumbrid, saame 6, 2 ja 5.

Kui tahame teisendada kahendarvu kaheksandarvuks, siis esitame selle kahendarvu (lõpust lugedes) triaadidena ja teeme need triaadid kaheksandnumbriteks. Näiteks arvule 10110100_2 vastab triaad $010\ 110\ 100_2$ ja kaheksandarv 264_8.

Kui aga on vaja teisendada kaheksandarv kahendarvuks, siis kirjutame üksteise järel välja igale kaheksandarvule vastava triaadi. Näiteks arvule 145_8 vastab arv 001 100 101 ehk 1100101_2.

Selleks, et teisendada arve kahendsüsteemist kümnendsüsteemi ja kümnendsüsteemist kahendsüsteemi, võib kasutada ka kaheksandsüsteemi. Sel puhul on tal vahepealse üleminekusüsteemi roll.

Paljudes kaasaegsetes personaalarvutites kasutatakse kuueteistkümnendsüsteemi.

Kuueteistkümnendsüsteemis ei piisa kõigi ühekohaliste arvude märkimiseks kümnest numbrist 0 — 9. Vaja läheb 16 numbrit. Seetõttu tähistatakse numbreid 10 — 15 järjestikuste alfabeedi tähtedega:

10 = A, 11 = B, 12 = C, 13 = D, 14 = E ja 15 = F.

Arvu 16_{10} tähistatakse kuueteistkümnendsüsteemis nii: 10_{16}. Kuueteistkümnendsüsteemi baasiks on arvu 16 astmed, süsteemi aluseks on arv 16_{10}. Esitame mõned kuueteistkümnendsüsteemi arvud kümnendsüsteemis:

$$7CA = 7\cdot16^2 + 12\cdot16^1 + 10\cdot16^0 = 7\cdot256 + 192 + 10 = 1994$$
$$2F0B = 2\cdot16^3 + 15\cdot16^2 + 0\cdot16^1 + 11\cdot16^0 = 8192 + 3840 + 11 = 12043$$
$$AB{,}C = 10\cdot16^1 + 11 + 12\cdot16^{-1} = 160 + 11 + \frac{3}{4} = 171{,}75.$$

191. Pane kirja kõige suurem kahekohaline, kolmekohaline, neljakohaline kuueteistkümnendarv. Esita see arv kümnendarvuna.

192. Hobuse passi oli muude tundemärkide seas kirjutatud kõrgus — kaks arssinat ja kolm verssokit. Kui kõrge oli see hobune, kui on teada, et üks verssok = 4,45 cm ja ühes arssinas on 16 verssokit?

193. Paljudes programmeerimiskeeltes kasutatakse maksimaalse täisarvu mõistet (näit. reanumber BASIC-us ei saa olla sellest arvust suurem). Mõnedes BASIC-u versioonides on selleks arvuks FFFF kuueteistkümnendsüsteemis, mõnedes 77777 kaheksandsüsteemis. Esita need arvud kahendsüsteemis ja kümnendsüsteemis. Uuri välja, missugune on sinule kättesaadavates arvutites kõige suurem reanumber, mida saab kasutada BASIC-us.

194. Koosta liitmis- ja korrutamistabelid kolmendsüsteemi ja kuueteistkümnendsüsteemi jaoks.

195. Millistes arvusüsteemides kehtivad võrdused
a) 2·2 = 11; b) 1 : 2 = 0,2; c) 10 + 10 = 100?

196. Kuidas määrata kindlaks, kas arv on paarisarv või paaritu arv
a) kahendsüsteemis; b) kolmendsüsteemis; c) *n*-ndsüsteemis?

197. Milliseid harilikke murde saab *n*-ndsüsteemis esitada lõplike kümnendmurdudena?

198. Asenda tähed numbritega. Arvusüsteem peaks selguma ülesande välisest kujust.

ÜKS
KAKS
+ KAKS
NELI
KÜMME

199. Üks magnetketas maksab 1,05$, karp selliseid kettaid (12 tk.) maksab 10,25$. Kast (tosin karpi) maksab 114$. Kirjuta arvutiprogramm, mis ütleks arvutifirmale, kes tahab osta *n* magnetketast, mitu kasti, karpi ja üksikut ketast tuleks osta.

200. Järgmine programm võimaldab teisendada arve ühest arvusüsteemist teise. Seda ainult juhul, kui süsteemi alus ei ole suurem kümnest.

```
10 INPUT "Mitmendsüsteemist";K
20 INPUT "Mitmendsüsteemi";L
30 INPUT "Sisesta arv";A
40 U=A MOD 10
50 N=N+U*K^W
60 W=W+1
70 A=A\10
80 IF A>0 GOTO 40
90 B$=STR$(N MOD L)+B$
100 N=N\L
110 IF N>0 GOTO 90
120 PRINT B$
130 END
```

Programmi tööpõhimõttest. Sisestatav arv A teisendatakse ridades 40 – 80 kõigepealt kümnendsüsteemi, nii saadakse see arv kümnendsüsteemi arvuna N. Ridades 90 – 110 teisendatakse arv N kümnendsüsteemist L-ndsüsteemi. Programmi lühiduse huvides esitatakse vastus tekstimuutuja B$ abil.

Proovi selle programmi abil luua kaks uut lühemat programmi, millest üks teisendaks arve K-ndsüsteemist kümnendsüsteemi, teine aga kümnendsüsteemi arve L-ndsüsteemi.

Raskem ülesanne: Kirjuta programm, mis töötaks korralikult ka siis, kui süsteemide alused on vahemikus kümnest kuueteistkümneni.

II peatükk. ASTME MÕISTE ÜLDISTAMINE

KORDAMINE

2.1. NATURAALARVULISE ASTENDAJAGA ASTE

Naturaalarvulise astendajaga aste a^n, kus $a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, on n võrdse teguri a korrutis:

$$a^n = a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a.$$

(n korda)

Näited:

$3^4 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81$,

$\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$,

$(-2)^2 = (-2) \cdot (-2) = 4$.

Juhul kui $n = 1$, ei saa me enam kõnelda korrutisest ning seetõttu defineeritakse täiendavalt $a^1 = a$.

Varemõpitust on teada, et astmetega tehteid sooritades saab kasutada järgmisi seoseid (m ja n on naturaalarvud).

1. Võrdsete alustega astmete korrutamisel astendajad liidetakse:

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$.

2. Võrdsete alustega astmete jagamisel astendajad lahutatakse:

$a^m : a^n = a^{m-n}$, kui $m > n$.

3. Korrutise aste võrdub tegurite astmete korrutisega:

$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$.

4. Jagatise aste võrdub jagatava ja jagaja astmete jagatisega:

$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$, kui $b \neq 0$.

5. Astme astendamisel astendajad korrutatakse:

$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$.

Kokku võttes esitame sõnastatud eeskirjad tabelina:

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ $\quad a^m : a^n = a^{m-n}$ $\quad (a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$ $\quad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$ $\quad (a^m)^n = a^{m \cdot n}$

Näited:

1) $2^4 \cdot 2^6 = 2^{10}$;
2) $7^5 : 7^2 = 7^3$;
3) $(x+y)^7 : (x+y)^3 = (x+y)^4$, kui $x + y \neq 0$;
4) $(x^2 \cdot y^3)^3 = x^6 \cdot y^9$;
5) $\left(\frac{5}{4}\right)^3 = \frac{5^3}{4^3}$;
6) $\left(-\frac{1}{3}x^2y^4z\right)^3 = -\frac{1}{27}x^6y^{12}z^3$.

201. Arvuta peast.

a) 5^3 b) $(-5)^3$ c) $(-5)^4$ d) $-(-5)^4$
e) 3^4 f) -3^4 g) $(-3)^4$ h) $-(-3)^4$
i) 2^5 j) -2^5 k) $(-2)^5$ l) $-(-2)^5$

202. Arvuta võimalikult lihtsalt.

a) $(3 \cdot 4)^2$ b) $-3 \cdot 4^2$ c) $(-3 \cdot 5)^2$ d) $(2 \cdot 10)^5$
e) $(-6 \cdot 0{,}5)^3$ f) $-6 \cdot 0{,}5^3$ g) $(6 \cdot 0{,}5)^3$ h) $(-20)^4$
i) $2^5 \cdot 5^5$ j) $4^4 \cdot 5^5$ k) $4^6 \cdot 0{,}5^4$ l) $(5^3)^2$
m) $\left(\frac{3}{5}\right)^3$ n) $\left(1\frac{1}{4}\right)^4$ o) $\left(-1\frac{1}{4}\right)^4$ p) $-\left(-\frac{1}{4}\right)^4$

203. Kumb antud astmetest on suurem?

a) 8^5 või 16^3 b) 2^{300} või 3^{200} c) 4^{100} või 32^{50}
d) 81^{95} või 9^{200} e) $(-3)^{12}$ või 27^6 f) 27^3 või 3^9

204. Lihtsusta avaldis.

a) $x \cdot x^2 \cdot x^3$ b) $n^4 \cdot (-n)^6$ c) $c^{2a} \cdot c^{2a-1} \cdot c^{1-3a}$
d) $3p^7 \cdot (3p)^7$ e) $9n^3 \cdot \left(\frac{1}{3}nx^2\right)^3$ f) $a^{2m+3} \cdot c^{3+2m}$

205. Näita, et kehtib valem $(10a+5)^2 = a(a+1) \cdot 100 + 25$.

206. Kasutades eelmises ülesandes antud valemit, arvuta.

a) 15^2 b) 25^2 c) $3{,}5^2$ d) $0{,}45^2$
e) 55^2 f) 95^2 g) $6{,}5^2$ h) $0{,}15^2$

207. Lihtsusta avaldis.

a) $\frac{2^m \cdot 3^{n-1} - 2^{m-1} \cdot 3^n}{2^m \cdot 3^n}$ b) $\frac{5 \cdot 2^{n-2} + 10 \cdot 2^{n-1}}{10^{n+2}}$

208. Lihtsusta avaldis.

$(2+1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)(2^{16}+1)(2^{32}+1)(2^{64}+1)$

209. Tõesta, et

a) $(ax+by)^2 + (ay-bx)^2 = (a^2+b^2)(x^2+y^2)$
b) $(ax+by+cz)^2 + (ay-bx)^2 + (bz-cy)^2 + (cx-az)^2 = (a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)$.

210. Tõesta, et kehtivad valemid

a) $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$;
b) $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$;
c) $(a+b+c+d)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2(ab+ac+ad+bc+bd)$.

Kuidas saab näidata nende valemite kehtivust graafiliselt?

2.2. TÄISARVULISE ASTENDAJAGA ASTE

Eelmises paragrahvis vaatlesime astet a kui astendaja $n \in \mathbb{N}$ ja $a \in \mathbb{R}$. Vaatleme nüüd juhtumeid, kui astendaja $n = 0$ või $n < 0$.

Aste a^n.

Ühe ja sama alusega astmete korrutamise ja jagamise eeskirjad väljenduvad valemitega

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$; $a^m : a^n = a^{m-n}$, kui $m > n$.

Neil valemitel on oluline erinevus. Kui esimene valem kehtib mistahes naturaalarvulise astendaja m ja n korral, siis teine valem kehtib vaid juhul kui $m > n$. Vaatleme nüüd juhtumit, kui $m = n$. Võrdsete alustega astmete jagamise reegli järgi saame, et

$a^m : a^m = a^0$.

Avaldisel a^0 ei ole senise astme definitsiooni kohaselt mõtet, sest korrutises ei saa olla 0 tegurit. Avaldisele a^0 mõtte andmiseks peame astme mõistet avardama. Et $a^m : a^m = 1$ $(a \neq 0)$, siis saame: *iga nullist erinev arv astmes 0 võrdub 1.*

> Juhul kui $a \neq 0$, siis $a^0 = 1$.

Näide $12^0 = 1$; $1^0 = 1$; $0{,}234^0 = 1$; $(-3)^0 = 1$; $3^0 = 1$.

Märkus: Sümbolile 0^0 arvu tähendust ei omistata.

Näitame nüüd, et astendamise põhivalemid kehtivad ka juhul, kui üks astendajatest on null ja teine mistahes naturaalarv.

Kontrollime valemi $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ kehtivust, kui $m \geq 1$ ja $n = 0$. Näitame, et tõestatava valemi mõlemad pooled teisenevad üheks ja samaks avaldiseks.

Vasak pool: $a^m \cdot a^n = a^m \cdot a^0 = a^m \cdot 1 = a^m$.
Parem pool: $a^{m+n} = a^{m+0} = a^m$.

Et $a^m = a^m$, siis valem $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ antud tingimustel kehtib. Analoogiliselt võib kontrollida ülejäänud valemite kehtivust.

Negatiivse astendajaga aste.

Et võrdsete alustega astmete jagamise eeskiri oleks alati rakendatav, peame veel vaatlema juhtumit, kui $m < n$. Siis $a^m : a^n = a^{m-n}$, kus $m - n < 0$. Saame *negatiivse astendajaga astme*.

Negatiivse astendajaga astmel ei ole astme senise definitsiooni kohaselt tähendust, sest korrutises ei saa olla negatiivne arv tegureid. Järelikult peame ka nüüd astme mõistet laiendama. Negatiivse astendajaga astme defineerime nii:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}, \text{ kus } a \in \mathbb{R},\ a \neq 0,\ n \in \mathbb{N}$$

Näited: a) $5^{-2} = \frac{1}{5^2} = \frac{1}{25}$;

b) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-3} = \frac{1}{\left(\frac{2}{3}\right)^3} = \frac{1}{\frac{8}{27}} = \frac{27}{8} = 3\frac{3}{8}$;

c) $0{,}6^{-2} = \frac{1}{0{,}6^2} = \frac{1}{0{,}36} = \frac{1}{\frac{36}{100}} = \frac{100}{36} = \frac{25}{9} = 2\frac{7}{9}$.

On võimalik tõestada, et nii defineeritud negatiivse astendajaga astendamise puhul jäävad astendamise põhivalemid kehtima.

Näitame, et valem $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$ kehtib, kui $m < 0$ ja $n < 0$. Tähistame $m = -p$, kus $p \in \mathbb{N}$ ja $n = -q$, kus $q \in \mathbb{N}$. Näitame, et tõestatava valemi mõlemad pooled teisenevad üheks ja samaks avaldiseks.

Vasak pool: $(a^m)^n = (a^{-p})^{-q} = \left(\frac{1}{a^p}\right)^{-q} = \frac{1}{\left(\frac{1}{a^p}\right)^q} = \frac{1}{\frac{1}{a^{pq}}} = \underline{a^{pq}}$

Parem pool: $a^{m \cdot n} = a^{(-p)(-q)} = \underline{a^{pq}}$.

Seega valem kehtib.

Kokkuvõte: Kui astendajaks on täisarv, siis aste a^n on määratud järgmiselt:

$$a^n = \begin{cases} \underbrace{a \cdot a \ldots a}_{n \text{ tegurit}}, \text{ kui } n \geq 2; \\ a, \text{ kui } n = 1; \\ 1, \text{ kui } n = 0 \text{ ja } a \neq 0; \\ \frac{1}{a^{-n}}, \text{ kui } n < 0 \text{ ja } a \neq 0; \\ \text{pole määratud, kui } n = 0 \text{ ja } a = 0; \\ \text{väärtus puudub, kui } n < 0 \text{ ja } a = 0. \end{cases}$$

Näited: 1) $2^5 \cdot 2^{-8} = 2^{5+(-8)} = 2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$;

2) $a^{-3} : b^{-3} = \left(\frac{a}{b}\right)^{-3} = \left(\frac{b}{a}\right)^3$;

3) $7^{-2} : 7^{-3} = 7^{-2-(-3)} = 7^1 = 7$;

4) $[(-5)^3]^{-2} = (-5)^{3 \cdot (-2)} = (-5)^{-6} = \frac{1}{(-5)^6} = \frac{1}{15625} = 0{,}000064$.

211. Leia 20% arvust $\left\{\left[\left(\frac{5}{6}\right)^0 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{-1}\right]^2 + \left[\left(\frac{3}{4}\right)^{-1} \cdot 4\frac{1}{7}\right]^0\right\}^5$.

212. Arvuta.

a) $(10)^0 \cdot (7^0)^{11}$ b) $(12{,}3^2 - 1{,}23^2)^0$

c) $5^0 + 5^1 + 5^{-1}$ d) $11^2 - 21^1 - 31^0$

e) $\left[\left(2\frac{1}{2} - 3\frac{1}{4}\right)^2 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{-2}\right]^0$ f) $3^{-1} + 2^{-1} + 1^{-1}$

213. Esita positiivse astendajaga astme abil.

a) 7^{-3} b) k^{-2} c) k^{-k} d) $\frac{1}{7^{-3}}$ e) $\frac{1}{k^{-2}}$ f) $\frac{1}{k^{-k}}$

Kas saadud tulemused jäävad samaks, kui $k = 0$? Miks?

214. Esita murrujoont kasutamata (võimaluse korral peast).

a) $\frac{1}{6}$ b) $\frac{1}{x^2}$ c) $\frac{3}{3^{-3}}$

d) $\frac{10}{21}$ e) $-\frac{a}{b^3}$ f) $\frac{1}{256}$

g) $\frac{18a^2b^3c^4}{27a^3b^4c^5}$ h) $\frac{132u^3v^4}{144r^2v^5}$ i) $\frac{1024f^2g^3}{256h^2f^7}$

215. Lihtsusta avaldis.

a) $\frac{(a^3 - b^2)^2}{(a+b)^2}$ b) $\frac{(a-b)^{-2}}{(a^2-b^2)^{-1}}$ c) $\frac{x^{-2n-4}}{x^{2n+4}}$

216. Astenda.

a) $\left(\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}y^5\right)^2$ b) $\left(\frac{2}{5}a^3 + \frac{5}{7}b^2\right)^2$ c) $\left(4x^2 - \frac{1}{3}y^3\right)^2$

d) $\left(2k^3n - 5m^2p^4\right)^2$ e) $\left(0{,}4x^4 - \frac{1}{5}y^{11}\right)^2$ f) $\left(\frac{2x^2y}{u} - 1\right)^2$

217. Näita, et astendamise põhivalemid 1 — 3 kehtivad, kui mõlemad astendajad on negatiivsed täisarvud.

218. Tõesta astendamise põhivalemite kehtivus, kui üks astendaja on null ja teine negatiivne täisarv.

219. Leia x väärtus.

a) $\left(\frac{2}{3}\right)^x = 1$ b) $23^x = 0$ c) $6^x = \frac{1}{6}$ d) $\left(\frac{2}{3}\right)^x = 1{,}5$

e) $(-2)^x = -0{,}125$ f) $-3{,}4^x = 16$ g) $\frac{1^x}{4} = 16$ h) $0{,}5^x = 8$

2.3. ARVU 10 ASTMED

Varasemast on teada, et iga naturaalarvu saab esitada arvu 10 astmete summana, näiteks:

$234 = 2\cdot100 + 3\cdot10 + 4\cdot1 = 2\cdot10^2 + 3\cdot10^1 + 4\cdot10^0$ ning

$10004 = 1\cdot10000 + 0\cdot1000 + 0\cdot100 + 0\cdot10 + 4\cdot1 =$
$= 1\cdot10^4 + 0\cdot10^3 + 0\cdot10^2 + 0\cdot10^1 + 4\cdot10^0.$

Maa mass on 6 000 000 000 000 000 000 000 000 kg ehk $6\cdot10^{24}$ kg, valgus levib ühes sekundis 300 000 km ehk $3\cdot10^5$ km.

Arvu ülesmärkimist arvu 10 astmete kaudu kasutatakse väga sageli füüsikas, keemias, astronoomias jne. Praktikas tuleb tihti ette olukordi, kus on otstarbekas esitada kümnendmurrud arvu 10 astmete kaudu.

Näited: a) $0{,}1 = \frac{1}{10} = 10^{-1}$; b) $0{,}001 = \frac{1}{1000} = 10^{-3}$;

c) $23{,}456 = 2\cdot10^1 + 3\cdot10^0 + 4\cdot10^{-1} + 5\cdot10^{-2} + 6\cdot10^{-3}$.

Vesiniku aatomi läbimõõt on 0,00000001 cm = 10^{-8} cm, ühe tähe trükkimiseks kulub trükivärvi 0,000000001 kg = 10^{-9} kg jne.

Selleks, et olemasolevaid andmeid lühidalt ja arusaadavalt esitada, kasutatakse mõõtühikute kümnendeesliiteid.

Eesliide	Tähis	Kordsus
eksa-	E	10^{18}
peta-	P	10^{15}
tera-	T	10^{12}
giga-	G	10^9
mega-	M	10^6
kilo-	k	10^3
hekto-	h	10^2
deka-	da	10
detsi-	d	10^{-1}
senti-	c	10^{-2}
milli-	m	10^{-3}
mikro-	μ	10^{-6}
nano-	n	10^{-9}
piko-	p	10^{-12}
femto-	f	10^{-15}
ato-	a	10^{-18}

Näited:

1. Balti soojuselektrijaama võimsus on 1624 MW. Avalda see võimsus kilovattides, vattides. Mitu hõõglampi võimsusega 200 W suudab see jaam toita?

   Lahendus: 1624 MW = $1624\cdot10^6$ W =
   = 1624000 kW = 1624000000 W.

   $$\text{Lampide arv} = \frac{\text{jaama võimsus}}{\text{lambi võimsus}},$$

   $$n = \frac{1624000000\ \text{W}}{200\ \text{W}} = 8120000.$$

2. Vesiniku aatomi mass on $1{,}65\cdot10^{-24}$ g. Mitu tonni see on?

   Lahendus: Et 1 g = $\frac{1}{1000}$ kg, siis
   $1{,}65\cdot10^{-24}$ g = $1{,}65\cdot10^{-30}$ t.

220. Avalda oma pikkus sentimeetrites, mikromeetrites, kilomeetrites. Avalda oma mass grammides, tonnides, tsentnerites.

221. Juuksekarv kasvab ööpäevas keskmiselt 0,3 mm ja tema läbimõõt on 0,08 mm. Avalda need andmed meetrites.

222. Avalda arvu 10 astmete kaudu.

a) 432; 1009; 23456; 1; 10000001;
b) 0,32; 0,00004; 0,65432; 0,1001.

223. Kasutades arvu 10 astmeid, avalda

a) 3,4 km meetrites; b) 0,25 g kilogrammides;
c) 2,4 cm^2 ruutmeetrites; d) 23 dm^3 kuupmeetrites;
e) 12 m kilomeetrites; f) 12 s tundides;
g) 43 m^3 kuupsentimeetrites; h) 12 m^2 hektarites.

224. Arvuta.

a) $2^{-1}\cdot2^3$ b) $5\cdot6^9\cdot6^{-7}$
c) $5^{10}\cdot5^{-12}$ d) $3^7\cdot3^{-8}\cdot3$
e) $10^{-8} : 10^{-7}$ f) $8^{-7} : 8^8$
g) $(3{,}8\cdot10^6)\cdot(1{,}5\cdot10^{-3})$ h) $(1{,}25\cdot10^{10})\cdot(8\cdot10^{-12})$
i) $(4{,}7\cdot10^8)\cdot(6{,}2\cdot10^{-5})$ j) $(7{,}5\cdot10^{-15})\cdot(5{,}4\cdot10^{17})$
k) $(5{,}6\cdot10^{-9}) : (3{,}5\cdot10^{-11})$ l) $(1{,}7\cdot10^5) : (6{,}8\cdot10^6)$

225. Kasutades teatmeteoseid (ENEKE, EE jt.) leia:

- Maa keskmine kaugus Päikesest (meetrites);
- Eesti Soojuselektrijaama võimsus (vattides);
- elementaarlaengu suurus (kulonites);
- San-Marino pindala (hektarites);
- ühe mooli ideaalse gaasi ruumala (kuupmeetrites);
- Avogadro arv;
- ühe valgusaasta pikkus (kilomeetrites).

2.4. KORDAMISÜLESANDED

Järgnevate ülesannete lahendamiseks tuleta meelde tehted astmetega. Mida tähendab naturaalarvulise astendajaga aste? Millega võrdub a^0, kui $a \neq 0$ (kui $a = 0$)? Mida tähendab a^1? Kuidas defineeritakse aste, kui astendaja on negatiivne täisarv?

226. Kas järgmised võrdused on õiged? Kui jah, siis missugustel tingimustel?

a) $(a^m)^n = (a^n)^m$ b) $n^k = k^n$
c) $(a^m)^n = a^{m+n}$ d) $(a+b)^n = a^n + b^n$

227. Arvuta.

a) $(2^3)^2$ b) $(2^2)^3$ c) $(-3^3)^2$

d) $(-3^2)^3$ e) $(4^2)^3$ f) 2^{2^3}

g) 2^{3^2} h) $(3^3-2^3)^5$ i) $(3^3-2^2)^2$

228. Kaugus Maast Päikeseni on ligikaudu $1{,}5\cdot10^{13}$ cm. Avalda see kaugus kilomeetrites. Kui palju kulub valgusel aega Päikeselt Maale jõudmiseks?

229. Mitu korda on $3{,}6\cdot10^{18}$ suurem arvust $1{,}2\cdot10^{15}$?

230. Lihtsusta.

a) $1{,}8a^3b\cdot1{,}2a^3b^2$ b) $(-0{,}23a^5y^2)\cdot0{,}27a^2x$

c) $9{,}5x^ky^{n-2}z\cdot0{,}9^3y^2z$ d) $1\frac{1}{3}a^{m+n}b^2c^4\cdot1\frac{1}{2}a^{2n}b^mc$

231. Lihtsusta.

a) $2x^5yz^3:(-\frac{2}{3}x^3z^2)$ b) $a^{2m+1}b^5:0{,}1a^m$

c) $0{,}6a^3b^nx^7:0{,}2ab^{n-2}x^5$ d) $(-\frac{4}{5}a^2b^{k+1}c^{10}):2\frac{2}{5}b^{k-1}c^2$

232. Astenda.

a) $\left(a^2+\frac{b}{a}\right)^2$ b) $\left(\frac{a}{b}-\frac{b}{a}\right)^2$ c) $(2x^5+5y^m)^2$ d) $\left(\frac{m^x}{2}-\frac{n}{3}\right)^2$

233. Millega võrdub avaldise $(x^4-x^3)^0$ väärtus?

234. Kumb on suurem?

a) 7^0 või $(-7^0)^2$ b) $\left(\frac{1}{2}\right)^2$ või $\left(\frac{1}{2}\right)^0$ c) $(-2)^2$ või 2^0

d) $(-2)^5$ või $(-2)^0$ e) 5^0 või -5^0 f) -3^2 või $(-3)^2$

235. Kas järgmised võrdused kehtivad, kui $n\in\mathbb{N}$ ja $m=0$?

a) $2^n\cdot2^m=2^{n+m}$ b) $(3^n)^m=3^{n\cdot m}$

236. Arvuta. a) 10^{-1}; 1^{-7}; $\left(\frac{2}{3}\right)^2$; $\left(1\frac{2}{3}\right)^{-4}$; $(0{,}3)^{-2}$; $\left(\frac{1}{12}\right)^{-1}$; $0{,}1^{-2}$

b) $(-5)^{-2}$; $(-1)^{-5}$; $\left(-\frac{1}{3}\right)^{-1}$; $\left(-2\frac{1}{2}\right)^{-3}$; -4^{-3}; $-0{,}25^{-2}$.

237. Esita järgmised avaldised nii, et nad ei sisaldaks negatiivse astendajaga astmeid.

a) $2a^{-2}b$ b) $3x^{-1}y^{-2}$ c) $\frac{5^{-1}m^2n^{-1}}{2a^2}$

d) $\frac{(a+b)^{-1}x^3}{a(a-b)}$ e) $\frac{2a^2}{b^{-1}x^{-3}}$ f) $\frac{a-x}{(a+x)^{-1}b^{-2}}$

238. Esita astmena ilma murrujooneta.

239. Esita ilma murrujooneta.

a) $\frac{3}{a^3b}$ b) $\frac{a}{(a+b)^2}$ c) $\frac{3x}{x-3}$ d) $\frac{ab^5}{2(a-b)^2}$

e) $\frac{a+b}{a-b}$ f) $\frac{a+b}{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}}$ g) $\frac{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$ h) $\frac{\left(\frac{1}{x^3}+x\right)^2}{\left(\frac{1}{y}-\frac{1}{y^4}\right)^3}$

240. Lihtsusta avaldis.

a) $(a^2-a+1-a^{-1}+a^{-2})\cdot a^{-2}$

b) $(1-a^{-1}-a^{-2}-a^{-3}):a^{-3}$ c) $(a^{-1}-b^{-1})\cdot(a^{-1}+b^{-1})$

d) $(a^{-5}-b^{-5})\cdot(a^{-5}+b^{-5})$ e) $(a^{-4}+a^{-2}b^{-2}+b^{-4})\cdot a^4b^4$

241. Leia avaldise täpne väärtus.

a) $\frac{2^3\cdot2^{-1}+5^{-3}\cdot5^4}{10^{-3}:10^{-2}-(0{,}25)^0}$ b) $\frac{3^{-1}:9^2-(3^{-2})^3}{(-27)^{-2}}$

c) $\frac{2:4^{-2}+(3^{-2})^3\cdot\left(\frac{1}{9}\right)^3}{5^{-1}\cdot25^2+(0{,}7)^0\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}}$

242. Esimesel korral vähendati kauba hinda 30%, teisel korral 20% võrra. Mitme protsendi võrra vähenes summaarselt kauba hind?

243. Mitme protsendi võrra suureneb 100 $ eest saadava kauba hulk, kui kauba hind alaneb 20% võrra?

244. Kui arvust lahutada kõigepealt 10% temast enesest, siis 25% saadud jäägist ja seejärel veel 20% viimasest jäägist, jääb järele 27. Leia esialgne arv.

245. Esimene arv on teisest 25% väiksem. Mitme protsendi võrra on teine arv esimesest suurem?

246. Arvuta.

a) $\frac{1}{20}+\frac{1}{30}+\frac{1}{42}+\frac{1}{56}+\frac{1}{72}+\frac{1}{90}+\frac{1}{110}+\frac{1}{132}$

b) $\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4}+\frac{1}{4\cdot5}+\ldots+\frac{1}{9\cdot10}$

247. Missuguse alusega arvusüsteemides kehtivad võrdused?

a) $12+13=30$ b) $2\cdot3=12$ c) $30:2=14$

d) $2+4=10$ e) $6\cdot6=51$ f) $30:2=12$

g) $17+38=54$ h) $12\cdot12=144$ i) $1520:12=123$

j) $89+69=103$ k) $12\cdot7=80$ l) $55:13=4$

248. Näita, et iga naturaalarv on esitatav arvu 2 astmete summana.

249. Kas arv, mille numbrite summa on 1994, saab olla mingi arvu täisruut?

250. Kumb on suurem, kas

$$\frac{10^{1993}+1}{10^{1994}+1} \quad \text{või} \quad \frac{10^{1994}+1}{10^{1995}+1} \ ?$$

251. Näita, et iga naturaalarvu ruut kas jagub 3-ga või tekib 3-ga jagamisel jääk 1.

252. Näita, et naturaalarvu kuup võib lõppeda numbriga 0, 1, 2, 3, 4, . . . , 9.

Tõesta, et kui naturaalarvu kuup lõppeb numbriga n, siis arv ise lõppeb numbriga n või $10-n$.

2.5. JUURE MÕISTE

Varasemast on teada, et liitmist ja lahutamist nimetatakse teineteise pöördtehteks. Tõepoolest, kui mingile arvule a liita arv b ning tulemusest jällegi lahutada arv b, siis lõpptulemuseks saame arvu a:

$(a+b)-b=a$

või tehete järjekorda muutes:

$(a-b)+b=a$

Samuti on korrutamine ja jagamine teineteise pöördtehted, sest

$(a\cdot b):b=a$ (eeldusel, et $b\neq 0$) ning

$(a:b)\cdot b=a$.

Vaatame nüüd, missugune tehe on astendamise pöördtehteks.

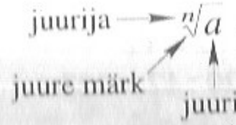
Juure mõiste

Vaatleme astet a^n, kusjuures $n\in\mathbb{N}$ ja $n>1$. Astme a^n ja astendaja n põhjal astme aluse leidmist nimetatakse **juurimiseks**. Juurimine on seega astendamise üks pöördtehe (kuid mitte ainus).

Etteantud arvu n korral tähendab juurimistehe vastavalt arvule a niisuguse arvu b leidmist, mille korral $b^n=a$.

Juurimistehte tulemuse märkimiseks kasutatakse sümbolit $\sqrt[n]{a}$, mida nimetatakse **n-nda astme juureks arvust a (või n-ndaks juureks arvust a)**. Arvu n nimetatakse seejuures juurijaks ja arvu a juuritavaks.

Juure definitsioonist nähtub, et kui $\sqrt[n]{a}=b$, siis $b^n=a$. Asendame viimasesse võrdusesse b asemele $\sqrt[n]{a}$, saame $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n=a$.



Juhul kui juurija $n=2$, siis jätame juurija kirjutamata ja kasutame sümbolit $\sqrt{a}$ ning loeme: *ruutjuur arvust a*. Kui juurija $n=3$, siis nimetatakse juurt $\sqrt[3]{a}$ *arvu*

Vaatleme nüüd eraldi juhtumeid, kui a) juurija on paarisarv ja b) juurija on paaritu arv.

a) Kui juurija on paarisarv, siis peab juuritav arv olema mittenegatiivne. Tõepoolest, meile senituntud arvuhulkades pole sellist arvu, mis paarisarvulises astmes on negatiivne. Tekib veel teinegi probleem. Vastavalt juure definitsioonile saame, et $\sqrt{4}=2$, sest $2^2=4$. Kuid ka $(-2)^2=4$, seega võime kirjutada, et $\sqrt{4}=-2$. Selleks, et juur oleks üheselt mõistetav, lepitakse kokku järgnevas:

kui juurija n on paarisarv, siis $a\geq 0$ korral $\sqrt[n]{a}$ tähendab niisugust positiivset arvu, mille n-es aste on a.

Seega $\sqrt{9}=3$, $\sqrt[4]{16}=2$, kuid $\sqrt[4]{16}\neq -2$.

b) *Paarituarvulise juurijaga juur on sama märgiga, mis juuritav.*

Näited: $\sqrt[3]{64}=4$, sest $4^3=64$; $\sqrt[5]{-32}=-2$, sest $(-2)^5=-32$.

253. Leia järgmised juured ning kontrolli vastust astendamise teel.

a) $\sqrt{4}$ b) $\sqrt[5]{32}$ c) $\sqrt[4]{625}$ d) $\sqrt[3]{0{,}343}$

e) $\sqrt[4]{4096}$ f) $\sqrt[3]{-0{,}01024}$ g) $\sqrt{-25}$ h) $\sqrt{0}$

Missugune antud juurtest ei oma reaalarvulist väärtust?

254. Leia kaks järjestikust naturaalarvu, mille vahel asetseb juure väärtus.

a) $\sqrt{20}$ b) $\sqrt[3]{80}$ c) $\sqrt[4]{125}$ d) $\sqrt[3]{7^2}$ e) $\sqrt{7^3}$

255. Missuguste reaalarvuliste x-de korral on avaldisel $\sqrt[n]{x}$ mõte, kui $x\in\mathbb{N}$ ja $n=1$? Uuri juhtumeid, kui n on paarisarv, kui n on paaritu arv.

256. Määra kindlaks, missugused järgmistest juurtest avalduvad reaalarvuna.

a) $\sqrt[3]{27}$ b) $\sqrt{-8}$ c) $\sqrt[3]{-5}$ d) $\sqrt[4]{-1}$ e) $\sqrt[19]{0}$

f) $\sqrt{x}$, kui $x<0$ g) $\sqrt[4]{x}$, kui $x<0$.

257. Missuguste reaalarvuliste x korral kehtib võrdus $(\sqrt[n]{x})^n=x$, kui $n\in\mathbb{N}$ ja $n>1$?

258. Leia.

a) $\left(\sqrt[4]{a^2}\right)^4$ b) $(\sqrt{2x})^2$ c) $\left(\sqrt[5]{x^3y^4}\right)^5$ d) $\left(\sqrt[11]{5a^2mn^7}\right)^{11}$

259. Leia.

a) $\sqrt{25}$ b) $\sqrt[3]{64}$ c) $\sqrt[3]{64}$ d) $\sqrt[4]{81}$ e) $\sqrt[5]{8}$

f) $\sqrt{(-4)^2}$ g) $\sqrt{(-7)^4}$ h) $\sqrt{(-3)^6}$ i) $\sqrt{(-4)}$ j) $\sqrt{(1-\sqrt{2})^2}$

k) $\sqrt{(2-\sqrt{3})^2}$ l) $\sqrt{a^2}$ m) $\sqrt{(-a)^2}$ n) $\sqrt[4]{(-a)^4}$ o) $\sqrt[4]{a^4}$

260. Avalda.

a) $\sqrt{(a-2)^2}$, kui $a\leq 2$ b) $\sqrt{(2-a)^2}$, kui $a\geq 2$

c) $\sqrt{(a-b)^2}$, kui $a>b$ d) $\sqrt{(a-b)^2}$, kui $a<b$

261. Millega võrdub ruutjuur arvust 12345678987654321?

2.6. KUIDAS LEIDA JUURE VÄÄRTUST ILMA ARVUTITA? KUIDAS SEDA TEHA ARVUTIL?

Taskuarvutil ei valmista antud arvust ruutjuure leidmine erilist raskust. Probleemid tekivad siis, kui arv on nii suur, et seda pole võimalik arvutisse sisestada. Uurime, kuidas saab juure väärtust leida arvuti abita.

Kõigepealt jätame meelde mõningad astmed ja juured.

1. Arvude 1 — 30 ruudud

$1^2 = 1$	$11^2 = 121$	$21^2 = 441$
$2^2 = 4$	$12^2 = 144$	$22^2 = 484$
$3^2 = 9$	$13^2 = 169$	$23^2 = 529$
$4^2 = 16$	$14^2 = 196$	$24^2 = 576$
$5^2 = 25$	$15^2 = 225$	$25^2 = 625$
$6^2 = 36$	$16^2 = 256$	$26^2 = 676$
$7^2 = 49$	$17^2 = 289$	$27^2 = 729$
$8^2 = 64$	$18^2 = 324$	$28^2 = 784$
$9^2 = 81$	$19^2 = 361$	$29^2 = 841$
$10^2 = 100$	$20^2 = 400$	$30^2 = 900$

Kasutades kõrvalolevat tabelit, selgita:

1. Missuguse numbriga saab lõppeda arvu ruut?

2. Kui arv lõppeb 5-ga, siis missuguste numbritega lõpeb tema ruut?

3. Arv lõpeb numbriga 7, kas ruutjuur sellest arvust saab olla naturaalarv?

Teades peast mõningate arvude ruute, on võimalik lihtsalt leida ruutjuure väärtust.

Näide: Leida peast ruutjuur arvudest 4900; 36100; 360000; 0,64; 0,000256.

Varasemast on meile tuntud valemid: $\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$, kui $a \geq 0$ ja $b \geq 0$ ning $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$, kui $a \geq 0$ ja $b > 0$.

Kasutades neid valemeid saame:

$\sqrt{4900} = \sqrt{49 \cdot 100} = \sqrt{49} \cdot \sqrt{100} = 7 \cdot 10 = 70$;

$\sqrt{36100} = \sqrt{361} \cdot \sqrt{100} = 19 \cdot 10 = 190$;

$\sqrt{360000} = \sqrt{36} \cdot \sqrt{10000} = 6 \cdot 100 = 600$;

$\sqrt{0{,}64} = \sqrt{\frac{64}{100}} = \frac{8}{10} = 0{,}8$;

$\sqrt{0{,}000256} = \sqrt{\frac{256}{1000000}} = \frac{16}{1000} = 0{,}016$.

2. Arvude 1 — 10 kuubid

$1^3 = 1$	$6^3 = 216$
$2^3 = 8$	$7^3 = 343$
$3^3 = 27$	$8^3 = 512$
$4^3 = 64$	$9^3 = 729$
$5^3 = 125$	$10^3 = 1000$

Praktikas on kasulik teada mõningate arvude kuupe.

1. Selgita, missuguse numbriga saab lõppeda arvu kuup.

2. Selgita, kas kehtivad eelmises näites esitatud valemitega analoogilised valemid kuupjuure korral. Selleks arvuta kuupjuur arvudest 8000; 0,343 ja 64000 ning kontrolli tulemust järgneva näite eeskujul.

Näited: Leiame kuupjuure arvudest 27000 ja 0,008 ning kontrollime tulemust vastuse kuupi tõstmise teel.

$\sqrt[3]{27000} = \sqrt[3]{27} \cdot \sqrt[3]{1000} = 3 \cdot 10 = 30$.

Kontrolli, kas $30^3 = 27000$.

Analoogiliselt $\sqrt[3]{0{,}008} = \sqrt[3]{\frac{8}{1000}} = \frac{2}{10} = 0{,}2$ ning lihtne arvutus näitab, et $0{,}2^3 = 0{,}008$.

Uurime, et tahame kindlaks teha, kas ruutjuur arvust N on täisarv või mitte. Kuidas seda kontrollida? Osutub, et seda on üsna lihtne teha. Selleks lahutame arvu N algarvuliste tegurite korrutiseks ja vaatame, mitu korda mingi tegur esineb. Juhul kui kõik tegurid esinevad paarisarv kordi, siis on ruutjuur täisarvuline, vastasel juhul mitte.

Näited: Selgitame, kas arvud 86436 ja 1728 on täisarvude ruudud. Lahutame arvu 86436 teguriteks, saame

86436	2
43218	2
21609	3
7203	3
2401	7
343	7
49	7
7	7
1	

Saime, et $86436 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 7^4$.

Seega $\sqrt{86436} = \sqrt{2^2 \cdot 3^2 \cdot 7^4} = 2 \cdot 3 \cdot 7^2 = 294$.

Analoogiliselt lahutame teguriteks 1728 ja saame, et $1728 = 2^6 \cdot 3^3$. Seega arv 1728 ei ole täisarvu ruut.

Kontrolli, kas 1728 on täisarvu kuup.

Vaatleme veel ühte võimalust kuupjuure leidmiseks.

Näide: Leiame kuupjuure arvust 2744.

On ilmne, et arvu 2744 korral kehtivad võrratused

$10 = \sqrt[3]{1000} < \sqrt[3]{2744} < \sqrt[3]{8000} = 20$.

Kasutades varemõpitut võime öelda, et ainus sobiv arv on 14. Kontrolli kas esitatud väide on tõene.

163. Ruudukujulise maatüki pindala on 144 m^2. Kui pikk on maatüki külg?

163. Kuubikujulise paagi ruumala on 343 dm^3. Kui pikk on paagi serv?

164. Mitu numbrit sisaldab ruutjuur arvudest

265. Leia kuupjuure väärtus arvutit ja tabeleid kasutamata.
3375; 9261; 1728; 39304.

266. Kontrolli, kas antud arvud on täisarvu ruudud.
14700; 99225; 42875; 5909761.

267. Leia peast ruutjuur järgmistest arvudest:
0,25; 0,0036; 1210000; 62500; 14 400 000 000.

268. Leia peast kuupjuur järgmistest arvudest:
64000; 8 000 000; 0,000 064; 0,027.

Nagu näha, saab lihtsamatel juhtudel juure väärtust leida ilma arvutita. Isegi siis, kui juure väärtus ei ole täisarv, on üsna lihtne kindlaks määrata seda, missuguste järjestikuste täisarvude vahel otsitav juure väärtus asetseb. Paratamatult tekib küsimus: kuidas saab leida näiteks ruutjuure väärtust antud arvust mingi etteantud täpsusega. Eeskirju, mis seda võimaldavad, on palju. Vaatleme ühte sellist eeskirja, mida mõnikord nimetatakse ka *Heroni meetodiks*.

Selleks, et arvutada ruutjuurt arvust a, toimime järgmiselt:

1. Oletame, et $\sqrt{a} \approx x_0$.

2. Hakkame nüüd leidma $\sqrt{a}$ järjest täpsemaid väärtusi, kasutades selleks valemeid:

$$x_1 = \frac{1}{2}\left(x_0 + \frac{a}{x_0}\right)$$

$$x_2 = \frac{1}{2}\left(x_1 + \frac{a}{x_1}\right)$$

. . . . . .

$$x_n = \frac{1}{2}\left(x_{n-1} + \frac{a}{x_{n-1}}\right).$$

Leiame selle meetodiga selle meetodiga $\sqrt{5}$ väärtuse pärast teist sammu, kui esialgseks lähendiks võtame $x_0 = 2$. Sel juhul

$$x_1 = \frac{1}{2}\left(2 + \frac{5}{2}\right) = 2{,}25 \text{ ning}$$

$$x_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{9}{4} + \frac{20}{9}\right) = 2{,}23611\ldots .$$

Saadud täpsus on piisav selleks, et tulemust edaspidistes arvutustes kasutada. Juhul, kui me oleme valinud lähendiks näiteks arvu 100, siis teisel sammul me veel sellist täpsust ei saavuta. Vajaliku täpsuse saavutamiseks tuleb teha veel mõned sammud.

269. Leia $\sqrt{5}$, võttes lähendiks $x_0 = 100$. Missuguse tulemuse saad viiendal sammul?

Kõik eespool toodud võtted võimaldavad juure väärtust leida, kuid tänapäeval omavad nad siiski vaid ajaloolist ja mitte rakenduslikku väärtust. Arvutustehnika areng on viinud selleni, et üha harvemini kasutatakse matemaatilisi tabeleid ja mehaanilisi arvutusvahendeid.

Praktiliste arvutuste tegemisel kasutame enamasti siiski taskuarvutit või personaalarvutit. Kasutatavad taskuarvutid on väga erinevad. Lihtsamad neist võimaldavad sooritada vaid nelja aritmeetika põhitehet, leida protsente ja üldjuhul ka ruutjuurt. Selliseid arvuteid praktilises arvutustöös pole mõistlik kasutada, sest nende võimalused on üsnagi piiratud. Niinimetatud „inseneriarvutitest" on küllalt suurte võimalustega mikrokalkulaatorid MK-51 ja MK-71 (mõlemad mudelid on toodetud endises N. Liidus). Kuna praegusel ajal on praktikas kasutusel väga erinevad arvutitüübid, siis pole võimalik anda üldisi eeskirju, kuidas arvuti abil sooritada tehteid astmete ja juurtega. Selleks tutvu oma arvuti juhendiga, kus on näidatud see, mismoodi neid tehteid teha tuleb. Vaatleme vaid mõningaid näiteid selle kohta, kuidas leida juuri ja astmeid arvuti MK-51 abil.

▪ **Ruutjuure** leidmiseks on klahv $\boxed{\sqrt{\ }}$. Sisestame 59 $\boxed{\sqrt{\ }}$, tabloole saame 7.61577311. Praktikas me niisugust täpsust loomulikult ei vaja, ning seetõttu tuleb otsustada, missugused kohad peale koma säilitame ning missugustest loobume.

▪ **Kuupjuure** leidmiseks arvust 64 vajutame klahvidele 64 $\boxed{\text{F}}$ $\boxed{\sqrt[x]{y}}$ 3 $\boxed{=}$ ning tulemuseks saame 4.

▪ Selleks, et leida näiteks $\sqrt[6]{64}$, vajutame klahvidele 64 $\boxed{\text{F}}$ $\boxed{\sqrt[x]{y}}$ 6 $\boxed{=}$ ning tulemuseks saame 2.

Märkus: Taskuarvuti MK-51 ei võimalda leida juurt negatiivsest arvust. Teame, et $\sqrt[3]{-32} = -2$. Kui rakendaksime eelmises näites toodud arvutusskeemi, siis lõpptulemusena ilmub ekraanile sümbol E, mis tähendab seda, et arvuti antud tehet ei suuda sooritada.

▪ **Astendamisel** on mitu võimalust. Antud arvu ruutu tõstmiseks on klahv $\boxed{x^2}$. Arvu 25 ruutu tõstmiseks teeme nii: 25 $\boxed{\text{F}}$ $\boxed{x^2}$ ning tulemuseks saame 625.

Kui tahame leida 7^8, siis vajutame 7 $\boxed{y^x}$ 8 $\boxed{\ }$ ning tulemuseks saame 5764801.

Negatiivse astendajaga astme leidmiseks tuleb kasutada täiendavalt klahvi $\boxed{+/-}$.

Näiteks 2^{-1} leidmiseks vajutame 2 $\boxed{y^x}$ 1 $\boxed{+/-}$ $\boxed{=}$ ning tulemuseks saame 0,5. Mõningatel arvutitel seeriast MK-51 on klahvi $\boxed{+/-}$ asemel klahv $\boxed{/-/}$.

Arvu 10 astmete sisestamiseks kasutame klahvi [EXP], arvu $4\cdot10^7$ sisestamiseks tuleb vajutada 4 [EXP] 7, negatiivse astendaja korral kasutame jällegi klahvi [+/−], näiteks $4\cdot10^{-7}$ sisestamiseks vajutame 4 [EXP] 7 [+/−]. Ka siin võib olla mõningaid erinevusi. Mõningatel arvutitel puudub klahv [EXP], selle asemel on [ВП].

+ Juurte või astmete väärtusi saab leida ka personaalarvuti abil. Erinevates programmeerimiskeeltes on astmete ja juurte leidmise eeskirjad erinevad. Võtame aluseks BASIC-keele.

+ **Astendamise** võib lihtsamatel juhtudel asendada korrutamisega. Näiteks programmirida

```
10 PRINT 5*5;7*7*7;9*9*9*9
```

annab pärast RUN-käsku arvu 5 ruudu, arvu 7 kuubi ja arvu 9 neljanda astme. Kui tegureid on palju, siis kasutame sümbolit ^, näiteks arvutustehe $4{,}5\cdot34^5$ tuleks programmireana kirjutada nii:

```
10 PRINT 4.5*34^5
```

Sümbolit ^ peamegi üldjuhul kasutama siis, kui astendaja ei ole naturaalarv. Arvu 10 astmed sisestame arvutisse sümboli E abil (tavalise täpsuse korral) ja D (topelttäpsuse korral). Ruutjuur leitakse operaatori SQR abil.

Järgnevalt on toodud lihtne programm, mis arvutab mõningaid astmeid, missuguseid nimelt, seda uuri juba iseseisvalt.

```
10 REM AADU ARVUTAB ASTMEID
20 PRINT 2*2*2;2^3
30 PRINT 4^7;4^(-7)
40 PRINT 2E3;-4E-2
50 PRINT SQR(64);SQR(SQR(16))
60 END
```

2.7. JUURTE OMADUSED. TEHTED JUURTEGA

Punktis 2.5 defineerisime juure mõiste. Nüüd uurime juurte omadusi.

Reaalarvude hulgas $\mathbb{R}$ kehtivad järgmised omadused.

1. Igal positiivsel arvul a on parajasti üks n-es juur.

2. Negatiivsel arvul ei ole paarisarvulise juurijaga juurt.

Näited: Reaalarvude hulgas $\mathbb{R}$ ei saa leida $\sqrt{-2}$; $\sqrt[4]{-8}$; $\sqrt[8]{-32}$ jne.

3. Igal negatiivsel arvul on parajasti üks paaritu juurijaga juur, mis on negatiivne.

4. Iga $n\in\mathbb{N}$ korral, kui $n\geq2$ $\sqrt[n]{0}=0$ ja $\sqrt[n]{1}=1$.

5. Iga $n\in\mathbb{N}$ korral $\sqrt[2n]{a^{2n}}=|a|$.

Näited: $\sqrt{(-2)^2}=|-2|=2$; $\sqrt[4]{(-8)^4}=|-8|=8$.

6. $\sqrt[2n+1]{a^{2n+1}}=a$.

7. $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n=a$.

8. $\left(\sqrt[2n]{a}\right)^{2n}=a$, *kui* $a\geq0$.

Kasutades omadusi 1 — 8 saame tuletada eeskirjad, mille järgi tehakse tehted juurtega.

1. Juur korrutisest võrdub tegurite juurte korrutisega:

$$\sqrt[n]{a\cdot b}=\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b} \qquad (1)$$

Näited: a) $\sqrt{32}=\sqrt{16\cdot2}=\sqrt{16}\cdot\sqrt{2}=4\sqrt{2}$,

b) $\sqrt[3]{32}=\sqrt[3]{8\cdot4}=\sqrt[3]{8}\cdot\sqrt[3]{4}=2\sqrt[3]{4}$.

Märkus: *Valem* (1) *kehtib vaid juhul, kui eksisteerivad võrduse paremal poolel olevad juured, näiteks kirjutis*

$\sqrt{(-8)\cdot(-2)}=\sqrt{-8}\cdot\sqrt{-2}$

on hulgas $\mathbb{R}$ *mõttetu, sest* $\sqrt{-8}$ *ja* $\sqrt{-2}$ *ei oma reaalarvulisi väärtusi.*

Tõestame nüüd valemi (1).

Kui kahe mittenegatiivse reaalarvu n-ndad astmed on võrdsed, siis on võrdsed ka need reaalarvud, kui $n\neq0$, s.t. $a^n=b^n\Rightarrow a=b$, kui $a\geq0$, $b\geq0$ ja $n\neq0$.

Astendame valemi (1) mõlemad pooled arvuga n, saame:

parem pool: $(\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b})^n=(\sqrt[n]{a})^n\cdot(\sqrt[n]{a})^n=a\cdot b$ (viimane võrdus kehtib definitsiooni tõttu).

vasak pool: juure definitsiooni järgi $(\sqrt[n]{a\cdot b})^n=a\cdot b$.

Kuna võrduse vasak ja parem pool teisenesid üheks ja samaks avaldiseks, siis oleme tõestanud valemi (1) kehtivuse.

Üldiselt kehtib valem

$$\sqrt[n]{a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_k}=\sqrt[n]{a_1}\cdot\sqrt[n]{a_2}\cdot\ldots\cdot\sqrt[n]{a_k}$$

Näited: a) $\sqrt{16\cdot25\cdot36}=\sqrt{16}\cdot\sqrt{25}\cdot\sqrt{36}=4\cdot5\cdot6=120$;

b) $\sqrt{8}=\sqrt{4}\cdot\sqrt{2}=2\sqrt{2}$; c) $\sqrt{20}=\sqrt{4}\cdot\sqrt{5}=2\sqrt{5}$;

d) $\sqrt[3]{16x^3y^2}=\sqrt[3]{8\cdot2\cdot x^3\cdot x^2\cdot y^2}=2x\sqrt[3]{2\cdot x^2\cdot y^2}$;

e) $\sqrt[4]{(a-b)^2(a^2-b^2)}=\sqrt[4]{(a-b)^2(a-b)(a+b)}=(a-b)\sqrt[4]{a+b}$.

Kui ei ole seldatud, et juuremärgi all olevad muutujad on mittenegatiivsed, siis tuleneb omaduse põhjal võime kasutada absoluutväärtuse märki:

f) $\sqrt{(x-y)^2(x+y)^2}=|(x-y)(x+y)|=|x^2-y^2|$.

271. Leia juur korrutisest.

a) $\sqrt{16\cdot 25}$ b) $\sqrt{36\cdot 81}$ c) $\sqrt{9\cdot 25\cdot 36}$ d) $\sqrt{49\cdot 100\cdot 64}$

e) $\sqrt[3]{27\cdot 216}$ f) $\sqrt[3]{8\cdot 125\cdot 512}$ g) $\sqrt[3]{64\cdot 343\cdot 1000}$ h) $\sqrt[4]{16\cdot 81\cdot 625\cdot 256}$

272. Lihtsusta juuritavat.

a) $\sqrt{75}$ b) $\sqrt[3]{40}$ c) $\sqrt[4]{234}$ d) $\sqrt[5]{64}$

e) $\sqrt{45}$ f) $\sqrt[3]{16}$ g) $\sqrt[4]{32}$ h) $\sqrt[5]{96}$

i) $\sqrt{98}$ j) $\sqrt[3]{72}$ k) $\sqrt[4]{1250}$ l) $\sqrt[5]{0{,}00016}$

m) $\sqrt{245}$ n) $\sqrt[3]{375}$ o) $\sqrt[4]{512}$ p) $\sqrt[5]{32}$

273. Vii tegur juuremärgi alla.

a) $2\sqrt{5}$ b) $5\sqrt{3}$ c) $3\sqrt{2}$ d) $2\sqrt[3]{2}$

e) $2\sqrt[4]{3}$ f) $5\sqrt{\frac{2}{5}}$ g) $2\sqrt[3]{\frac{5}{9}}$ h) $2a\sqrt{a}$

274. Tee juurimata kindlaks, kumb arv on suurem.

a) $2\sqrt{3}$ ja $3\sqrt{2}$ b) $6\sqrt{5}$ ja $5\sqrt{6}$ c) $3\sqrt{10}$ ja $4\sqrt{8}$

d) $3\sqrt[3]{2}$ ja $2\sqrt[3]{6}$ e) $2\sqrt[4]{3}$ ja $\sqrt[4]{45}$ f) $0{,}5\sqrt{5}$ ja $2\sqrt{2}$

275. Lihtsusta avaldist.

a) $\sqrt{(a+b)^3}$ b) $\sqrt{12(m^2+2mn+n^2)}$ c) $\sqrt{x^5(x^2+2x+1)}$

d) $\sqrt{18(m^2-2m+1)}$ e) $\sqrt[3]{81(1-\sqrt{5})^3}$ f) $\sqrt[4]{32(\sqrt{17}-4)^4}$

g) $\sqrt{3(2-\sqrt{5})^2}$ h) $\sqrt[3]{\frac{(a-b)^3(a+b)^5}{(a+b)^2}}$

276. Leia juuravaldise väärtus täpsusega 0,01.

a) $7\sqrt{2}$ b) $3\sqrt{5}$ c) $2\sqrt{6}$ d) $2\sqrt{7}$ e) $6\sqrt{3}$

2. Juur murrust võrdub murru lugeja ja nimetaja juurte jagatisega.

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}},\ \text{kui } b\neq 0. \qquad (2)$$

Näited: a) $\sqrt{144:9}=\sqrt{144}:\sqrt{9}=12:3=4$;

b) $\sqrt[3]{3a^3b}:\sqrt[3]{3ab}=\sqrt[3]{3a^3b:3ab}=\sqrt[3]{a^2}$, kui $a\neq 0$ ja $b\neq 0$;

c) $\sqrt[4]{x^5y}:\sqrt[4]{x}=\sqrt[4]{x^5y:x}=\sqrt[4]{x^4y}=|x|\sqrt[4]{y}$.

277. Arvuta.

a) $\sqrt{121}:\sqrt{169}$ b) $\sqrt[3]{8}:\sqrt[3]{343}$ c) $\sqrt[4]{81}:\sqrt[4]{625}$

d) $\sqrt{5\frac{4}{9}}$ e) $\sqrt[3]{2\frac{10}{27}}$ f) $\sqrt[5]{7\frac{19}{32}}$

278. Teisenda juurealune jagatiseks ja leia selle väärtus.

279. Lihtsusta avaldised ja leia tingimused, mille puhul saab juure väärtust leida.

Näide: $\sqrt{81a^{-2}b^{-4}}=\sqrt{\frac{81}{a^2b^4}}=\frac{9}{|a|b^2}$, kui $a\neq 0$ ja $b\neq 0$.

a) $\sqrt{a^{-4}}$ b) $\sqrt[3]{b^{-6}}$ c) $\sqrt[5]{x^{-10}}$ d) $\sqrt[3]{27z^{-9}}$

e) $\sqrt{\frac{25m^{-4}}{49n^{-2}}}$ f) $\sqrt[3]{\frac{-125a^{-3}}{216}}$ g) $\sqrt[5]{\frac{-1}{32a^{-5}b^{10}}}$ h) $\sqrt[4]{\frac{16x^{-8}y^4}{625a^{-4}b^{-12}}}$

i) $\sqrt{0{,}01a^{2n}}$ j) $\sqrt[5]{-243m^{-10}n^{5n}}$ k) $\sqrt[6]{64a^{12n}b^{-18n}}$

280. Tõesta, et valem (2) kehtib.

281. Selgita, kas valemi (1) juures esitatud märkus on kehtiv ka valemi (2) korral või mitte.

3. Juure väärtus ei muutu, kui juurijat ja juuritava astendajat korrutada ühe ja sama naturaalarvuga või jagada nende ühise teguriga.

Tõestus: Peame näitama, et $\sqrt[n]{a^m}=\sqrt[np]{a^{mp}}$, kus m, n ja p on naturaalarvud. Tõestuseks astendame võrduse mõlemat poolt arvuga np. Tõstes parema poole astmesse np, saame juure definitsiooni põhjal

$$\left(\sqrt[np]{a^{mp}}\right)^{np}=a^{mp}.$$

Vasaku poole astendame kahes järgus: kõigepealt tõstame astmesse n (juure definitsiooni järgi saame a^m). Saadud tulemuse tõstame astmesse p (astme astendamise reegli põhjal saame a^{mp}). Seega võime kirjutada:

$$\left[\left(\sqrt[n]{a^m}\right)^n\right]^p=\left(a^m\right)^p=a^{mp}$$

Näeme, et astendanud arvud $\sqrt[n]{a^m}$ ja $\sqrt[np]{a^{mp}}$ ühe ja sama astendajaga np, saame ühe ja sama tulemuse a^{mp}. Järelikult on mõlemad arvud juured arvust a^{mp} juurijaga np, seega $\sqrt[n]{a^m}=\sqrt[np]{a^{mp}}$.

Lugedes seda võrdust paremalt vasakule, saame

$$\sqrt[np]{a^{mp}}=\sqrt[n]{a^m}. \qquad (3)$$

mis näitab, et juurijat ja juuritava astendajat võib jagada ühise teguriga.

Märkus: Tõestatud valem on õige vaid juhul, kui $a>0$.

Näited: a) $\sqrt{2}=\sqrt[2\cdot 3]{2^3}$ b) $\sqrt[3]{a}=\sqrt[2\cdot 3]{a^2}=\sqrt[2\cdot 3]{a^3}$

282. Vii ühesuguse juuremärgi alla.

a) $\sqrt{3}$; $\sqrt[3]{4}$ ja $\sqrt[6]{7}$ b) $\sqrt{6}$; $\sqrt[4]{17}$ ja $\sqrt[8]{40}$

c) $\sqrt{2}$; $\sqrt[3]{3}$ ja $\sqrt[6]{4}$ d) $\sqrt{5}$ ja $\sqrt[3]{-9}$

e) $\sqrt[3]{-3}$; $\sqrt[4]{-2}$ ja $\sqrt[12]{10}$ f) $\sqrt[3]{a^2}$; $\sqrt{a^{-1}}$ ja $\sqrt[4]{a^3}$

g) $\sqrt[3]{x^3}$; $\sqrt[4]{y^{-3}}$ ja $\sqrt[8]{z^8}$ h) $\sqrt[3]{a^2b^3}$ ja $\sqrt{6a^{-3}b^2}$

283. Lihtsusta, kui kõik tähed tähistavad positiivseid arve.

a) $\sqrt[8]{x^4}$ b) $\sqrt[6]{a^3}$ c) $\sqrt[10]{a^5}$ d) $\sqrt[8]{c^4}$

e) $\sqrt[8]{a^6}$ f) $\sqrt[6]{y^4}$ g) $\sqrt[12]{x^8}$ h) $\sqrt[24]{m^{16}}$

i) $\sqrt[4]{36a^2}$ j) $\sqrt[6]{27b^3}$ k) $\sqrt[18]{z^{12}}$ l) $\sqrt[8]{16a^8}$

m) $\sqrt[10]{32a^{5k}b^{15}}$ n) $\sqrt[4]{9a^2b^4}$ o) $\sqrt[4]{\frac{25}{81}x^{16}}$ p) $\sqrt[12]{27m^9}$

284. Arvuta taskuarvuti abil. Kui vaja, siis lihtsusta avaldist.

a) $\sqrt[4]{49}$ b) $\sqrt[6]{216}$ c) $\sqrt[14]{128}$ d) $\sqrt[8]{0{,}0625}$

285. Kumb on suurem, kas

a) $\sqrt[10]{20}$ või $\sqrt[5]{5}$ b) $\sqrt{2}$ või $\sqrt[3]{3}$ c) $\sqrt[3]{3}$ või $\sqrt[4]{4}$

286. Kas vahe on positiivne või negatiivne?

a) $\sqrt[4]{3}-\sqrt[5]{4}$ b) $\sqrt[5]{2}-\sqrt[6]{3}$ c) $1-\frac{\sqrt{10}}{\sqrt[3]{11}}$

287. Tõesta, et kehtib valem (3).

4. Juure juurimisel juurijad korrutatakse ja tulemusega juuritakse antud juuritav.

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[mn]{a}. \qquad (4)$$

Näited: a) $\sqrt{\sqrt{16}}=\sqrt[4]{16}$; b) $\sqrt[3]{\sqrt{729}}=\sqrt[6]{729}$; c) $\sqrt[3]{a\sqrt{a}}=\sqrt[3]{\sqrt{a^3}}=\sqrt[6]{a^3}=\sqrt{a}$.

288. Lihtsusta avaldis.

a) $\sqrt{\sqrt{3}}$ b) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{a^2}}$ c) $\sqrt[3]{\sqrt[5]{15}}$

d) $\sqrt{\sqrt[4]{a^{10}b^2c^8}}$ e) $\sqrt[3]{\sqrt[10]{a^{10}b^5c^{15}}}$ f) $\sqrt[3]{\sqrt{a}\sqrt[3]{a^2}}$

289. Taanda antud juured ruutjuure ja kuupjuure leidmisele.

a) $\sqrt[4]{16}$ b) $\sqrt[4]{50}$ c) $\sqrt[6]{1000}$

d) $\sqrt[6]{64}$ e) $\sqrt[6]{144}$ f) $\sqrt[4]{1331}$

g) $\sqrt[9]{512}$ h) $\sqrt[8]{1296}$ i) $\sqrt[8]{10000}$

290. Lihtsusta avaldis.

a) $\sqrt{k\sqrt{k}}$, kui $k=\frac{a}{b}$ b) $\sqrt{\frac{x^2}{2}\sqrt[4]{x^3}}$, kui $x=b^2$

c) $\sqrt[4]{b^2\sqrt{81b}}$, kui $b=\sqrt{2}$ d) $\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a}}}$, kui $a=\sqrt{3}$

291. Tõesta, et kehtib valem (4).

5. Juure astendamisel astendatakse juuritav ja tulemus juuritakse antud juurijaga.

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m=\sqrt[n]{a^m}. \qquad (5)$$

Näited: a) $\left(\sqrt[3]{2}\right)^2=\sqrt[3]{2^2}=\sqrt[3]{4}$;

b) $\left(\frac{1}{3}\sqrt{3}\right)^3=\left(\frac{1}{3}\right)^3\cdot\left(\sqrt{3}\right)^3=\frac{1}{27}\cdot\sqrt{3^3}=\frac{1}{27}\cdot 3\cdot\sqrt{3}=\frac{\sqrt{3}}{9}$;

c) $\left(\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}\right)^2=\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{x^2}$.

293. Astenda.

a) $(\sqrt{3})^3$ b) $(\sqrt[3]{5})^4$ c) $(\sqrt[8]{3})^{12}$ d) $(\sqrt[4]{2})^6$

e) $(3\sqrt{2})^2$ f) $(2\sqrt[3]{5})^6$ g) $(0{,}5\sqrt{2})^4$ h) $(2\sqrt[3]{4})^2$

i) $(3\sqrt[3]{9})^3$ j) $(2\sqrt[4]{8})^2$ k) $(-\sqrt[3]{2})^3$ l) $(-2\sqrt{2})^2$

293. Astenda.

a) $(\sqrt{a})^3$ b) $(\sqrt{m})^4$ c) $(-\sqrt[4]{x^3})^2$

d) $(-\sqrt[3]{a^2})^3$ e) $(m\sqrt{n})^3$ f) $(ax^2\sqrt{2ax^2})^2$

g) $(2x\sqrt{3a^2x})^4$ h) $(-0{,}3\sqrt[3]{xy})^3$ i) $(-0{,}2\sqrt{m^2n^2})^2$

294. Astenda.

a) $(1+\sqrt{3})^2$ b) $(\sqrt{2}-1)^2$ c) $(3\sqrt{5}+\sqrt{2})^2$

d) $(5\sqrt{2}-\sqrt{3})^2$ e) $(\sqrt{a}+b)^2$ f) $(\sqrt{m}-\sqrt{n})^2$

g) $(\sqrt{ab}+2\sqrt{a})^2$ h) $(\sqrt{xy}-3\sqrt{x})^2$ i) $(\sqrt{5}+2\sqrt{5})^2$

j) $(\sqrt{9}-\sqrt{3})^2$ k) $(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2$ l) $(\sqrt[3]{c^2}-\sqrt[3]{c})^2$

295. Astenda.

a) $(\sqrt{2}+\sqrt{3})^3$ b) $(2\sqrt{3}-\sqrt{5})^3$ c) $(\sqrt{2}+2\sqrt{5})^3$

d) $(\sqrt{3}-2\sqrt[3]{2})^3$ e) $(\sqrt{2}+3\sqrt[3]{3})^3$ f) $(\sqrt[3]{a}-\sqrt{a})^2$

296. Bhaskara ülesanne (12. saj.). Tõesta, et

$$\sqrt{10+\sqrt{24}+\sqrt{40}+\sqrt{60}}=\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}.$$

297. Bertrand'i ülesanne (19. saj.). Tõesta, et $\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}=4$.

2.8. RATSIONAALARVULISE ASTENDAJAGA ASTE

Naturaalarvulise astendajaga aste a^n, kus $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$ ja $a\in\mathbb{R}$, tähendab korrutist $a^n=\underbrace{a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}_{n\text{ korda}}$. Kui $n\in\mathbb{N}$ ja $a\in\mathbb{R}$, siis $a^{-n}=\frac{1}{a^n}$ eeldusel, et $a\neq 0$.

Kas astendaja n võib olla suvaline ratsionaalarv? Mida sel juhul tähendavad kirjutised $a^{0,5}$ ja $b^{-0,75}$?

Juure definitsioonist järeldub, et kui $a\geq 0$, siis kehtib võrdus $\sqrt[n]{a^n}=a$.

Seetõttu $\sqrt[3]{2^{15}}=\sqrt[3]{(2^5)^3}=2^5$ või $\sqrt[3]{2^{15}}=2^{\frac{15}{3}}$, analoogiliselt $\sqrt[6]{2^{-18}}=\sqrt[6]{(2^{-3})^6}=$ $=2^{-3}$ või $\sqrt[6]{2^{-18}}=2^{-18:6}$.

Kokku võttes:

Olgu $a>0$, $m\in\mathbb{Z}$ ja $n\in\mathbb{N}$, kus m jagub n-ga, siis $m=n\cdot k$, $k\in\mathbb{Z}$. Sel juhul

$\sqrt[n]{a^m}=\sqrt[n]{a^{nk}}=\sqrt[n]{(a^k)^n}=a^k=a^{\frac{m}{n}}$.

Põhjenda võrduste reas iga sammu!

Ratsionaalarvulise astendajaga astme defineerime järgmiselt:

$$a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m},\ \text{kui } a>0,\ m\in\mathbb{Z},\ n\in\mathbb{N} \text{ ja } n\geq 2.$$

Näited: a) $5^{\frac{1}{2}}=\sqrt{5}$; b) $5^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{5^2}$; c) $4^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{4^{\frac{1}{2}}}=\frac{1}{\sqrt{4}}=\frac{1}{2}$.

Juurijana kasutatakse üldjuhul naturaalarve. Seepärast on kirjutised $\sqrt[-2]{3}$, $\sqrt[-3]{9}$, $\sqrt[0,2]{13}$ ebasoovitavad.

Juhul kui $a=0$, siis $a^{\frac{m}{n}}=0$ ($m\in\mathbb{N}$ ja $n\in\mathbb{N}$).

Tõestame nüüd, et astendamise põhivalemid (vt. lk. 56) jäävad kehtima ka juhul, kui astendaja on ratsionaalarv.

Tõestame, et kehtib valem $a^{\frac{p}{q}}\cdot a^{\frac{s}{t}}=a^{\frac{p}{q}+\frac{s}{t}}$.

Olgu $a>0$, $\frac{p}{q}\in\mathbb{Q}$ ja $\frac{s}{t}\in\mathbb{Q}$. Kui $\frac{p}{q}$ ja $\frac{s}{t}$ on täisarvud, siis loeme valemi varasema põhjal kehtivaks.

Oletame, et üks astendajatest (või mõlemad) on taandumatud murrud. Sellisel juhul murrulise astendajaga astme definitsiooni kohaselt $a^{\frac{p}{q}}\cdot a^{\frac{s}{t}}=\sqrt[q]{a^p}\cdot\sqrt[t]{a^s}$.

Kasutades juure põhiomadust võime kirjutada: $\sqrt[q]{a^p}\cdot\sqrt[t]{a^s}=\sqrt[qt]{a^{pt}}\cdot\sqrt[qt]{a^{qs}}$.

Juurte korrutamise reegli kohaselt: $\sqrt[qt]{a^{pt}}\cdot\sqrt[qt]{a^{qs}}=\sqrt[qt]{a^{pt}\cdot a^{qs}}=\sqrt[qt]{a^{pt+qs}}$.

Murrulise astendajaga astme definitsiooni kohaselt: $\sqrt[qt]{a^{pt+qs}}=a^{\frac{pt+qs}{qt}}$.

Kuid $\frac{pt+qs}{qt}=\frac{pt}{qt}+\frac{qs}{qt}=\frac{p}{q}+\frac{s}{t}$, seega $a^{\frac{p}{q}}\cdot a^{\frac{s}{t}}=a^{\frac{p}{q}+\frac{s}{t}}$.

Analoogiliselt saame tõestada, et ka teised põhivalemid kehtivad.

Kokkuvõte: *Kui $a, b\in\mathbb{R}$ ja $a, b>0$ ning m ja $n\in\mathbb{Q}$, siis kehtivad valemid:*

$$a^m\cdot a^n=a^{m+n}\qquad a^m:a^n=a^{m-n}\qquad (a^m)^n=a^{m\cdot n}\qquad (a\cdot b)^m=a^m\cdot b^m\qquad \left(\frac{a}{b}\right)^m=\frac{a^m}{b^m}.$$

Näited: a) $3x^{\frac{4}{9}}y^{-\frac{2}{3}}\cdot 2x^{-\frac{23}{18}}y^{\frac{16}{15}}=6x^{-\frac{5}{6}}y^{\frac{2}{5}}$;

b) $(8a^{0,6}b^{-0,4}c^{-2}):(2a^{0,4}b^{-0,3})=4a^{0,2}b^{-0,1}c^{-2}$;

c) $(8a^{-2}c^6)^{-\frac{2}{3}}\cdot(9a^{\frac{8}{3}}c^{\frac{16}{5}})^{\frac{1}{4}}=\frac{1}{4}a^{\frac{4}{3}}c^{-\frac{4}{5}}\sqrt{3}a^{\frac{2}{3}}c^{\frac{4}{5}}=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$;

d) $0{,}027^{-\frac{1}{3}}-\left(\frac{1}{6}\right)^{-2}+16^{\frac{3}{4}}-3^{-1}+5{,}5^0=\frac{1}{\sqrt[3]{0{,}027}}-6^2+$

$+\sqrt[4]{16^3}-\frac{1}{3}+1-3\frac{1}{3}-36+8\frac{1}{3}+1=-24$.

398. Kirjuta juuremärgi abil.

a) $a^{0,5}$; $x^{\frac{2}{3}}$; $(a^2b^5)^{\frac{1}{3}}$; $(a+b)^{0,8}$; $2x^{2,5}$; $(x+y)^{1,5}$

b) $y^{\frac{1}{3}}$; $k^{1,5}$; $(xy^3)^{\frac{5}{2}}$; $(a-b)^{1,4}$; $5x^{0,5}(x-y)^{2,5}$

399. Kirjuta astmena.

a) $\sqrt{x^3}$; $\sqrt[5]{x^2y^5}$; $\sqrt[10]{a^5b^7}$; $\sqrt{a^5-b^5}$

b) $\sqrt[4]{a^3}$; $\sqrt[5]{x^3y^4}$; $\sqrt[10]{a^4b^9}$; $\sqrt{a^4+b^4}$

400. Arvuta.

a) $27^{\frac{4}{3}}+\left(\frac{36}{25}\right)^{-\frac{1}{2}}$; $81^{\frac{5}{4}}$; $8^{\frac{2}{3}}+16^{\frac{5}{4}}$ b) $32^{\frac{3}{5}}$; $\left(\frac{8}{27}\right)^{-\frac{2}{3}}$; $16^{\frac{3}{4}}$; $81^{0,5}-25^{1,5}$

401. Esita murrujooneta.

a) $\frac{5a^3c^{-7}}{b^{-3}}$; $\frac{4k^3p^4}{5m^3n}$; $\frac{7x^{-2}y}{a^{-3}b^2}$; $\frac{3a^{-2}b^5}{4x^{-3}y^5}$ b) $\frac{3a^6b^4}{c^9}$; $\frac{a^7c^3}{2b^4}$; $\frac{a^5b^{-3}}{3x^3y^{-4}}$; $\frac{2x^4b^{-5}}{5a^{-3}y^5}$

402. Esita korrutisena ilma juuremärki kasutamata.

a) $\frac{2x^{-3}y}{\sqrt[3]{a^2b}}$ b) $\frac{3\sqrt{xy^4}}{a^{-3}b}$; c) $\frac{4b^5c^{-4}}{5\sqrt[3]{a^2}}$; d) $\frac{5\sqrt[3]{a^3b^2}}{7c\sqrt[3]{a^2b^2}}$

e) $\frac{\sqrt[3]{b}}{b^{-\frac{1}{3}}}$ f) $\frac{a^4\sqrt[3]{b^2}}{2x^{-5}}$; g) $\frac{\sqrt{x^3y}}{\sqrt[3]{a^2}}$; h) $\frac{4a^3\sqrt{ab^2}}{\sqrt[4]{x^3y^5}}$

403. Lihtsusta avaldis.

a) $(3a^{-3}b^{-4})(2a^{-2}b^3)^{-3}$ b) $\frac{2a^{\frac{1}{3}}b^{-\frac{2}{3}}}{3x^{\frac{1}{4}}y^{\frac{3}{8}}}:\frac{9x^{\frac{3}{4}}y^5}{\sqrt[4]{a^2b^{-8}}}$

c) $x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}:x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}$ d) $(x^{\frac{6}{5}}y^{\frac{1}{5}}):(x^{\frac{3}{4}}y^{\frac{11}{15}})$

404. Lihtsusta avaldis ja arvuta selle väärtused.

a) $(3x^{-3}y^8)^{-2}\cdot(x^4y^{-3})^5$, kui $x=-1$ ja $y=6$;

b) $\frac{7a^3x^{-5}}{b^{-2}}:\frac{\sqrt[3]{x-5}}{b^4x^5}$, kui $a=2$, $b=4$ ja $x=1$.

2.9. MURRU NIMETAJA VABASTAMINE IRRATSIONAALSUSEST

Enamik juurte väärtusi väljendub irratsionaalarvudena. Näiteks $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt[3]{3}$, $\sqrt[4]{2}+\sqrt[3]{2}$ jne. Praktikas me ei kasuta juurte täpseid väärtusi, vaid asendame juure tema mingi kümnendlähendiga.

Näiteks:

$$\frac{4}{\sqrt{2}} \approx \frac{4}{1{,}414} = 4000 : 1414 = 2{,}828 .$$

Kui aga antud murdu enne jagamist laiendada $\sqrt{2}$ -ga, saame

$$\frac{4}{\sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2} \approx 2{,}828 .$$

Esimesel juhul jagasime arvu 4 ligikaudse arvuga, teisel juhul korrutasime. Et korrutamine irratsionaalarvu kümnendlähendiga on lihtsam kui jagamine, siis paljudel juhtudel teisendatakse irratsionaalse nimetajaga murdu nii, et nimetaja vabaneks juurest. Selleks laiendatakse murru lugejat ja nimetajat sobivalt valitud teguriga.

Murru nimetaja (lugeja) vabastamine irratsionaalsusest tähendab seda, et antud murd teisendatakse kujule, kus murru nimetajas (lugejas) ei esine enam juuri (ega ka murrulist astendajat).

Näited: a) $\frac{6}{\sqrt{2}} = \frac{6}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{6\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}$;

b) $\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$; c) $\frac{x}{\sqrt[3]{x}} = \frac{x}{\sqrt[3]{x}} \cdot \frac{\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{x^2}} = \frac{x\sqrt[3]{x^2}}{x} = \sqrt[3]{x^2}$;

d) $\frac{a^2-b^2}{\sqrt{a+b}} = \frac{(a^2-b^2)}{\sqrt{a+b}} \cdot \frac{\sqrt{a+b}}{\sqrt{a+b}} = \frac{(a-b)(a+b)\sqrt{a+b}}{a+b} = (a-b)\sqrt{a+b}$.

Kui murru nimetaja (lugeja) on ruutjuurt sisaldav kaksliige, siis laiendatakse murdu samade arvude summa või vahega, nii et saaks kasutada ruutude vahe valemit, näiteks: $(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b}) = (\sqrt{a})^2 - (\sqrt{b})^2 = a-b$.

Näited: a) $\frac{9}{2\sqrt{3}-3} = \frac{9(2\sqrt{3}+3)}{(2\sqrt{3}-3)(2\sqrt{3}+3)} = \frac{9(2\sqrt{3}+3)}{12-9} = 3(2\sqrt{3}+3)$;

b) $\frac{1}{a-\sqrt{a^2-b^2}} = \frac{a+\sqrt{a^2-b^2}}{(a-\sqrt{a^2-b^2})(a+\sqrt{a^2-b^2})} = \frac{a+\sqrt{a^2-b^2}}{a^2-(a^2-b^2)} = \frac{a+\sqrt{a^2-b^2}}{b^2}$

Ülesannetes 305 - 309 tuleb vabastada murru nimetaja irratsionaalsusest.

305. a) $\frac{2}{\sqrt{2}}$ b) $\frac{9}{\sqrt{3}}$ c) $\frac{14}{\sqrt{7}}$ d) $\frac{10}{\sqrt{5}}$ e) $\frac{1}{\sqrt{2}}$

f) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ g) $\frac{3}{\sqrt{5}}$ h) $\frac{8}{\sqrt{6}}$ i) $\frac{60}{\sqrt{15}}$ j) $\frac{7}{\sqrt{0{,}5}}$

306. a) $\frac{4}{\sqrt[3]{2}}$ b) $\frac{6}{\sqrt[3]{3}}$ c) $\frac{3}{\sqrt[3]{9}}$ d) $\frac{5}{\sqrt[3]{25}}$ e) $\frac{15}{\sqrt[3]{75}}$

f) $\frac{6}{\sqrt[3]{12}}$ g) $\frac{10}{\sqrt[3]{25}}$ h) $\frac{7}{\sqrt[3]{7}}$ i) $\frac{2}{\sqrt[3]{75}}$ j) $\frac{6}{\sqrt[3]{4{,}5}}$

307. a) $\frac{8a}{\sqrt{a}}$ b) $\frac{n^2}{\sqrt{n}}$ c) $\frac{2}{\sqrt{2x}}$ d) $\frac{2z^2}{\sqrt{2z}}$ e) $\frac{c}{3\sqrt{c}}$

f) $\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{4b}}$ g) $\frac{2m}{\sqrt[3]{4m}}$ h) $\frac{4x}{\sqrt[3]{2x}}$ i) $\frac{y}{\sqrt[3]{y^4}}$ j) $\frac{3ab}{\sqrt[3]{a^2}}$

308. a) $\frac{m+n}{\sqrt{m+n}}$ b) $\frac{m-n}{\sqrt{m-n}}$ c) $\frac{x+3}{\sqrt{x^2-9}}$

d) $\frac{a-b}{\sqrt{a^2-b^2}}$ e) $\frac{m+n}{\sqrt{m^2-n^2}}$ f) $\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}}$

g) $\frac{b+3}{\sqrt{2b^2+12b+18}}$ h) $\frac{2b-1}{\sqrt{8b^2-8b+2}}$ i) $\frac{z-3}{\sqrt{3z^2-18z+27}}$

309. a) $\frac{3}{2+\sqrt{2}}$ b) $\frac{3}{\sqrt{5}-2}$ c) $\frac{2}{\sqrt{3}+2}$ d) $\frac{20\sqrt{5}}{3\sqrt{5}-5}$

e) $\frac{4\sqrt{2}}{4+3\sqrt{2}}$ f) $\frac{\sqrt{7}+\sqrt{5}}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}$ g) $\frac{1-2\sqrt{5}}{1+2\sqrt{5}}$ h) $\frac{3\sqrt{3}-2\sqrt{2}}{3\sqrt{3}+2\sqrt{2}}$

i) $\frac{\sqrt{15}-\sqrt{6}}{\sqrt{35}-\sqrt{14}}$ j) $\frac{\sqrt{10}+\sqrt{15}}{\sqrt{10}-\sqrt{15}}$ k) $\frac{\sqrt{15}+\sqrt{10}}{\sqrt{6}+2}$ l) $\frac{\sqrt{8}-\sqrt{12}}{\sqrt{6}-3}$

Kui juurt sisaldavas avaldises on liidetavaid enam kui kaks, siis kaotatakse irratsionaalsus järk-järgult.

Näide: 1) $\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c}} = \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}}{(\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c})(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})} =$

$= \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}}{a+b-c+2\sqrt{ab}} = \frac{(a+b-c-2\sqrt{ab})(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})}{(a+b-c)^2-4ab}$;

2) $\frac{1}{\sqrt[3]{2}-1} = \frac{(\sqrt[3]{2})^2+\sqrt[3]{2}+1}{(\sqrt[3]{2})^3-1} = \frac{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1}{(\sqrt[3]{2})^3-1^3} = \sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1$;

3) $\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+1} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}+1}{(\sqrt{2}+\sqrt{3}+1)(\sqrt{2}+\sqrt{3}+1)} = \frac{3(\sqrt{2}+\sqrt{3}+1)}{2\sqrt{2}} =$

$= \frac{3(\sqrt{2}+\sqrt{3}+1)\sqrt{2}}{2\sqrt{2}\sqrt{2}} = \frac{3(2+\sqrt{6}+\sqrt{2})}{4}$.

310. Vabane irratsionaalsusest

a) $\frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$ b) $\frac{1}{\sqrt[3]{15}-\sqrt[3]{7}}$ c) $\frac{\sqrt{\sqrt{5}+\sqrt{3}}}{\sqrt{\sqrt{5}-\sqrt{3}}}$

d) $\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{3}+1}$ e) $\frac{1}{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{9}}$ f) $\frac{1}{\sqrt{14}+\sqrt{21}+\sqrt{15}+\sqrt{10}}$

2.10. IRRATSIONAALAVALDISTE TEISENDAMINE

Kui sooritame tehteid murrulise astendajaga astmetega, siis tulemuseks saame üldjuhul avaldise, mis sisaldab murrulisi astendajaid, s.t. juuri. Selliseid avaldisi nimetatakse **juuravaldisteks ehk irratsionaalavaldisteks**.

Irratsionaalavaldised on näiteks $\sqrt{a}+\sqrt[3]{a}+\sqrt[4]{a}$; $\sqrt{x+y}+\sqrt{x}$; $3\sqrt{2}+4\sqrt{2}+\sqrt{2}$.

Viimane avaldis on summa, milles liidetavad erinevad üksteisest ainult juuremärgi ees olevate kordajate poolest.

Irratsionaalavaldisi, mis erinevad üksteisest ainult juuremärgi ees olevate kordajate poolest (või erine üldse), nimetatakse sarnasteks.

Sarnased irratsionaalavaldised on näiteks $7\sqrt{x}$; $-3\sqrt{x}$, sarnased ei ole $4\sqrt{x}$ ja $4\sqrt{y}$. Summat, mille liidetavate hulgas on sarnaseid juuravaldisi, saab koondada.

Näited: a) $5\sqrt{2}+7\sqrt{2}-3\sqrt{2}=(5+7-3)\sqrt{2}=9\sqrt{2}$

b) $\frac{2}{3}\sqrt{3}+\frac{3}{4}\sqrt{3}-3\sqrt{3}=\left(\frac{2}{3}+\frac{3}{4}-3\right)\sqrt{3}=-\frac{19}{12}\sqrt{3}$

Kui juuravaldisi sisaldavas hulkliikmes ei leidu sarnaseid liikmeid, siis tuleb selgitada, kas neid on võimalik sarnasteks teisendada. Selleks tuleb anda juurtele võimalikult lihtne kuju.

Näide: $3\sqrt{24}-3\sqrt{54}+2\sqrt{6}=3\sqrt{4\cdot 6}-3\sqrt{9\cdot 6}+2\sqrt{6}=(6-9+2)\sqrt{6}=-\sqrt{6}$.

Vaatleme veel mõningaid näiteid.

Näide: Lihtsusta avaldis $(\sqrt{32}+\sqrt{45}+\sqrt{98})\cdot(\sqrt{72}-\sqrt{500}-\sqrt{8})$.

Kõigepealt lihtsustame igas avaldises esinevat juuravaldist:

$\sqrt{32}=\sqrt{16\cdot 2}=4\sqrt{2}$, $\sqrt{45}=\sqrt{9\cdot 5}=3\sqrt{5}$, $\sqrt{98}=\sqrt{49\cdot 2}=7\sqrt{2}$;

$\sqrt{72}=\sqrt{36\cdot 2}=6\sqrt{2}$, $\sqrt{500}=10\sqrt{5}$ ja $\sqrt{8}=2\sqrt{2}$, seega

$(\sqrt{32}+\sqrt{45}+\sqrt{98})(\sqrt{72}-\sqrt{500}-\sqrt{8})=(4\sqrt{2}+3\sqrt{5}-7\sqrt{2})\cdot(6\sqrt{2}-10\sqrt{5}-2\sqrt{2})=$

$=(3\sqrt{5}-3\sqrt{2})(4\sqrt{2}-10\sqrt{5})=12\sqrt{10}-24-150+30\sqrt{10}=42\sqrt{10}-174=6(7\sqrt{10}-29)$

Näide: Leiame avaldise $2a^2-5ab+2b^2$ väärtuse, kui $a=\sqrt{5}+\sqrt{6}$ ja $b=\sqrt{6}-\sqrt{5}$.

Kõigepealt leiame a^2, b^2 ja ab väärtuse:

$a^2=(\sqrt{5}+\sqrt{6})^2=5+2\sqrt{30}+6=11+2\sqrt{30}$;

$b^2=(\sqrt{6}-\sqrt{5})^2=6-2\sqrt{30}+5=11-2\sqrt{30}$;

$ab=(\sqrt{5}+\sqrt{6})\cdot(\sqrt{6}-\sqrt{5})=6-5=1$.

Arvestades eespool saadud tulemusi võime nüüd kirjutada:

$2a^2-5ab+2b^2=2(11+2\sqrt{30})-5+2(11-2\sqrt{30})=39$.

Näide: Lihtsustame avaldise $A=\sqrt{(\sqrt{3}-2)^2}-\sqrt{(1-\sqrt{3})^2}$.

Kuna $\sqrt{3}-2<0$ ja $1-\sqrt{3}<0$, siis

$A=2-\sqrt{3}-(\sqrt{3}-1)=-2\sqrt{3}+3$.

111. Lihtsusta avaldis.

a) $\frac{2}{7+4\sqrt{3}}+\frac{2}{7-4\sqrt{3}}$

b) $\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}-\frac{\sqrt{3}+\sqrt{5}}{\sqrt{3}-\sqrt{5}}$

c) $\frac{9}{2\sqrt{3}-3}-\frac{6}{3\sqrt{2}+4}$

d) $\frac{(\sqrt{3}-1)^2}{(\sqrt{3}-1)^2-2}$

112. Lihtsusta avaldis.

a) $\frac{2}{\sqrt{10}+5}+\frac{5}{\sqrt{10}-2}+\frac{1}{\sqrt{10}}$

b) $\frac{(5-\sqrt{24})(\sqrt{75}+\sqrt{50})}{\sqrt{75}-\sqrt{50}}$

c) $\frac{(\sqrt{45}-\sqrt{20})(\sqrt{12}+\sqrt{75})\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{180}}$

d) $\frac{2\sqrt{3}+17\sqrt{12}-4\sqrt{48}}{\frac{4}{3}\cdot\sqrt{3}}\cdot 5\sqrt{5}$

113. Leia avaldise $3a^2+4ab-3b^2$ väärtus, kui

$a=\frac{\sqrt{5}+\sqrt{2}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$ ja $b=\frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}$.

114. Lihtsusta avaldis.

a) $\left(1-\frac{2}{\sqrt{x^2+y^2}}\right):\left(2-\sqrt{x^2+y^2}\right)$

b) $\left(\frac{a+1}{\sqrt{a}}-2\right)\cdot\frac{\sqrt{a}+a}{\sqrt{a}-1}$

c) $\left(2-\frac{m+1}{\sqrt{m}}\right):\frac{\sqrt{m}-1}{m+\sqrt{m}}$

d) $\frac{\sqrt{c}+1}{c\sqrt{c}+c+\sqrt{c}}:\frac{1}{c^2-\sqrt{c}}$

e) $\frac{\sqrt{x^3}+\sqrt{y^3}}{\sqrt{x}}:\frac{x-\sqrt{xy}+y}{x-\sqrt{xy}}$

115. Lihtsusta avaldis.

a) $\frac{1}{m-\sqrt{m^2-n^2}}+\frac{1}{m+\sqrt{m^2-n^2}}$

b) $\left(\frac{u+\sqrt{u^2-4}}{u-\sqrt{u^2-4}}-\frac{u-\sqrt{u^2-4}}{u+\sqrt{u^2-4}}\right):\frac{u\sqrt{u^2-4}}{4}$

c) $\frac{\sqrt{1+c}}{\sqrt{1+c}-\sqrt{1-c}}+\frac{1-c}{\sqrt{1-c^2}-c+1}$

d) $\left(\sqrt{4+k}+\sqrt{4-k}\right)^2$, kui $k=\sqrt{7}$

e) $\left(\sqrt{11+k}+\sqrt{11-k}\right)^2$, kui $k=6\sqrt{2}$

f) $\left(\sqrt{4+k}+\sqrt{4-k}\right)^2$, kui $k=2\sqrt{3}$

g) $\left(\sqrt{12+k}+\sqrt{12-k}\right)^2$, kui $k=4\sqrt{5}$

Lõpetuseks vaatleme mõningaid keerulisemaid ülesandeid ja tutvume ühe valemiga, mis võimaldab mõningaid juuravaldisi lihtsustada.

Näide: On teada, et vahe $\sqrt{\left|40\sqrt{2}-\sqrt{57}\right|}-\sqrt{40\sqrt{2}+57}$ on täisarv. Leiame selle täisarvu.

Tähistame otsitava x-ga. Kuna $(40\sqrt{2})^2 = 3200$ ja $57^2 = 3249$, siis $57 > 40\sqrt{2}$ ja esialgne avaldis esitub kujul

$$x = \sqrt{57 - 40\sqrt{2}} - \sqrt{40\sqrt{2} + 57}\,.$$

Tõstame nüüd võrduse mõlemad pooled ruutu ja saame, et $x^2 = 100$, järelikult x on 10 või -10. Kuna meil on vähendatav vähendajast väiksem, siis järelikult otsitav täisarv on -10.

316. Tõesta, et $\sqrt{\left|-\sqrt{8}+2\right|} - \sqrt{\sqrt{8}+2} = 4(\sqrt{2}-1)$.

317. Triinu andis Taavile ülesande: kas kehtib võrdus

$$\sqrt[3]{38+\sqrt{1445}} + \sqrt[3]{38-\sqrt{1445}} = 4\,?$$

Taavi lahendas ülesande nii: lähtun eeldusest, et kui kahe arvu kuubid on võrdsed, siis on ka need arvud võrdsed. Tõstan võrduse mõlemad pooled kuupi. Selleks kasutan valemit

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

$$38+\sqrt{1445} + 38-\sqrt{1445} + 3\sqrt[3]{(38+\sqrt{1445})(38-\sqrt{1445})}\times$$
$$\times\left(\sqrt[3]{38+\sqrt{1445}} + \sqrt[3]{38-\sqrt{1445}}\right) = 64\,.$$

Allakriipsutatud avaldist saab lihtsustada, kokku võttes saan

$$76 - 3\cdot\left(\sqrt[3]{38+\sqrt{1445}} + \sqrt[3]{38-\sqrt{1445}}\right) = 64\,.$$

Selleks, et võrdus kehtiks, peab sulgudes oleva avaldise väärtus olema 4, kuid just seda oligi tarvis tõestada.
Triinu ei jäänud Taavi lahendusega rahule. Miks?

Tõestame, et kehtib valem, mida tuntakse **liitradikaali valemi** nime all.

TEOREEM: Kui $A > 0$, $B > 0$ ja $A^2 > B$, siis kehtivad valemid

$$\sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A+\sqrt{A^2-B}}{2}} \pm \sqrt{\frac{A-\sqrt{A^2-B}}{2}}$$

TÕESTUS: Tähistame $\sqrt{A+\sqrt{B}} + \sqrt{A-\sqrt{B}} = x$.
Tõstame võrduse mõlemad pooled ruutu, saame

$x^2 = 2A + 2\sqrt{A^2-B}$, kust $x = \sqrt{2A+2\sqrt{A^2-B}}$.

Järelikult $\sqrt{A+\sqrt{B}} + \sqrt{A-\sqrt{B}} = 2\sqrt{\frac{A+\sqrt{A^2-B}}{2}}$.

Analoogiliselt leiame, et $\sqrt{A+\sqrt{B}} - \sqrt{A-\sqrt{B}} = 2\sqrt{\frac{A-\sqrt{A^2-B}}{2}}$.

Liidame või lahutame viimaste võrduste vastavad pooled. Tulemuse jagame kahega. Saamegi valemi, mille kehtivust pidime kontrollima.

Näide: Kas avaldise $\sqrt{4+\sqrt{7}} - \sqrt{4-\sqrt{7}} - \sqrt{2}$ väärtus on positiivne, negatiivne või null?
Antud ülesannet saab lahendada mitmel erineval viisil, üheks võimaluseks on liitradikaali valemi kasutamine. Selle tulemusena saame, et

$$\sqrt{4+\sqrt{7}} = \sqrt{\frac{7}{2}} + \sqrt{\frac{1}{2}} \quad \text{ja} \quad \sqrt{4-\sqrt{7}} = \sqrt{\frac{7}{2}} - \sqrt{\frac{1}{2}}\,.$$

Asendanud need väärtused esialgsesse avaldisse, näeme, et selle väärtus on null.

318. Lihtsusta avaldis.

a) $\sqrt{17+\sqrt{288}}$ b) $\sqrt{3-\sqrt{2}}$ c) $\sqrt{17-\sqrt{288}}$

d) $\sqrt{4\sqrt{2}+2\sqrt{6}}$ e) $\sqrt{17+\sqrt{288}}$ f) $\sqrt{10-2\sqrt{21}}$

319. Lihtsusta avaldis.

a) $(0{,}5a^{0{,}25}+a^{0{,}75})^2 - a^{1{,}5}(a^{-0{,}5}+1)$

b) $\frac{m+n}{\sqrt{m}+\sqrt{n}}\left(\frac{m+n}{\sqrt{mn}} + \frac{n}{m-\sqrt{mn}} - \frac{m}{n+\sqrt{mn}}\right)$

2.11. KÜSIMUSI JA ÜLESANDEID KORDAMISEKS

320. Defineeri naturaalarvulise astendajaga aste, täisarvulise astendajaga aste ja ratsionaalarvulise astendajaga aste. Nimeta astmete omadused ja too nimeid vastavate omaduste kasutamise kohta.

321. Lihtsusta avaldis.

a) $\frac{(-8x^3y^4)^4}{(16x^3y^2)^2\cdot(4x^2y^2)}$ b) $\frac{(27a^3b^3)^2\cdot(-3a^2b)}{(-9a^4b^3)^3}$

322. Arvuta.

a) $\frac{3\cdot 8^{22} - 9\cdot 8^{21}}{24^{20}}$ b) $\frac{5(3\cdot 7^{15} - 19\cdot 7^{14})}{7^{16}+3\cdot 7^{15}}$

c) $\frac{4\cdot 3^{11}+2\cdot 3^{11}}{(19\cdot 27^3)^2}$ d) $\frac{10\cdot 2^n - 5\cdot 2^{n+1}}{6\cdot 2^{n+1}+3\cdot 2^n}$

323. Tõesta, et avaldise väärtus ei sõltu n (n on täisarv) väärtusest.

a) $\frac{27\cdot 3^{2n-1}}{9^{n+1}}$ b) $\frac{32\cdot 4^{n-1}}{2^{2n+1}}$ c) $\frac{16\cdot 8^{2n-1}}{4^{3n-2}}$.

324. Arvuta avaldise väärtus, kui $x = 10$.

a) $3x^3 + 2x^2 + 3x + 9x^0$; b) $6x^{-2} + 3x + 2x^0 - 5x^{-1}$;

c) $3x^{-1} + 2x^{-2} - 4x^{-3}$; d) $x^{-5} + 6x^{-4} + 3x^{-5} + 8x^{-6}$.

325. Teisenda valemeid nii, et nad ei sisaldaks negatiivse astendajaga astet. Mida arvutatakse nende valemite järgi?

a) $v = s\cdot t^{-1}$ b) $F = \gamma m_1 m_2 r^{-2}$ c) $R^{-1} = R_1^{-1} + R_2^{-1}$

326. Lihtsusta avaldis.

a) $18a^2b^{-1}c^0 : (9a^{-1}b)$ b) $2^{-2}p^{-3}q^2 : (2^{-3}pq^{-3})$

c) $(n^{-1}+n^{-2}-n^{-3}) : n^{-4}$ c) $(2a-b)^{-1}\cdot(b-a)^4$

327. Arvuta peast.

a) $32^{0,2}$ b) $8^{\frac{1}{3}}$ c) $1000^{\frac{1}{3}}$ d) $256^{\frac{1}{8}}$ e) $\left(3\frac{3}{8}\right)^{\frac{1}{3}}$ f) $\left(1\frac{7}{9}\right)^{\frac{1}{2}}$ g) $\left(\frac{25}{49}\right)^{\frac{3}{2}}$

328. Arvuta avaldise väärtus.

a) $\left(\frac{1}{16}\right)^{-0,75} + 810000^{0,25} - \left(7\frac{19}{32}\right)^{\frac{1}{5}} + 0,63^0$

b) $\left(3\frac{3}{8}\right)^{\frac{1}{3}} - \left(\frac{9}{4}\right)^{-\frac{1}{2}} + 8^{\frac{2}{3}} + 0,25^{-1}$

c) $0,0625^{0,25} + (-2)^{-2} - (7+2^{-1})^0 + (25^{-0,4}\cdot 5^{\frac{1}{2}}\cdot 5^{\frac{4}{5}})^2$

329. Esita avaldis ratsionaalarvulise astendajaga astme abil.

a) $2\sqrt{2^5\cdot ax^3}$; b) $\sqrt[3]{a^2\sqrt[4]{a}}$; c) $\sqrt[7]{b^3}\cdot\sqrt[4]{b}$.

330. Võrdle arve.

a) $\sqrt[7]{3^3}$ ja $3^{\frac{19}{8}}$; b) $\sqrt[3]{6^5}$ ja $6^{1,7}$; c) 3^{600} ja 5^{400}; c) 7^{30} ja 4^{40}.

331. Missugustel a väärtustel on võrdus tõene

a) $(a^6)^{\frac{1}{6}} = a$; b) $\left(a^4\right)^{\frac{1}{4}} = -a$; c) $\left(a^8\right)^{\frac{1}{8}} = \frac{1}{|a|}$?

332. Koonda sarnased juured.

a) $4\sqrt{8} - 10\sqrt{0,5} + 0,5\sqrt{12} - \frac{1}{3}\sqrt{288}$

b) $\sqrt{1,8} - 0,5\sqrt{180} + 2\sqrt[3]{250} - \sqrt[3]{54}$

c) $2\sqrt{4a^3} + \frac{4}{a}\sqrt{a^5} - 3a^2\sqrt{a^{-1}} - 5a^3\cdot\sqrt{a^{-3}}$

d) $6\sqrt[3]{27a^6b} - \frac{2a^2}{b}\sqrt[3]{125b^4} + 5a\cdot\sqrt[3]{a^3b} - 2\sqrt[3]{a^6b}$

333. Lihtsusta avaldis.

a) $(\sqrt{3} - \sqrt[3]{9} + \sqrt[4]{27})\cdot\sqrt{3}$ b) $(\sqrt{3} - \sqrt[3]{9} + \sqrt[6]{81})\cdot\sqrt[4]{27}$

c) $(\sqrt{a} - \sqrt[3]{ab})\cdot\sqrt{a}$ d) $(m\sqrt{m} + \sqrt{m})\,(\sqrt[3]{m^2} - m\sqrt[4]{m^3})$

334. Vabasta murru nimetaja irratsionaalsusest.

a) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}$ b) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$ c) $\frac{2}{\sqrt{2}}$ d) $\frac{3}{\sqrt{2}+\sqrt{7}}$

335. Lihtsusta avaldis.

a) $\sqrt{17+2\sqrt{30}}\cdot\sqrt{17-2\sqrt{30}}$ b) $(a\sqrt{a} - b\sqrt{b}) : (\sqrt{a} - \sqrt{b}) - \sqrt{ab}$

c) $\frac{1}{4+4\sqrt{x}} - \frac{1}{2-2x} + \frac{1}{4-4\sqrt{x}}$ d) $\left(\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}\right)^2$

III peatükk. LIGIKAUDNE ARVUTAMINE

3.1. TÄPSED JA LIGIKAUDSED ARVUD

Igasugune arvutamine tähendab antud arvude kaudu otsitavate arvude leidmist. Antud arvud on võetud sageli igapäevasest elust, on saadud seega mõõtmise, arvutamise või loendamise teel. Tekib küsimus; kas mõõtmisel, arvutamisel ja loendamisel saadud tulemused on täpsed?

Näide: L. kooli meistrivõistlustel hüppas Aivar kaugust 4,67 m, jooksis 100 m 16,6 sekundiga ja tõukas kuuli 7 m 88 cm.

Kõik esitatud tulemused on saadud mõõtmise teel. Kaugushüppe ja kuulitõuke tulemust mõõdame mõõdulindiga. Mõõtmise käigus mõõdulint ei ole absoluutselt sirge. Samuti pole võimalik täpselt kindlaks määrata Aivari maandumispaika liivakastis, sest liiva pind pole ideaalselt sile. Seega tekivad meil tulemuste täpsuse suhtes kahtlused. 100 meetri jooksu tulemus (mõõdame stopperiga) sõltub mõõtjast. Kas stopper käivitub **täpselt** stardihetkel ja seiskub **täpselt** finišijoone ületamisel? Ilmselt mitte, sest väga palju sõltub siin ajamõõtja reaktsioonivõimest.

Seega võime öelda, et **kõik mõõtmisel saadud arvud on ligikaudsed**.

Arvutamise tulemusena võime saada nii täpseid kui ka ligikaudseid arve. Toome paar näidet.

Kui 10^a klassis on 31 õpilast ja 10^b klassis on 29 õpilast, siis saame, et kahes klassis on kokku 60 õpilast. Saadud arvutustulemus on **täpne arv**.

Olgu vaja jagada 24 meetrit traati 7 võrdseks osaks. Siis iga osa pikkus meetrites on $24 : 7 = 3,42857\ldots$.

Tulemuse kasutamiseks peame seda ümardama. Nii saame jagatiseks **ligikaudse arvu** 3,4 m või 3,43 m.

Valemites, mille järgi arvutatakse vajalikke suurusi, esineb sageli irratsionaalarve (näiteks π, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ jne.). Need irratsionaalarvud asendatakse arvutamisel harilikult arvude ligikaudsete väärtustega. Kui kasutame neid ligikaudseid väärtusi, siis on ka lõpptulemus ligikaudne arv.

Näide: Jalgpallimatšil oli 7856 piletiga pealtvaatajat.

Saadud arv (väljamüüdud piletite arv) on täpne arv. Samuti on täpsed arvud korterite arv majas, lehekülgede arv matemaatika õpikus, kaheksanurga külgede arv, reisijate arv lennukis.

Need arvud on saadud **loendamise** tulemusena. Aga loendamise tulemusena võib saada ka ligikaudse arvu.

Kui ajakirjanik, kes kommenteeris seda jalgpallimatši, väitis, et matšil oli 7856 pealtvaatajat, siis on küllalt suur tõenäosus selleks, et ta eksis. Nimelt ei pruukinud kõik endale pileti ostnud tulla kohale. Ka on võimalik, et mõni pealtvaataja oskas hiilida pileti ostmisest kõrvale.

Müüdud piletite täpne arv ja neist saadud raha huvitab kassiiri. Raadioülekande kuulajale võib huvi pakkuda see, kui suur oli huvi antud matši vastu, kas tribüünid olid jalgpallisõpru täis või hoopis tühjad. Seepärast kogenud raadiokommentaator ümardab esialgset arvu 7856 kas sajalisteni (7900) või tuhandelisteni (8000).

Loendamise tulemus võib olla ligikaudne arv siis, kui loendatavaid objekte on palju, kui nad loendamise ajal muudavad oma asukohta, paiknevad korrapäratult jne.

Loendatakse ka puid metsatukas, metsloomi ja linde, seda, kui palju on kaubamajal külastajaid. Niisugused loendamised kujutavad endast tegelikult tulemuse ligikaudset hindamist. Selline hinnang võib olla täpsem või ebatäpsem, sõltuvalt sellest, milliseid hindamisvõtteid kasutati tulemuse määramiseks.

3.2. ÜMARDAMINE JA ÜMARDAMISVIGA

Ajakirjanik võis piletiomanike arvu 7856 ümardada sajalisteni kahel viisil, nimelt võttes 7856 asemel 7800 või 7900. Esimest ümardamist nimetatakse ümardamiseks **puuduga**, teist aga ümardamiseks **liiaga**.

Vastavalt sellele on arv 7800 arvu 7856 **ligikaudne väärtus puuduga** ja arv 7900 arvu 7856 **ligikaudne väärtus liiaga**.

Loomulikult on kõik ümardamisel saadud arvud ligikaudsed.

Arvu ja tema ligikaudse väärtuse kohta öeldakse, et nad on ligikaudu võrdsed, näiteks $7856 \approx 7900$.

Asendades antud arvu 7856 ükskõik kummaga ligikaudsetest väärtustest (7800 või 7900), teeme vea, mida nimetatakse **ümardamisveaks**. Puuduga ümardamise puhul on ümardamisviga $7856 - 7800 = 56$ ja liiaga ümardamise puhul $7900 - 7856 = 44$.

Selleks, et ümardamisviga oleks võimalikult väike, on kokku lepitud järgmises:

ümardada liiaga, kui esimene ärajääv number on 5, 6, 7, 8 või 9, ja ümardada puuduga, kui esimene ärajääv number on 0, 1, 2, 3, või 4.

Täisarvude ümardamisel asendatakse iga ärajääv number nulliga, kümnendmurdude ümardamisel jäetakse lõpunumbrid lihtsalt ära.

Näide: 2658 ≈ 2700 (ümardatud sajalisteni),

24,683 ≈ 24,7 (ümardatud kümnendikeni).

336. Otsusta, kas alltoodud arvud väljendavad suuruse täpset või ligikaudset väärtust.

a) kooli õpilaste nimekirjas on 379 õpilast;
b) Tallinnas on 500000 elanikku;
c) ringi ümbermõõdu ja läbimõõdu suhe on 3,14;
d) tunnis on 3600 sekundit;
e) rong sõitis Balti jaamast Nõmmele 15 minuti ja 40 sekundiga;
f) kuubil on 12 serva;
g) ringi pindala ja raadiuse ruudu suhe on arv π;
h) Andorra pindala on 453 km^2;
i) poest müüdi nädala jooksul 450 paari kalosse;
j) Saksa matemaatik Carl Friedrich Gauss sündis 30. IV 1777 Braunschweigis.

337. 1) Ümarda kümnelisteni puuduga ja liiaga. Kummal juhul on viga väiksem?

a) 283 b) 4431 c) 28377 d) 32003 e) 6989 f) 201

2) Ümarda kümnendikeni.

a) 444,44 b) 23,3456 c) 45,086 d) 505,035 e) 300,055

338. Ümarda täismeetriteks.

1,7 m;	16,3 m;	28,5 m;	39,4 m;	128 dm;	365 dm;
894 dm;	191 cm;	236 cm;	3799 cm;	5830 cm.	

Missugune on suurim võimalik ümardamisviga, kui ümardame mingi pikkuse täismeetriteks?

339. Missugune on suurim võimalik ümardamisviga, kui ümardame arve reegli järgi kümnendikeni, sajandikeni, tuhandikeni? Too näiteid.

Suurimat võimalikku ümardamisviga nimetatakse ümardamisvea ülemmääraks.

Ümardades arvu kümnelisteni on vea ülemmäär 5, ümardades kümnendikeni on vea ülemmäär 0,05 jne.

Üldiselt:

arvude ümardamisel on ümardamisvea ülemmääraks pool sellest järguühikust, milleni ümardati.

Ümardades arve näiteks sajalisteni on ümardamisvea ülemmääraks pool sajast, s.o. 50.

340. Ümarda järgmised arvud

a) tuhandikeni	b) sajandikeni	c) kümnendikeni
0,31425	29,407	58,705
28,4537	9,095	4,93
4,00852	6,5438	0,854
7,90047	13,2087	128,896
2,83187	2,009	14,061

Kui pärast ümardamist on kümnendike, sajandike, . . . number 0 (viimane number arvus), siis seda ei kustutata. Miks?

Näide: Ümardatult sajandikeni $2{,}997 \approx 3{,}00$, ümardatult kümnendikeni $2{,}997 \approx 3{,}0$ ja ümardatult ühelisteni $2{,}997 \approx 3$.

341. 1) Ümarda järgmised arvud kümnelisteni ja leia ümardamisviga:
604,55; 817,286; 4408,49; 21659,505; 21859,09; 24003,99.

2) Ümarda eelmise ülesande arvud nii, et ümardamisvea ülemmäär oleks
a) 0,5; b) 50; c) 0,05.

3) Teisenda kümnendmurruks $\frac{2}{7}$; $\frac{3}{11}$; $\frac{4}{7}$; $\frac{2}{9}$; $\frac{13}{17}$; $\frac{5}{11}$ täpsusega 0,005, s.t. nii, et saadud kümnendmurru ümardamisel tekkiv viga oleks väiksem kui 0,005.

3.3. MIS ON MÕÕTMINE?

Uurime nüüd, mis on mõõtmine ja mis on mõõtmisviga.

Igapäevases elus tuleb meil mõõta väga erinevaid füüsikalisi suurusi, näiteks massi (kaalu), temperatuuri, kiirust, pikkust jne. Füüsikalisi suurusi mõõdetakse füüsikaliste objektide võrdlemise teel. Objektideks võivad olla füüsikalised kehad, protsessid või muu. Näiteks massi mõõtmise korral võrreldakse kehasid, kiiruse mõõtmise korral aga protsesse. Korraga saab võrrelda ainult kahte objekti omavahel. Kui objekte on rohkem, siis võrreldakse neid paarikaupa.

Kuna mõõtmine tähendab võrdlemist, siis peab olema objekt, mille suhtes võrreldakse. **Erilist objekti, millega kõiki teisi samaliigilisi objekte võrreldakse, nimetatakse võrdlemisele kuuluva suuruse etaloniks.** Füüsikalise suuruse etaloni abil fikseeritud väärtust nimetatakse selle füüsikalise suuruse **mõõtühikuks**. Igal konkreetsel mõõtühikul on konkreetne nimi. Näiteks Pariisis säilitatava etalonvihi massi nimetatakse kilogrammiks.

Mõõtmine võib olla otsene või kaudne. Otsese mõõtmise puhul määratakse mõõtmisele kuuluva suuruse väärtus muid füüsikalisi suurusi mõõtmata. Kaudse mõõtmise korral mõõdetakse otseselt teisi, mõõtmisele kuuluva suurusega tuntud viisil seotud füüsikalisi suurusi. Näiteks Päikese massi vahetult kaalumise teel määrata ilmselt ei õnnestu. Tulemus saadakse antud juhul arvutamise teel.

Üht ja sama füüsikalist suurust on sageli võimalik mõõta mitmel viisil. Näiteks juhtme takistust võib mõõta otseselt oommeetri abil, kaudselt voltmeetri ja ampermeetri abil, ($R = \frac{U}{I}$), kaudselt kalorimeetri, ampermeetri ja kella abil ($R = \frac{Q}{I^2 t}$) jne.

Iga mõõtmistulemus on mingi täpsusega. Mõõtmisel eelistatakse kasutada selliseid mõõtmisvahendeid, mis garanteerivad vajaliku täpsuse minimaalsete kulutuste korral.

Üldine seaduspärasus on selline: mida täpsemini me tahame mõõta, seda kallim on mõõtmisvahend. Kui me tahame mõõta paarikümnesentimeetrise metallvarda pikkust poole millimeetri täpsusega, siis me kasutame selleks lihtsalt millimeeterjaotustega joonlauda. Kui me tahaksime sellesama varda pikkust mõõta poole mikromeetri täpsusega (tuhat korda täpsemalt!), siis peaksime kasutama riista, mis oleks üle tuhande korra kallim lihtsast joonlauast.

Massi määravad kaalumise teel vanaraualao vastuvõtja, heeringamüüja, apteeker ja juveliir. Kõik nad kasutavad erineva täpsusega kaalusid. Kui vanaraualaos ja heeringamüügil kasutataks niisama täpseid kaalusid kui apteegis, siis läheks kaalumine kalliks ja aeganõudvaks ning mõõtmise täpsusest saadav tulu oleks tühine võrreldes tehtud kulutustega. Kui aga riigi kullavarusid kaalutaks tavalise poekaaluga või autokaaluga, siis oleks tehtud vigadest sündinud kahju nii suur, et ületaks mõõtmise odavusest saadava tulu.

Seega, mõõtes on kaks ohtu: ei tohi olla ebatäpne, aga ka ülemäärane täpsus ei too tulu.

342. Selgita, kas antud suurusi saab mõõta otseselt või kaudselt või otseselt ja kaudselt. Too näiteid.

a) silindri ruumala;
b) kaugus Maa ja Kuu vahel;
c) lati pikkus;
d) kaaluvihi mass;
e) kiirus;
f) kiirendus;
g) soojushulk;
h) arheoloogilise leiu vanus;
i) inimese kehatemperatuur;
j) temperatuur Päikese pinnal;
k) tihedus;
l) täisnurkse kolmnurga teravnurkade suurused.

3.4. ABSOLUUTNE VIGA, VEA ALAM- JA ÜLEMTÕKE

Täpse suuruse ligikaudset väärtust nimetatakse ka **lähendiks**.

Olgu meil mingi suurus, mille täpne väärtus on x, aga mõõtmisel saadud ligikaudne väärtus (lähend) a.
Kui suuruse täpsest väärtusest lahutada selle lähend, siis saame **lähendi vea**.

Näiteks, kui täisnurkse kolmnurga 60° nurga vastaskaateti ja lähiskaateti suhte täpne väärtus on $\sqrt{3}$ ja peale mingi konkreetse kolmnurga kaatetite mõõtmist ja jagamistehet saime tulemuseks 1,73, siis võime öelda, et lähendi viga on $\sqrt{3} - 1{,}73 = 0{,}002050808\ldots$.

Lähendi vea leidmiseks on vaja teada nii täpset arvu kui ka selle arvu lähendit. Kui täpne arv on irratsionaalarv (vt. näidet tan 60° kohta), siis ka lähendi viga on irratsionaalarv. Tihti aga ei ole täpset arvu ennast võimalikki leida.

Näide: Õuna kaalumisel kangkaaludel saime õuna massiks 160 g. Saadud tulemus on õuna massi täpse väärtuse lähend. Kui suur on aga lähendi viga, seda me leida ei saa, sest me ei tea õuna täpset massi.

Tavaliselt me ei tea vea märki ega suurust; **küll on meil aga võimalik leida selline positiivne arv, mida lähendi viga ei ületa**.

Oletame, et selle kaalu juurde kuuluvas kaaluvihtide komplektis olid kõige väiksemad vihid 5-grammised. Kui kaal oli korras ja me kaalumisel ei eksinud, võime olla kindlad, et õuna mass oli vahemikus $(160 - 5)$ g $= 155$ g kuni $(160 + 5)$ g $= 165$ g.

Sellist võimalikult väikest positiivset arvu, mida lähendi vea absoluutväärtus ei ületa, nimetatakse absoluutse vea ülemmääraks ehk absoluutseks veaks.

Antud näites oli absoluutseks veaks 5 g.

Absoluutne viga esitatakse lähendiga samades mõõtühikutes.

Kui tähistada mingi suuruse tõelist väärtust x-ga, lähendit a-ga ja absoluutset viga Δa[1]-ga, siis võime kirjutada

$$a - \Delta a \leqslant x \leqslant a + \Delta a$$

Lühidalt kirjutatakse seda kujul

$$x = a(\pm \Delta a)$$

ja loetakse: „x võrdub a-ga absoluutse veaga mitte üle Δa".

Öeldu põhjal kirjutis $x = 160(\pm 5)$ g tähendab sama mis kirjutis

$155 \text{ g} \leqslant x \leqslant 165$ g.

Arvud 155 g ja 165 g on õuna massi **tõkked**, nimelt 155 g on **alamtõke** ja 165 g on **ülemtõke**.

Arve $a - \Delta a$ ja $a + \Delta a$ nimetatakse vastavalt suuruse x alamtõkkeks ja ülemtõkkeks.

Alamtõket tähistame tähega m ja ülemtõket tähega M.

Võime öelda, et suuruse täpne väärtus on tema tõkete vahel, s.t. täpne väärtus pole väiksem alamtõkkest ja pole suurem ülemtõkkest:

$$a - \Delta a \leqslant x \leqslant a + \Delta a.$$

[1] Δa — kreeka täht delta

Näide: Poisi pikkuse mõõtmisel saadi lähendiks 178 cm. Lähendi absoluutse vea ülemmääraks hinnati 1 cm. Seega sellest, et poisi pikkus p avaldub kujul $p = 178(\pm 1)$ cm, järeldub, et $177 \leqslant p \leqslant 179$. Seega võib öelda, et selle poisi pikkus on lõigus [177; 179] cm. Kummale arvule tõeline väärtus lähemal on, seda öelda ei saa.

Mõnikord on absoluutne viga mõõteriistade täpsusega juba ette määratud. Teistel juhtudel saab absoluutset viga arvutada, tuginedes valemites kasutatavate lähteandmete täpsusele.

Ümardamisel tekkinud absoluutne viga ei ületa viimase säilitatud järgu poolt ühikut, s.t. viimase säilitatud ühiku põhjal saab määrata absoluutse vea. Näiteks, kui ümardatud arv on 123, siis absoluutne viga on pool ühelist, s.t. 0,5. Kui ümardatud arv on 12,7, siis ei ületa absoluutne viga poolt kümnendikku, s.t. 0,05.

Oletame, et teame arvu x alamtõket m ja ülemtõket M. Leiame tõkete poolsumma ja poolvahe:

$$\frac{M+m}{2} = \frac{a + \Delta a + a - \Delta a}{2} = \frac{2a}{2} = a$$

$$\frac{M-m}{2} = \frac{a + \Delta a - (a - \Delta a)}{2} = \frac{2\Delta a}{2} = \Delta a.$$

Teeme saadud tulemustest järeldused.

Ligikaudse arvu x lähend a on selle ligikaudse arvu ülem- ja alamtõkke poolsumma ning absoluutne viga on ülem- ja alamtõkke poolvahe.

$$m \quad \underbrace{a - \Delta a \qquad a \qquad a + \Delta a}_{\Delta a \quad \Delta a} \quad M$$

$$\boxed{a = \frac{m+M}{2}, \quad \Delta a = \frac{M-m}{2}}$$

Näide: Kui $5{,}4 \leqslant x \leqslant 5{,}6$, siis arvu x lähend on

$a = \frac{5{,}4 + 5{,}6}{2} = 5{,}5$ ja absoluutne viga $\Delta a = \frac{5{,}6 - 5{,}4}{2} = 0{,}1$.

Järelikult $x = 5{,}5\ (\pm 0{,}1)$.

Kui absoluutne viga on esitatud suurema täpsusega kui lähend, siis ümardatakse absoluutne viga niisama täpseks kui lähend.

Näide: Kui $x = 4{,}32\ (\pm 0{,}0215)$, siis ümardatakse ka absoluutne viga kahe kohani pärast koma. **Absoluutne viga ümardatakse alati liiaga.** Vastasel juhul võime saada arvu x tõkked, mille vahel seda arvu polegi. Kirjutame seega $x = 4{,}32(\pm 0{,}03)$.

Samal põhjusel ümardatakse alamtõke alati puuduga ja ülemtõke liiaga. Näiteks $158 \leqslant x \leqslant 181$ asemel võib kirjutada kümnelisteni ümardatult $150 \leqslant x \leqslant 190$.

443. 1) Mis on lähend, lähendi viga, absoluutne viga?
2) Miks absoluutne viga ümardatakse liiaga, alamtõke puuduga?
Mis võib juhtuda, kui nii ei tee? Too näiteid.

344. Leia absoluutne viga, kui lihtmurd $\frac{4}{7}$ asendada kümnendmurruga täpsusega 0,01.

345. Leia arvude 1300; 135; 24; 5,4; 2,87; 0,329 absoluuutne viga.

346. Leia arvu x lähend ja absoluutne viga.

a) $16 \leqslant x \leqslant 18$ b) $4{,}31 \leqslant x \leqslant 4{,}47$ c) $152 \leqslant x \leqslant 168$

d) $4{,}32 \leqslant x \leqslant 4{,}46$ e) $5{,}302 \leqslant x \leqslant 5{,}408$ f) $16{,}824 \leqslant x \leqslant 16{,}888$

347. Ümarda absoluutne viga ja leia ligikaudse arvu tõkked.

a) 4,2 ($\pm$ 0,25) b) 7,3 ($\pm$ 0,28) c) 44,6 ($\pm$ 0,86)

d) 0,05 ($\pm$ 0,003) e) 4016 ($\pm$ 1,85) f) 322 ($\pm$ 4,23)

348. Ümarda tõkked kümnendikeni ja leia absoluutne viga.

a) $4{,}22 \leqslant x \leqslant 4{,}65$ b) $7{,}38 \leqslant x \leqslant 7{,}46$ c) $18{,}374 \leqslant x \leqslant 18{,}443$

d) $82{,}635 \leqslant x \leqslant 82{,}847$ e) $0{,}23 \leqslant x \leqslant 0{,}45$ f) $0{,}11 \leqslant x \leqslant 0{,}21$

349. On teada, et $u = 7{,}2$ ($\pm$ 0,3). Kas u võib olla 7,4; 7,3; 7,2; 7,1; 7,0; 6,5; 7,5; 9,5?

350. 1) Mida võib öelda summa $m + n$ kohta, kui $10 \leqslant m \leqslant 12$ ja $5 \leqslant x \leqslant 6$? Kuidas leida summa tõkkeid, kui liidetavate tõkked on teada?

2) Mida võib öelda korrutise $a \cdot b$ kohta, kui $3 < a < 4$ ja $5 < b < 6$? Kuidas leida korrutise tõkkeid, kui tegurite tõkked on teada?

3) Mida võib öelda vahe $a - b$ kohta, kui $10 < a < 12$ ja $3 < b < 4$? Kuidas leida vahe tõkkeid, kui vähendatava ja vähendaja tõkked on teada?

4) Mida võib öelda jagatise $a : b$ kohta, kui $14 < a < 15$ ja $2 < b < 3$? Kuidas leida jagatise tõkkeid, kui jagatava ja jagaja tõkkeid teame?

351. Kuu tiirlemisel ümber Maa tema kaugus Maast muutub. See kaugus on avaldatav kujul l = 381 600 ($\pm$ 25 200) km. Leia tõkked, mille vahel asetseb Kuu kaugus Maast. Päikese ja Maa vahelise kauguse k tõkked on 147,1 milj. km $\leqslant k \leqslant$ 152,1 milj. km. Leia Päikese kaugus Maast.

3.5. SUHTELINE EHK RELATIIVNE VIGA

Absoluutne viga ei iseloomusta küllaldaselt mõõtmiste ja arvutuste täpsust. Kui maja pikkuse mõõtmisel on absoluutse vea ülemmäär 1 m, siis annab see tunnistust lohakast mõõtmisest. Kahe raudteejaama vahelise kauguse mõõtmisel absoluuutne viga 1 m näitab, et mõõdetud on väga täpselt. Et hinnata mõõtmise kvaliteeti, tuleb absoluutset viga võrrelda mõõtmisel saadud tulemusega, s.t. tuleb vaadelda absoluutse vea suhet mõõtmistulemusse.

Ligikaudse arvu absoluutse vea ja lähendi jagatist nimetatakse lähendi suhteliseks ehk relatiivseks veaks.

Kui $x = a$ ($\pm \Delta a$), siis lähendi relatiivne viga δ avaldub valemiga

$$\delta = \frac{\Delta a}{a}.$$

Kahest ligikaudsest arvust on suhteliselt täpsem see, mille relatiivne viga on väiksem.

Relatiivset viga avaldatakse tavaliselt protsentides, s.t. näidatakse, mitu protsenti on absoluutne viga antud lähendist.

Nagu absoluutset viga, ümardatakse relatiivset viga alati liiaga. Kui näiteks jalgpalli kõrguse mõõtmisel on saadud tulemuseks 23 ($\pm$ 0,4) m, siis saame mõõtmise relatiivse vea mitte kujul $\frac{0{,}4}{23} \cdot 100\% \approx 1{,}7391304\%$, vaid ümardatult ülespoole kujul 1,8%.

Teades suhtelisi vigu, saab võrrelda mõõtmiste või vaatluste täpsust.

Näide. Olgu kahe mõõtmise tulemused järgmised: 502 ($\pm$ 0,5) m ja 24,5 ($\pm$ 0,1) m. Esimese mõõtmise suhteline viga on $\frac{0{,}5}{502} \cdot 100\% = 0{,}1\%$ mõõdetud suurusest; teisel juhul $\frac{0{,}1}{24{,}5} \cdot 100\% = 0{,}4\%$ mõõdetud suurusest. Seega on esimene mõõtmine neli korda täpsem kui teine.

Suhtelise vea valemist $\delta = \frac{\Delta a}{a}$ saab avaldada absoluutse vea Δa: $\Delta a = a \cdot \delta$.

Seega saame suhtelise vea ja lähendi abil leida absoluutse vea ja tõkked, mille vahel asub täpne väärtus x.

Et $\Delta a = a \cdot \delta$, siis

$a - a\delta \leqslant x \leqslant a + a\cdot\delta$ ehk

$a(1 - \delta) \leqslant x \leqslant a(1 + \delta)$.

Järelikult, kui ligikaudse väärtuse suhteline viga on δ, siis täpne väärtus x asetseb arvude $a(1 - \delta)$ ja $a(1 + \delta)$ vahel. Mõnikord kirjutatakse seda järgmiselt:

$x = a(1 \pm \delta)$.

Näide. Leiame ligikaudse arvu 2,51 absoluutse ja relatiivse vea.

Absoluutne viga on $\Delta a = \frac{0{,}01}{2}$ (*miks?*)

ja relatiivne viga $\delta = \frac{0{,}005}{2{,}51} \cdot 100\% \approx 0{,}2\%$.

Näide. Mingi koormuse kaalumisel saadi tulemuseks 5,58 kg. Absoluutne viga on 5 g. Leiame relatiivse vea ja tõkked, mille vahel asub koormuse tõeline väärtus.

Relatiivne viga $\delta = \frac{5}{5580} \cdot 100\% \approx 0{,}09\%$.

Alamtõke on 5,575 kg ja ülemtõke 5,585 kg.

Näide: Leiame ligikaudse arvu absoluutse vea ja tõkked, mille vahel asub täpne arv, kui $a = 67{,}8$ ja $\delta = 0{,}5\%$.

Valemi $\Delta a = a \cdot \delta$ järgi saame, et $\Delta a = 67{,}8 \cdot 0{,}005 = 0{,}3390 \approx 0{,}4$ (*miks?*). Alamtõke on 67,4 ja ülemtõke on 68,2.

352. Kumb ligikaudsetest arvudest on täpsem?

a) 52 või 52 ($\pm 0{,}6$)
b) 240 või 240 ($\pm 0{,}5$)
c) 7,8 või 7,8 ($\pm 0{,}1$)
d) 3,14 või 3,14 ($\pm 0{,}002$)

353. Ruumi pikkuse mõõtmisel saadi tulemuseks 8,0 m. Kui suur on relatiivne viga pikkuse iga meetri kohta?

354. Arvuta järgmiste ligikaudsete arvude relatiivse vea ülemmäärad.

a) 6 ($\pm 0{,}2$)
b) 5,40
c) 7700
d) 15 ($\pm 0{,}7$)
e) 16,0
f) 5,60
g) 234 ($\pm 3{,}5$)
h) 4650
i) 3,14 ($\pm 0{,}002$)

355. Arvu $\pi = 3{,}14159\ldots$ lähisväärtusena kasutatakse sageli arvu 3,14 või 3,1416. Kummal juhul on relatiivne viga väiksem?

356. Koolimajast kaupluseni on 150 meetrit ja raudteejaamani 1,5 km. Kumb kaugus on täpsemalt teada?

357. Pliiatsi pikkus on 18 cm relatiivse veaga mitte üle 1%. Leia absoluutse vea ülemmäär.

358. Täida tabel.

Arvu ligikaudne väärtus	Absoluutse vea ülemmäär	Relatiivse vea ülemmäär	Alamtõke	Ülemtõke
25	1			
60,5	0,5			
30,0				
55				
4,6		2%		
15,6		0,5%		
			23,6	24,4
			4,46	5,52

359. 1) Suuruse x relatiivse vea ülemmäär on $p\%$. Avalda tõkked.
2) Suuruse y alamtõke on a ja relatiivse vea ülemmäär on $q\%$. Avalda ülemtõke.

3.6. ARVU ÕIGED NUMBRID. TÜVENUMBRID. STANDARDKUJU

3.6.1. ARVU ÕIGED NUMBRID

Nagu varem öeldud, kasutame sageli täpsete arvude asemel nende ligikaudseid väärtusi. Näiteks Eesti elanike arv oli 1881. a. 882 000, 1934. a. 1 061 300 ja 1979. a. 1 465 800. Me ei oska öelda, kas arvus 1 465 800 viimased nullid on õiged või on tekkinud ümardamise tulemusena. Kui on saadud ümardamise tulemusena, siis me ei tea, kas ümardati kümnelisteni või sajalisteni. Seega on arvus 1 465 800 viimased nullid kahtlased numbrid.

Üldiselt toimitakse järgmiselt:

Ligikaudse arvu mingit numbrit nimetatakse õigeks numbriks, kui absoluutne viga ei ületa selle järgu poolt ühikut. Kui viga on suurem kui mingi järgu pool ühikut, siis selle järgu ühikut ja sellest järgust paremal asuvaid numbreid nimetatakse kahtlasteks numbriteks.

Märkus. Mõistet „õiged numbrid" võib võtta peaaegu otseses mõttes. Ainult viimane n õigest numbrist võib täpse arvu vastavast numbrist erineda ühe võrra, kuid seejuures täpse ja ligikaudse arvu vahe ei ületa selle koha poolt ühikut. Ent mõnikord ei saa mõistet „õiged numbrid" võtta sõna-sõnalt. Näiteks arvu 2,9997 ümardamisel täpsuseni 0,001 saame 3,000 nelja õige numbriga, kuid mitte ükski arvu x (2,9997) numbritest ei ühti arvu a (3,000) numbritega.

Kui ligikaudses arvus a ei ole kõik numbrid õiged, siis tekib küsimus: mitu õiget numbrit seal on? Selle küsimuse mõte on järgmine: Millise järguni antud arv ümardada, et järele jääksid kõik õiged numbrid?

Kui absoluutne viga on suurem kui säilitatava järgu pool ühikut, siis kirjutatakse see sageli ligikaudsest arvust paremale sulgudesse. Näiteks kirjutis 1,34 ($\pm 0{,}03$) näitab, et absoluutne viga on 0,03. See on rohkem kui pool säilitatud sajandike järgu ühikust ja seepärast on viimane säilitatud number 4 kahtlane number. Arvul 24,25 ($\pm 0{,}18$) on kaks kahtlast numbrit, sest absoluutne viga on suurem, kui 0,05. Kahtlased on kümnendike ja sajandike numbrid.

Õigete numbrite definitsioon ja toodud näidete põhjal võib sõnastada õigete numbrite määramise juhise.

Et määrata ligikaudse arvu õigeid numbreid, tuleb ligikaudse arvu alla kirjutada tema absoluutne viga nii, et samanimelised järgud jääksid ühte reasse.

Kui absoluutse vea esimene nullist erinev number on viiest väiksem, viis või viis järgnevate nullidega, siis on ligikaudse arvu vastavast järgust kõik vasakul asuvad numbrid õiged.

Kui absoluutse vea esimene nullist erinev number on viiest suurem või viis sellele järgnevate nullist erinevate numbritega, siis on ligikaudse arvu

vastavast järgust kõik vasakul asuvad numbrid õiged peale ühe (äärmise parempoolse).

Näide 1: Määrame arvu 35,24 (± 0,04) õiged numbrid. Selleks kirjutame vastavalt eespool toodud juhisele arvu alla tema absoluutse vea

35,24
0,04

Absoluutse vea esimene nullist erinev number on 4 (sajandikku). See on viiest väiksem ja järelikult on õiged numbrid 3, 5 ja 2.

Näide 2: Määrame arvu 242189 (± 500) õiged numbrid. Kirjutame vastavalt eeskirjale

242189
500

Absoluutse vea esimene number on 5 (sajalist) ja sellele järgnevad kaks nulli. Järelikult on ligikaudse arvu õiged numbrid 2, 4 ja 2.

Näide 3: Määrame arvu 74,23 (± 0,06) õiged numbrid. Vastavalt juhisele kirjutame

74,23
0,06

Absoluutse vea esimene nullist erinev number on 6 (viiest suurem), siin on kaks, mitte kolm õiget numbrit. Need on 7 ja 4.

Näide 4: Määrame arvu 2,53 (± 0,055) õiged numbrid. Vastavalt juhisele kirjutame

2,53
0,055

Absoluutse vea esimene nullist erinev number on 5 ja sellele järgneb samuti nullist erinev number. Järelikult on ainult üks õige number, s.o. 2.

3.6.2. ARVU TÜVENUMBRID

Kui ligikaudsetes arvudes 112340; 4,0528 ja 0,0328 koma ja nullid arvu algusest ja lõpust ära jätta, siis tekkinud arve 11234; 40528 ja 328 nimetatakse esialgsete **arvude tüvedeks**. Arvu tüves esinevad numbrid on arvu **tüvenumbrid**. Seega esimesel arvul on 5, teisel arvul 5 ja kolmandal arvul 3 tüvenumbrit.

Ligikaudse täisarvu tüveks nimetatakse seda arvu, mille saame, kui arvu lõpus olevad nullid ära jätame.

Ligikaudse kümnendmurru tüveks nimetatakse seda arvu, mille saame, kui koma ja arvu alguses olevad nullid ära jätame.

Erandlikult võivad ligikaudse täisarvu lõpunullidest üks või mitu kuuluda tüvenumbrite hulka. Kümnendmurru lõpus säilitatud nullid kuuluvad alati tüvenumbrite hulka.

Näide 1: Ümardades arvu 2502 kümnelisteni, saame 2500. Sel juhul ligikaudne arv 2500 sisaldab kolm tüvenumbrit: 2, 5, ja 0. Kümneliste number 0 on tüvenumber, sest see on järgus, milleni toimus ümardamine, üheliste number 0 ei ole tüvenumber. Kui arvu 540023 ümardada sajalisteni, siis saame arvu 540000, millel on neli tüvenumbrit 5, 4, 0 ja 0. Antud juhul on sajaliste number 0 tüvenumber, sest ta seisab säilitatud järgus.

Vaadeldud näidetest ilmneb, et ligikaudse täisarvu tüvenumbrite määramisel on vaja teada, millise täpsusega ligikaudne täisarv on võetud. Kui see ei ole teada, siis täisarvu lõpus olevaid nulle tüvenumbreiks ei loeta.

Järgnevalt vaatleme nulle kümnendmurru lõpus. Kui kümnendmurd 0,5203 ümardada tuhandikeni, siis saame 0,520, millel on kolm tüvenumbrit. Antud juhul on 0 murru lõpus tüvenumber, sest see seisab säilitatava järgu kohal ja seepärast seda ei või kirjutamata jätta. Kui jätame nulli ära, siis saame 0,52, mis näitab, et on ümardatud sajandikeni, mitte aga tuhandikeni. Paremalt nulli äräjätmine vähendab ümardatud kümnendmurru täpsust. Seetõttu on ligikaudse kümnendmurru lõpus asuvad nullid alati tüvenumbrid, vastasel juhul neid üldse ei kirjutata. Seega arv 2,0540 sisaldab viis tüvenumbrit, arv 0,3500 neli tüvenumbrit.

Näide 2: Arvu 37,4 tüvenumbrid on 3, 7 ja 4;
arvu 0,073 tüvenumbrid on 7 ja 3;
arvu 0,0730 tüvenumbrid on 7, 3 ja 0;
arvu 26000 tüvenumbrid on 2 ja 6 (me ei tea, missuguse järguni on ümardatud).

360. Mitu tüvenumbrit on igal järgneval kümnendmurrul?
a) 6,3 b) 0,603 c) 2,004 d) 104,02 e) 0,0084 f) 2,60
g) 0,090 h) 0,300

361. Mis erinevus on kahel järgmisel kirjutisel „metallvarda pikkus on 25 cm" ja „metallvarda pikkus on 25,0 cm"?

362. Väljenda kilogrammides 3540 g, 7200 g, lugedes nulle
a) õigeteks numbriteks b) kahtlasteks numbriteks.

363. Ringi ümbermõõdu ja läbimõõdu suhe $\pi = 3{,}14159\ldots$. Võttes $\pi = 3{,}14$ ja $\pi = 3{,}15$, näita nende arvude õiged ja kahtlased numbrid.

364. Näita järgmiste ligikaudsete arvude õiged ja kahtlased numbrid.
a) 3484 (± 8) b) 4,35 (± 0,02) c) 8,03 (± 0,05)
d) 0,250 (± 0,001) e) 4,0892 (± 0,001)

365. Ümarda arvud nii, et sellesse jääks üks tüvenumber.
a) 36 b) 28,4 c) 358 d) 0,68 e) 381,16;

kaks tüvenumbrit
f) 1315 g)732 h) 0,8246 i) 44,32 j) 327,85;
kolm tüvenumbrit.
k) 4157 l) 8377 m) 52,834 n) 68,731 o) 5,0895

366. Kirjuta neli arvu, mille tüvenumbrid on
a) 1-3-2 b) 2-0-6 c) 1-0-2-7 d) 3-7-0.

3.6.3. ARVU STANDARDKUJU

Ümardades ühelisteni arvu 300,3 saame arvu $300,3 \approx 300$. Lähendi viga on 0,3 ning tüvenumbrid on 3, 0 ja 0. Selle märkimiseks, et mõni või kõik täisarvu lõpunullidest on tüvenumbrid, on otstarbekas kasutada arvu **standardkuju**.

Arvu esitamiseks standardkujus kirjutatakse see arv kahe teguri a ja b korrutisena. Esimeseks teguriks on arvu tüvi. Tüvi kirjutatakse nii, et $1 \leq a < 10$. Teiseks teguriks on kümne aste.

Näited: a) $68,7 = 6,87 \cdot 10^1$;
b) $730 = 7,3 \cdot 10^2$;
c) $0,6 = 6 \cdot 10^{-1}$;
d) ümardades kümnelisteni $738 \approx 740 = 7,4 \cdot 10^2$;
e) ümardades ühelisteni $1300,4 \approx 1300 = 1,300 \cdot 10^3$;

Standardkujul antakse üldjuhul ülesannete lõppvastused. Standardkujul tehakse tehted väga paljudes füüsika ülesannetes.

Näide: Kui suur jõud mõjub kahe punktlaengu $q_1 = 9$ nC ja $q_2 = 3$ nC vahel, kui laengutevaheline kaugus on 3μm?

Laengute vahel mõjuv jõud arvutatakse valemist $F = k \cdot \frac{q_1 \cdot q_2}{r^2}$, kus r on laengute vaheline kaugus ja k on konstant.

Seega $F = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{9 \cdot 10^{-9} \cdot 3 \cdot 10^{-9}}{9 \cdot 10^{-12}}$ N $= 27 \cdot 10^3$ N $= 2,7 \cdot 10^4$ N.

367. Kirjuta arv standardkujul.
a) 360 b) 4500 c) 7382 d) 281,4 e) 24300
f) 380,08 g) – 21,4 h) – 2800 i) – 0,4 j) – 0,32

368. Kirjuta standardkujuline arv tavalisel kujul.
a) $1,2 \cdot 10^3$ b) $4 \cdot 10^3$ c) $1,82 \cdot 10^2$ d) $5,3 \cdot 10^5$
e) $4,3752 \cdot 10^2$ f) $4 \cdot 10^{-3}$ g) $4 \cdot 10^{-2}$ h) $5,1 \cdot 10^{-3}$

369. Kui suure jõuga tõmbuvad teineteise poole kaks 1 kg massiga keha, kui nendevaheline kaugus on 1 m?

370. Kui suur jõud mõjub kahe punktlaengu $q_1 = 4$ pC ja $q_2 = 3$ nC vahel, kui laengutevaheline kaugus on 5 mm?

3.7. LIGIKAUDSETE ARVUDE LIITMINE JA LAHUTAMINE

Kuna mõõtmistulemused on ligikaudsed, siis võib väita, et igapäevaelus arvutame enamasti ligikaudsete arvudega. Kui lähteandmed on ligikaudsed, siis on kõik väärtused, mis neist arvutatakse, ligikaudsed.

Meid huvitab, kui suur on nende arvutustulemuste absoluutne viga? Olgu meil kaks ligikaudset arvu $x = a (\pm \Delta a)$ ja $y = b (\pm \Delta b)$.

Et paljusid arvutusi saab taandada liitmisele, lahutamisele, korrutamisele ja jagamisele, siis leiame, kui suur on absoluutse vea ülemmäär avaldistel $x + y$, $x - y$, xy, ja $\frac{x}{y}$. Selleks leiame nende avaldiste ülemtõkked ja alamtõkked ning määrame nende abil absoluutse vea.

Summa absoluutne viga

Et summa on maksimaalne siis, kui liidetavad on võimalikult suured, ja minimaalne siis, kui liidetavad on võimalikult väiksed, siis

$$(a - \Delta a) + (b - \Delta b) \leq x + y \leq (a + \Delta a) + (b + \Delta b)$$

ehk

$$a + b - (\Delta a + \Delta b) \leq x + y \leq a + b + (\Delta a + \Delta b)$$

Tulemusest nähtub, et

ligikaudsete arvude summa absoluutne viga võrdub liidetavate arvude absoluutsete vigade summaga.

Tähistame summa absoluutse vea sümboliga $\Delta(a + b)$. Eelneva põhjal on siis

$$\Delta(a + b) = \Delta a + \Delta b.$$

Näide: Kui $x = 6,7 (\pm 0,2)$ ja $y = 8,5 (\pm 0,3)$, siis x ja y summa ligikaudne väärtus on $6,7 + 8,5 = 15,2$ ja selle väärtuse absoluutne viga on

$$0,2 + 0,3 = 0,5$$

Seega $x + y = 15,2 (\pm 0,5)$.

Vahe absoluutne viga

Vahe on maksimaalne siis, kui vähendatav on võimalikult suur ja lahutatav võimalikult väike. Vahe on minimaalne siis, kui vähendatav on võimalikult väike ja lahutatav võimalikult suur. Seega

$$(a - \Delta a) - (b + \Delta b) \leq x - y \leq (a + \Delta a) - (b - \Delta b)$$

ehk

$$a - b - (\Delta a + \Delta b) \leq x - y \leq a - b + (\Delta a + \Delta b)$$

Tulemusest nähtub, et

ligikaudsete arvude vahe absoluutne viga võrdub nende arvude absoluutsete vigade summaga.

Tähistame vahe $a - b$ absoluutse vea sümboliga $\Delta(a - b)$. Eelneva põhjal

$\Delta(a - b) = \Delta a + \Delta b$.

Ligikaudsete arvude liitmine

Olgu vaja liita mõned ligikaudsed arvud, milles on võrdne arv kümnendkohti ja iga liidetava absoluutne viga on pool viimase koha ühikut, siis n liidetava korral absoluutne viga kasvab kuni $0{,}5n$ viimase koha ühikut.

Näide: Arvuta 517,37 + 26,77 + 88,29.

Iga liidetava absoluutne viga on 0,005. Liites saame 632,43. Summa absoluutne viga on 0,005·3 = 0,015. Rakendades õigete numbrite määramise juhendit, näeme, et saadud summal on neli õiget numbrit ja viimane number 3 on kahtlane. Säilitades ainult õiged numbrid, saame tulemuseks 632,4.

Liites ligikaudseid arve, millel on võrdne arv õigeid kümnendkohti, võib tulemuses säilitada niisama palju kümnendkohti, kui neid on igas ligikaudses liidetavas.

Leiame näiteks summa $\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}$ täpsusega 0,001.

Et $\frac{1}{3} \approx 0{,}333$, $\frac{1}{6} \approx 0{,}167$ ja $\frac{1}{12} \approx 0{,}083$, siis summa

$\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12} \approx 0{,}333 + 0{,}167 + 0{,}083 = 0{,}583.$

Kontrollime, kas saadud summa viimane number on õige. Selleks liidame antud murrud ja teisendame summa kümnendmurruks, saame 0,5833 . . . . Järelikult on kõik numbrid esialgses tulemuses õiged.

Vaatleme juhtumit, kui liidetavates on erinev arv kümnendkohti.

Näide: Arvuta 681,25 + 34,1 + 0,0327.

Summa absoluutne viga on 0,005 + 0,05 + 0,00005 = 0,05505.

Liites antud arvud saame tulemuseks 715,3827. Summa viga on 550,5 viimase koha ühikut ning on täiesti ilmne, et nii suure kohtade arvuga ei ole mõtet seda summat kirjutada. Lihtne on veenduda, et summas on kolm õiget numbrit ja juba neljas number — 3 on kahtlane. Seega summa kõigi õigete numbritega on 715 ja ühe kahtlase numbriga 715,4.

Ligikaudsete arvude liitmisel säilitatakse igas liidetavas ja summas niisama palju kümnendkohti, kui neid on kõige väiksema kümnendkohtade arvuga liidetavas.

Suurema täpsuse saavutamiseks võib liidetavates säilitada ühe kümnendkoha rohkem, kui on liidetavates (nn. varunumber), kuid summa tuleb ikka ümardada juhises nimetatud kümnendkohani.

Analoogiliselt toimub ümardamine ka siis, kui summas esineb ligikaudseid täisarvulisi liidetavaid. Olgu vaja liita 2400 + 222 + 65,5. Juhise järgi tuleb kõik arvud ümardada sajalisteni, ümardame aga kõik liidetavad ühe varunumbriga, s.o. kümnelisteni. Tulemuseks saame: 2400 + 220 + 70 = 2690 ≈ 2700. Kontrolli iseseisvalt, kas kõik tüvenumbrid on õiged, või on mõni neist kahtlane.

Märkus: Toodud juhised sobivad rakendamiseks tavaliste arvutuste korral, kuid täpsemateks arvutusteks on need liiga ligikaudsed, eriti siis, kui summas on palju väikseid liidetavaid.

Näide: Leia summa 5352,70 + 256,450 + 32,2150 + 1,24430.

Ligikaudsete arvude ümardamise reegli järgi on igal liidetaval siin kuus õiget numbrit. Ka summas ei saa olla üle kuue õige numbri. Säilitame esimeses liidetavas kõik kuus õiget numbrit ja ümardame teised liidetavad tuhandikeni.

Saame 5352,70 + 256,450 + 32,215 + 1,244 = 5642,61.

Ligikaudsete arvude lahutamine

Ligikaudsete arvude lahutamisel vaatleme kahte juhtu: a) kui vähendatav ja vähendaja erinevad teineteisest tunduvalt ja b) kui vähendatav ja vähendaja on teineteisele lähedased.

Kui vähendatav ja vähendaja erinevad teineteisest tunduvalt, siis toimub lahutamine liitmise juhise järgi.

Näide:

a) $\begin{array}{r} 52{,}39 \\ -\ 10{,}82 \\ \hline 41{,}51 \end{array}$ b) $\begin{array}{r} 321{,}43 \\ -\ 20{,}1132 \\ \hline 301{,}32 \end{array}$ c) $\begin{array}{r} 137{,}8724 \\ -\ 82{,}35 \\ \hline 55{,}52 \end{array}$

Saadud vahe õigete numbrite määramisel peab arvestama, et ligikaudsete arvude kirjutamise juhise kõrval on vähendatava ja vähendaja absoluutne viga 0,005. Seega on vahe absoluutne viga 0,01 ja kõigil kolmel juhul on viimane number kahtlane number.

Niisiis, **tulemuses säilitatakse kõige madalam järk, mis nii vähendatavas kui vähendajas on teada.**

Vaatleme nüüd juhtu, kui arvud erinevad üksteisest vähe.

Näide: Leiame arvude 0,8741 ja 0,8726 vahe.

Pärast lahutamist saame 0,0015. Eeldame, et antud arvude kõik numbrid olid õiged, ja seega nende absoluutne viga on 0,00005 ning relatiivne viga 0,01%. Vahe absoluutne viga on 0,0001 ja relatiivne viga võrdub

$\frac{0{,}0001}{0{,}0015} = \frac{1}{15} \approx 0{,}067 = 6{,}7\%.$

Saadud vahes on ainult üks õige number. Et toodud näites saada vahe nelja õige numbriga, peab vähendatavas ja vähendajas olema 6 — 7 õiget numbrit.

Kalkulaatori või arvutiga arvutades andmeid enne arvutamist ei ümardata. Seda tuleb teha vaid juhul, kui muidu ei mahu arv tabloole. Näiteks summa

$12{,}3786 + 3{,}24 = 15{,}6186 \approx 15{,}62$.

Mitme tehtega ülesandes me samuti eelnevalt ei ümarda, näiteks

$12{,}3786 + 3{,}24 = 15{,}6189 + 0{,}1 = 18{,}745 \approx 18{,}7$.

371. Arvuta ligikaudsete arvudega.

a) $3{,}5 + 34{,}38$
b) $34{,}23 + 89{,}54857$
c) $3450 + 23{,}2$
d) $46{,}5 + 0{,}899$
e) $234 + 380$
f) $456{,}03 + 0{,}3587$
g) $89{,}93 + 2{,}333$
h) $3{,}456 + 124{,}9483$
i) $1{,}(3) + 4{,}56$
j) $56{,}3 + 12{,}(3)$

372. Arvuta ligikaudsete arvudega.

a) $234{,}5 - 12{,}36$
b) $5678 - 12{,}34567$
c) $90{,}4657 - 23{,}17345$
d) $9475{,}3 - 50$
e) $3450 - 700$
f) $345{,}34 - 4{,}30$
g) $12{,}56 - 11{,}0$
h) $374{,}59 - 0{,}33$
i) $15{,}9846 - 15{,}94321$
k) $99{,}99 - 99{,}8889$

373. Arvuta taskuarvutiga ja ümarda lõppvastus.

a) $456{,}58 + 23{,}456 + 12{,}4 - 56{,}890$
b) $67905 + 23{,}45 - 13{,}45 - 88{,}645$
c) $12000 + 325 - 16 - 23{,}4576$
d) $90909{,}09 - 808{,}08 - 6634{,}1$

374. Ametnik töötas esmaspäeval 2,5 tundi, teisipäeval 1,25 tundi ning reedel 3,75 tundi. Mitu tundi töötas ametnik keskmiselt ühes tööpäevas?

375. Leida summa $3\frac{3}{7} + 1\frac{1}{15} + 2\frac{1}{3}$ kolme õige kümnendkohaga.

376. Arvuta, teisendades harilikud murrud eelnevalt kümnendmurdudeks kolme õige numbriga pärast koma.

a) $\frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{2}{9} + \frac{5}{12}$
b) $\frac{1}{3} + \frac{5}{8} - \frac{1}{7}$
c) $2\frac{2}{3} + 3\frac{1}{7} - 4\frac{1}{9}$
d) $12\frac{1}{6} - 11\frac{1}{3} + 4{,}56$

Kontrolliks soorita tehted harilike murdudega ja teisenda tulemus kümnendmurruks.

377. Kumb arvu π kahest ligikaudsest väärtusest on täpsem: 3,14 või $3\frac{1}{7}$?

378. Leia summa $\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{4} + \sqrt{5} + \sqrt{6}$ kahe õige kümnendkohaga.

3.8. LIGIKAUDSETE ARVUDE KORRUTAMINE JA JAGAMINE

Korrutise absoluutne viga

Korrutis on maksimaalne, kui mõlemad tegurid on võimalikult suured, ja minimaalne, kui mõlemad tegurid on võimalikult väiksed.

$$(a - \Delta a)(b - \Delta b) \leq x \cdot y \leq (a + \Delta a)(b + \Delta b)$$
$$ab - a\Delta b - b\Delta a + \Delta a\Delta b \leq x \cdot y \leq ab + a\Delta b + b\Delta a + \Delta a\Delta b$$
$$ab - (a\Delta b + b\Delta a) + \Delta a\Delta b \leq x \cdot y \leq ab + (a\Delta b + b\Delta a) + \Delta a\Delta b$$

Et Δa ja Δb on harilikult väikesed, siis liige $\Delta a\Delta b$ kui kahe väikese arvu korrutis on võrreldes teiste liikmetega nii väike, et selle võib ära jätta. Seega

$$ab - (a\Delta b + b\Delta a) \leq x \cdot y \leq ab + (a\Delta b + b\Delta a)$$

Seega korrutise absoluutne viga $\Delta(x \cdot y)$ avaldub järgmiselt:

$$\Delta(x \cdot y) = a\Delta b + b\Delta a.$$

Näide: Olgu ristküliku külgede mõõtmisel meetrites saadud arvud $24{,}6(\pm 0{,}04)$ ja $32{,}3(\pm 0{,}05)$. Leiame ristküliku pindala.

Pindala ligikaudne väärtus

$S = 24{,}6 \cdot 32{,}3 = 794{,}58$.

Viimase arvu absoluutse vea ülemmäär

$\Delta S = 24{,}6 \cdot 0{,}05 + 32{,}3 \cdot 0{,}04 = 2{,}522$.

Pindala ligikaudses väärtuses on juba üheliste number kaheldav. Järelikult pole mõtet anda selles arvus kümnendikke ja sajandikke. Seepärast ümardame S ja ΔS väärtused ühelisteni: otsitav pindala on

$795\ (\pm 3)\ \text{m}^2$.

Ligikaudsete arvude korrutamisel kehtib reegel:

kahe ligikaudse arvu korrutamisel saadakse tulemuses niimitu tüvenumbrit, kuimitu neid on kõige väiksema tüvenumbrite arvuga teguris.

Et saada tulemus korrutamisel n tüvenumbriga, peab tegurid võtma $n + 1$ tüvenumbriga.

Mitme teguri järjestikusel korrutamisel täpsus väheneb ja seetõttu on soovitav võtta tegurid $n + 2$ tüvenumbriga.

Näited: $6{,}8 \cdot 5{,}627 = 38{,}2636 \approx 38$;

$46{,}1 \cdot 12{,}47 = 574{,}867 \approx 575$;

$27 \cdot 432 = 11664 \approx 12000 = 1{,}2 \cdot 10^4$.

Personaalarvuti või kalkulaatoriga arvutades korrutatakse kõik tegurid ning lõpptulemus ümardatakse vastavalt reeglile.

379. Tõesta, et ligikaudsete arvude korrutamisel relatiivsed vead liituvad.

380. Arvuta ligikaudsete arvudega.
a) $17{,}2(\pm 0{,}3)\cdot 3{,}8(\pm 0{,}01)$;
b) $0{,}384(\pm 0{,}001)\cdot 5{,}42(\pm 0{,}005)$;
c) $2{,}76(\pm 0{,}007)\cdot 14{,}3(\pm 0{,}06)$;
d) $543(\pm 2)\cdot 0{,}82(\pm 0{,}08)$

381. Arvuta.
a) $24{,}6\cdot 6{,}8$ b) $628{,}2\cdot 0{,}541$ c) $56{,}63\cdot 9{,}67$
d) $0{,}30\cdot 2{,}47$ e) $420\cdot 0{,}80$ f) $12{,}8\cdot(6{,}4\cdot 10^3)$
g) $(8{,}7\cdot 10^2)\cdot(1{,}56\cdot 10^3)$ h) $(5{,}31\cdot 10^3)\cdot 0{,}32$

382. Leia avaldise väärtus.
a) $45{,}23\cdot 345 + 23{,}4\cdot 0{,}45 - 12{,}4\cdot 34{,}2$
b) $1230\cdot 0{,}978 - 345\cdot 1{,}134 + 87\frac{1}{3}\cdot 1{,}4572$

383. Katuse ehitamiseks kulus 18 tahvlit plekki mõõtmetega 1,15 m ja 1,75 m. Leia katuse pindala, kui valtsimisele kulus 5% plekist.

384. Raudteetammi muldkeha laius on alt 5,3 m, ülalt aga 3,0 m. Mitu kuupmeetrit mulda on 75 m pikkuses muldkehas, mille kõrgus on 1,7 meetrit?

Jagatise absoluutne viga

Jagatis omandab sifurima väärtuse juhul, kui jagatav on võimalikult suur ja jagaja võimalikult väike. Seetõttu $\frac{x}{y}$ ülemtõke on

$$\frac{a+\Delta a}{b-\Delta b}=\frac{(a+\Delta a)(b+\Delta b)}{(b-\Delta b)(b+\Delta b)}=\frac{ab+a\Delta b+b\Delta a+\Delta a\Delta b}{b^2-(\Delta b)^2}.$$

ja analoogiliselt arutledes leiame, et $\frac{x}{y}$ alamtõke on

$$\frac{a-\Delta a}{b+\Delta b}=\frac{(a-\Delta a)(b-\Delta b)}{(b+\Delta b)(b-\Delta b)}=\frac{ab-a\Delta b-b\Delta a+\Delta a\Delta b}{b^2-(\Delta b)^2}.$$

Kuna suurused $\Delta a\Delta b$ ja $(\Delta b)^2$ on väikesed, siis jätame nad arvestamata. Jagatise ülemtõke on seega $\frac{a}{b}+\frac{a\Delta b+b\Delta a}{b^2}$

ja alamtõke $\frac{a}{b}-\frac{a\Delta b+b\Delta a}{b^2}$.

Järelikult jagatise absoluutne viga on $\Delta\left(\frac{a}{b}\right)=\frac{a\Delta b+b\Delta a}{b^2}$.

Ligikaudsete arvude jagamisel võime kasutada sama juhist, mis anti ligikaudsete arvude korrutamise korral.

Näide: Leiame, mitme õige kohaga saab leida ligikaudsete arvude 8,31 ja 4,64 jagatist.

Jagatise ligikaudne väärtus on $8{,}31 : 4{,}64 = 1{,}791$.

Absoluutse vea ülemmäär on 0,003 (*kontrolli seda*). Järelikult on jagatises kolm õiget kohta nagu andmeteski; seega
$8{,}31 : 4{,}64 = 1{,}79$.

385. Tõesta, et ligikaudsete arvude jagamisel relatiivsed vead liituvad.

386. Arvuta ligikaudsete arvudega.
a) $4{,}85(\pm 0{,}02) : 0{,}38(\pm 0{,}01)$;
b) $16{,}9(\pm 0{,}4) : 2{,}85(\pm 0{,}03)$;
c) $0{,}75(\pm 0{,}008) : 0{,}154(\pm 0{,}002)$;
d) $128(\pm 3) : 5{,}4(\pm 0{,}08)$.

387. Arvuta ligikaudsete arvudega.
a) $30{,}52 : 2{,}45$ b) $18{,}3 : 4{,}2149$ c) $1{,}23 : 0{,}50$
d) $0{,}64 : 12{,}58$ e) $5{,}32 : 0{,}086$ f) $(1{,}2\cdot 10^3) : 524$
g) $15{,}8 : (2{,}4\cdot 10^2)$ h) $34{,}67 : 4{,}3$ i) $45{,}0 : 15{,}00$

3.9. KÜSIMUSI JA ÜLESANDEID KORDAMISEKS

388. 1) Missugused arvud on täpsed, missugused ligikaudsed?
2) Mis on lähend? Too näiteid igapäevasest elust.

389. Mida tähendab kirjutis $346(\pm 0{,}5)$? Kui suur on absoluutne ja relatiivne viga?

390. Leia summa $x + y$ tõkked, kui
a) $x = 256(\pm 1)$ ja $y = 528(\pm 2)$;
b) $x = 15{,}34(\pm 0{,}04)$ ja $y = 16{,}4(\pm 0{,}02)$.

391. Toa põranda mõõtmistulemused on 7 m ja 8 m. Kas mõõtmistulemused on saadud küllaldase täpsusega, kui kasutati millimeeterjaotusega metalljoonlauda? Kui suur on antud andmete korral pindala absoluutne ja relatiivne viga?

392. Kui suur on täpse arvu absoluutne ja relatiivne viga? Kas loendamisel saadud tulemus on alati täpne arv? Miks? Too näiteid.

393. Defineeri arvu õige numbri mõiste.

394. Leia järgmiste arvude õiged numbrid.
a) $3456(\pm 4)$ b) $12{,}34(\pm 0{,}005)$ c) $234{,}3(\pm 1{,}5)$
d) $1345(\pm 5)$ e) $0{,}23(\pm 0{,}02)$ f) 124

395. Mis on arvu tüvenumbrid?

396. Leia järgmiste arvude tüvenumbrid.

a) 32; 345; 0,012; 56,09; 5,000; 0,00976; 34,01; 0,0007

b) $3{,}24\cdot10^3$; $3\cdot10^5$; $1{,}556\cdot10^7$; $1{,}200\cdot10^4$; $4{,}40\cdot10^7$.

397. Neli takistit 3,5 kΩ, 2,5 kΩ, 3,0 kΩ ja 10 kΩ on ühendatud järjestikku. Leia ahela kogutakistus. Leia kogutakistuse absoluutne ja suhteline viga.

398. Põranda mõõtmed on 7,6 m ja 8,4 m. Kui palju kulub värvi selle põranda värvimiseks, kui ühe ruutmeetri katmiseks kulub värvi 0,17 kg?

399. Kuidas arvutada kahe arvu summa, vahe, korrutise ja jagatise absoluutset viga, kui üks arv on ligikaudne arv ja teine arv on täpne arv? Too selle kohta näiteid.

400. Arvuta ligikaudsete arvudega. Täpsed arvud on trükitud jämedas kirjas.

a) $18(\pm0{,}6)+22(\pm0{,}3)-6(\pm0{,}1)$;

b) $35(\pm0{,}2)\cdot65(\pm0{,}5)\cdot8(\pm0{,}05)$;

c) $\dfrac{25(\pm0{,}2)\cdot10(\pm0{,}02)}{2{,}5(\pm0{,}01)}$;

d) $\mathbf{13}\cdot123{,}45+45{,}3:1{,}45+12{,}3$;

e) $45{,}0:\mathbf{15}-2{,}2\cdot0{,}654+16{,}34$;

f) $1{,}63\cdot10^4+2{,}345\cdot10^3-1235$;

g) $1{,}45\cdot10^7\cdot4{,}5\cdot10^3:(2{,}25\cdot10^6)$.

401. Vähemalt mitme tüvenumbriga kümnendmurruna tuleb esitada arv $\sqrt{10}$, et tema relatiivne viga ei ületaks 0,5%, 0,05%?

402. Tahetakse valmistada kuubikujuline reservuaar, mille ruumala oleks 1 m^3 veaga mitte üle 10 dm^3. Missuguse täpsusega peab olema seejuures mõõdetud kuubi serv?

403. Tõesta, et arvu ruudu absoluutne viga on $2a\cdot\Delta a$.

404. Tõesta, et arvu kuubi absoluutne viga on $3a^2\cdot\Delta a$.

405. Tõesta, et arvu ruutjuure absoluutne viga on $\dfrac{\Delta a}{2\sqrt{a}}$.

406. Tõesta, et summa relatiivne viga asetseb liidetavate relatiivsete vigade vahel.

IV peatükk. VÕRRANDID JA VÕRRATUSED

4.1. KORDAMINE

4.1.1. VÕRRAND. VÕRDUS. SAMASUS

Võrrandi mõistega ja lihtsamate võrranditega tutvusime juba nooremates klassides. Tuletame meelde, mis on võrdus, võrrand ja samasus.

Võrduse moodustavad kaks avaldist, mis on ühendatud võrdusmärgiga.

Võrdused on näiteks: $7=4+3$, $(a-2b)^2=a^2-4ab+4b^2$ või $3x-17=5$.

Tähti mittesisaldav võrdus võib olla tõene (näiteks $7=3+4$) või väär (näiteks $6=1-6$). Tähti (tundmatuid) sisaldav võrdus võib olla tundmatu mõnede väärtuste korral tõene, mõnede korral väär. Näiteks võrdus $7x-3=4$ on tõene, kui $x=1$, ja väär mistahes muu x väärtuse korral.

Võrdust, mis on tõene tundmatu mistahes võimalike väärtuste korral, nimetatakse samasuseks.

Samasused on näiteks: $2x-6=(x-3)2$; $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ ja $(a-b)^2\equiv a^2-2ab+b^2$.

Võrdus $Ax^2+Bx+C=x^2+3x-7$ on samasus parajasti siis, kui võrdsete astendajatega astmete kordajad on võrdsed. Seega $A=1$, $B=3$ ja $C=-7$.

Võrdus $\dfrac{a^2-b^2}{a-b}=a+b$ on samasus mistahes a ja b väärtuste korral, välja arvatud siis, kui $a=b$. Kui $a=b$, siis on võrduse vasak pool mõttetu, parema poole väärtust aga saab arvutada.

Võrrandiks nimetatakse muutujaid sisaldavat võrdust, milles üks või mitu muutujat loetakse tundmatuks (otsitavaks).

Näiteks $3x+a=a^2$ on ühe tundmatuga esimese astme võrrand, kui selles x tähendab tundmatut ja a antud arvu; sama võrrand on ühe tundmatuga teise astme võrrand, kui selles a tähendab tundmatut ja x antud arvu. Sama võrrand on kahe tundmatuga teise astme võrrand, kui selles x ja a tähendavad mõlemad tundmatuid arve.

Võrrandi lahendamise eesmärgiks on leida kõik tundmatu väärtused (arvud), mille asendamisel võrrandisse tundmatu kohale võrrandi mõlemad pooled võrdsustuvad.

Näide: Võrrandi $3x + 4 = 7$ lahend on $x = 1$.

Võrrandi $x^2 - 2x - 3 = 0$ lahendid on $x = -1$ ja $x = 3$.

Võrrandil $\frac{1}{x^2+1} = 0$ lahendeid ei ole.

Võrrandi $x(x + 1) = x^2 + x$ lahendiks on iga arv.

Kui võrrandi teisendamisel kõik tundmatud koonduvad ja saadud võrdus on tõene, siis on meil tegemist samasusega ja esialgse võrrandi lahendiks sobib iga reaalarv, mille korral võrdus osutub samasuseks.

Näide: Lahendame võrrandi $(1 - x)^2 = 1 - x(2 - x)$.

Avame võrduse mõlemal poolel sulud, saame $1 - 2x + x^2 = 1 - 2x + x^2$. Toome võrduse paremal pool olevad liikmed vasakule poole ja koondame sarnased liikmed, saame tulemuseks $0 = 0$. Viimane võrdus on samasus. Seega sobib esialgse võrrandi lahendiks mistahes reaalarv.

Võrrandi $3(x + 1) = 3x + 4$ lahendamisel saame pärast sarnaste liikmete koondamist tulemuseks võrduse $3 = 4$. Kuna viimane võrdus ei kehti, siis öeldakse, et esialgne võrrand on **vastuoluline** ja sellel võrrandil lahendid puuduvad.

407. Mida nimetatakse võrduseks, võrrandiks, samasuseks? Too näiteid. Mida tähendab võrrandi lahendamine?

Too kaks näidet selliste võrrandite kohta, millel on kaks lahendit, üks lahend, lahend puudub.

408. Kontrolli, kas järgmised võrdused on samasused.

a) $(x + 3)^2 = (x - 1)(x + 1)$

b) $\frac{x-3}{2} = x : 2$

c) $(t - 1)^2 = (1 - t)^2$

d) $(p - 1)^2 = (2p - 1)^2$

e) $a^3 - b^3 = (a^2 + ab + b^2)(a - b)$

f) $t^2 - u^2 = (t - u)(u - t)$

409. Leia A, B ja C väärtused nii, et järgmised võrdused oleksid samasused. Kas see on kõikide antud võrduste puhul võimalik?

a) $Ax^2 + Bx + C = (3x - 1)(3x + 1)$

b) $Ax^2 + Bx + C = (3x - 1)(3x - 5)$

c) $Ax^2 + B = (4x - 1)(x - 5)$

d) $Ax^2 + Bx + C = x(x - 1)(x - 2)$

e) $Ax^2 + Bx = 3x - 5$

f) $Ax^2 + Ax + A = x(x + 1)$

410. Missugustel tingimustel osutub võrdus samasuseks?

a) $\frac{x^2-x}{x} = x - 1$

b) $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

c) $\sin^2 3\beta + \cos^2 3\beta = 1$

4.2.1. VÕRRANDITE SAMAVÄÄRSUS. VÕRDUSE OMADUSED

Kahte võrrandit nimetatakse samaväärseks ehk ekvivalentseks, kui neil on kõik lahendid ühesed või lahendid puuduvad.

Seega peavad kõik esimese võrrandi lahendid rahuldama teist võrrandit ja teise võrrandi lahendid peavad rahuldama esimest võrrandit.

Näide: Võrrandid $x^2 = 3x - 2$ ja $(2x - 2)(2 - x) = 0$ on samaväärsed, sest mõlema võrrandi lahendid on $x = 1$ ja $x = 2$. Võrrandid $x - 7 = 0$ ja $x - 5 = 3$ pole samaväärsed, sest esimese võrrandi lahend on $x = 7$ ja teise lahend on $x = 8$.

Võrrandi lahendamisel võrrandit lihtsustatakse, s.t. tuletatakse antud võrrandist uus, kuid eelmisega võrreldes lihtsam võrrand, millel oleksid samad lahendid.

Võrrandite samaväärsuse märkimisel kasutame sümbolit $\Leftrightarrow$.

Näide: $6(x - 3) + 7 = 0 \Leftrightarrow 6x - 11 = 0$

Kui antud võrrandiga samaväärse lihtsama võrrandi tuletamine ei ole võimalik, siis asendatakse see võrrandiga, mille lahendiks on kõik antud võrrandi lahendid, kuid võivad lisanduda ka mõned muud, nn. **võõrlahendid**.

Võrrandi lihtsustamisel ei tohi aga esialgset võrrandit asendada võrrandiga, mis ei sisalda esialgse võrrandi kõiki lahendeid, sest sel juhul tekib nn. lahendite kaotsiminek ja kadumaläinud lahendit on hiljem raske leida.

Näide: Jagades võrrandi $(x - 2)(x + 2) = x - 2$ mõlemat poolt $(x - 2)$-ga, saame tulemuseks võrrandi $x + 2 = 1$ ehk $x = -1$. Lihtne on veenduda, et esialgse võrrandi lahendiks sobib ka $x = 2$. Seega jagamine $(x - 2)$-ga viib selleni, et kaotame lahendi $x = 2$.

Vaatleme nüüd, missuguseid teisendusi võib võrranditega teha, ilma et oleks karta võõrlahendite teket või lahendite kaotsiminekut.

Võrrandite samaväärsusteisendused põhinevad võrduse järgmistel omadustel:

1. Võrduse pooli võib vahetada, s.t. kui $a = b$, siis $b = a$ ja ümberpöördult.
   Sümbolites: $(a = b) \Leftrightarrow (b = a)$.
2. Võrdus jääb kehtima, kui selle mõlemale poolele liita üks ja sama arv: kui $a = b$, siis $a + n = b + n$ ja ümberpöördult.
   Sümbolites: $(a = b) \Leftrightarrow (a + n = b + n)$
3. Võrdus jääb kehtima, kui selle pooli korrutada või jagada ühe ja sama nullist erineva arvuga: kui $a = b$, siis $a \cdot k = b \cdot k$ ja $\frac{a}{k} = \frac{b}{k}$, kui $k \neq 0$.
   Sümbolites: $(a = b, k \neq 0) \Leftrightarrow \left(ka = kb; \frac{a}{k} = \frac{b}{k}\right)$.

Praktikas, ülesannete lahendamisel ei kasutata tavaliselt omadust 2, vaid selle järeldust.

Järeldus omadusest 2:

Võrduse liikmeid võib viia teisele poole võrdusmärki, kusjuures ülekantava liikme ees muudetakse märk vastupidiseks.

Näide: $5x - 34 = 47 - 3x$ viime -34 paremale poole võrdusmärki,
$5x = 47 - 3x + 34$ viime $-3x$ vasakule poole võrdusmärki,
$5x + 3x = 47 + 34$ koondame sarnased liikmed,
$8x = 81$.

Jagades viimase võrduse mõlemad pooled 8-ga ja saame, et $x = 10\frac{1}{8}$.

Miks võrduse mõlemaid pooli nulliga korrutada ja jagada ei tohi? Selle selgitamiseks vaatleme näiteid.

Näide: Kui võrduse $x = 4$ mõlemat poolt korrutada 0-ga, siis saame võrduse $0 \cdot x = 0$ ning viimasest võrdusest järeldub, et x võib olla mistahes reaalarv. Seega saadud võrdus ei ole enam esialgse võrdusega samaväärne.

Võrrandi pooli võib jagada tundmatut sisaldava avaldisega ainult juhul, *kui see avaldis ühegi tundmatu väärtuse korral ei võrdu nulliga.*

Näide: Võrrandi $x^2 - x = 0$ mõlema poole jagamisel x-ga saame tulemuseks $x - 1 = 0$. Viimasel võrrandil on lahendiks vaid $x = 1$, kuid esialgse võrrandi lahenditeks on $x = 0$ ja $x = 1$. Nagu näeme, viis jagamine tundmatuga lahendi kaotsiminekuni.

Kui võrrandi pooli korrutada tundmatut sisaldava avaldisega, siis võime saada võõrlahendeid.

Näide: Võrrandi $x - 3 = 0$ mõlemat poolt korrutati tundmatuga x, saadi ruutvõrrand, $x^2 - 3x = 0$. Selle võrrandi lahendid on 0 ja 3. Kuid arv 0 pole esialgse võrrandi lahend, seega on ta võõrlahend.

411. Kontrolli, kas järgmised võrrandipaarid on samaväärsed. Kui jah, siis missuguseid võrduse omadusi kasutades saame ühest võrrandist teise?

a) $4(x + 3) = 7$ ja $4x = -5$
b) $7x - 3 = x$ ja $x = 7x - 3$
c) $5x + 7 = 3$ ja $10x + 14 = 6$
d) $\frac{x-3}{5} = 5$ ja $x - 3 = 10$
e) $12x + 6 = 9$ ja $4x + 2 = 6$
f) $\frac{x-1}{x+1} = 3$ ja $x - 1 = 5$

412. Leia antud võrrandiga kolm samaväärset võrrandit. Selgita, miks need võrrandid on samaväärsed.

a) $5(x^2 - 1) = 3x$
b) $6x^2 - 3x + 90 = 0$
c) $\frac{x-1}{x-2} = \frac{x+2}{x+1}$
d) $3(x - 1) = \frac{3x-2}{\ldots}$

413. Missugused võivad olla arvude a, b ja c väärtused, kui kehtivad järgmised võrdused?

a) $a \cdot b = 0$
b) $a \cdot b \cdot c = 0$
c) $\frac{a \cdot b}{c} = 0$
d) $\frac{a}{b \cdot c} = 0$
e) $\frac{1}{a \cdot b \cdot c} = 0$
f) $\frac{a^2 b}{c} = 0$
g) $\frac{a}{b} = 0$
h) $\frac{1}{a} = 0$

4.1.3. LINEAAR- JA RUUTVÕRRANDI LAHENDAMINE

Kui pärast võrrandi lihtsustamist on võrrandis oleva tundmatu kõrgeim aste üks, siis sellist võrrandit nimetame **lineaarvõrrandiks**.

Lineaarvõrrandi üldkuju on $ax + b = 0$, kus a ja b on antud arvud ja x on tundmatu. Kui $a \neq 0$, siis lahend on $x = -\frac{b}{a}$. Kui lineaarliikme kordaja $a = 0$, siis on kaks võimalust:

$ax = b$ ja $a = 0$

- kui $b = 0$, siis $0 \cdot x = 0$ ja lahendiks sobib mistahes reaalarv
- kui $b \neq 0$, siis $0 \cdot x = b \neq 0$. Võrrandil puuduvad lahendid

Mitte iga lineaarvõrrand ei pruugi olla antud kujul $ax + b = 0$. Ka võrrand $\frac{x-1}{2} + \frac{x-1}{3} + \frac{x-1}{4} = 1$ on lineaarvõrrand. Selle näitamiseks korrutame võrrandi mõlemad pooled 12-ga ja seejärel lihtsustame saadud avaldist. Saame, et $13x = 25$, järelikult $x = \frac{25}{13}$.

Kontrolli, kas saadud lahend rahuldab esialgset võrrandit.

Võrrand $\frac{3x-5}{2(x+2)} = \frac{3x-1}{2x+5} - \frac{1}{x+2}$ osutub pärast lihtsustamist lineaarvõrrandiks. Viime võrduse parema poole ühisele nimetajale.

$\frac{3x-5}{2(x+2)} = \frac{(3x-1)(x+2) - (2x+5)}{(2x+5)(x+2)}$

Nüüd avame murru lugejas sulud ja koondame sarnased liikmed

$\frac{3x-5}{2(x+2)} = \frac{3x^2+6x-x-2-2x-5}{(2x+5)(x+2)} \Leftrightarrow \frac{3x-5}{2(x+2)} = \frac{3x^2+3x-7}{(2x+5)(x+2)}$.

Korrutame võrrandi mõlemaid pooli teguriga $2(2x + 5)(x + 2)$, kusjuures see tegur ei tohi olla null (*miks?*). Kas selle tehte tulemusena tekkivad võõrlahendid? Sellele küsimusele vastame siis, kui lahendid on leitud ja kontrollitud.

Saame võrrandi

$(3x-5)(2x+5) = 2(3x^2+3x-7) \Leftrightarrow$

$6x^2+5x-25 = 6x^2+6x-14 \Leftrightarrow$

$-x = 11 \Leftrightarrow x = -11.$

Kontrollimisel selgub, et lahend $x = -11$ rahuldab esialgset võrrandit, seega leitud lahend ei ole võõrlahend.

414. Avalda järgmistest võrdustest nõutud suurused. Mõtle, kas need võrdused ka sisult midagi tähendavad.

a) $S = \frac{a+b}{2} \cdot h$, avalda h ja b;

b) $I = \frac{E}{R+r}$, avalda E, R ja r;

c) $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$, avalda R ja R_2;

d) $Q = cm(t_2 - t_1)$, avalda t_1, t_2 ja m.

415. Winnie Puhh kaalub 120 kg ja veel pool Winnie Puhhi. Kui palju kaalub Winnie Puhh?

416. Purk mett maksis $\frac{3}{4}$ kr. ja veel lisaks $\frac{3}{4}$ purki mett. Kui palju maksis purk mett?

417. Lahenda võrrand ja kontrolli saadud lahendit.

a) $3(x-1)-4 = 2(x-1)$

b) $4(x+3)-3(x+2)-2(x+1)+x = 0$

c) $x-1+2(x-2)+3(x-3) = 6\left(x-\frac{1}{2}\right)$

d) $\frac{2}{x-1}+1 = \frac{3}{x-1}$

e) $\frac{x-3}{4}+\frac{x-2}{3}+\frac{x-1}{2} = x+\frac{x}{12}$

418. Lahenda võrrand ja kontrolli saadud lahendit.

a) $\frac{5-3x}{7} = 5+x$

b) $\frac{5x-4}{2} = \frac{16x+1}{7}$

c) $1-\frac{2u-5}{6} = \frac{3-u}{4}$

d) $2+t-\frac{5t-1}{3} = \frac{t-20}{15}$

e) $x+\frac{2x-7}{2}-\frac{3x+1}{5} = 5-\frac{x+6}{2}$

f) $\frac{9y+7}{2}-\left(y-\frac{y-2}{7}\right) = 56$

g) $\frac{2{,}5-s}{0{,}1}-\frac{1-3s}{0{,}2} = 1\frac{1}{5}$

419. Lahenda võrrand ja kontrolli saadud lahendit.

a) $\frac{6}{4-z}-\frac{25}{1-3z}+\frac{16}{z-4} = 0$

b) $\frac{14}{3z-12}-\frac{2+z}{z-4} = \frac{3}{8-2z}-\frac{5}{6}$

c) $\frac{2x+19}{5x+5}-\frac{17}{x+1} = \frac{3}{1+x}$

d) $\frac{12x^2+30x-21}{16x^2-9}-\frac{3x-7}{3-4x} = \frac{6x+5}{4x+3}$

e) $\frac{1}{x^2+2x+1}+\frac{1}{x+2x^2+x^3} = \frac{5}{2x+2x^2}$

f) $\frac{7}{x^2-1}+\frac{8}{x^2-2x+1} = \frac{37-9x}{x^3-x^2-x+1}$

420. Lahenda võrrand ja uuri saadud lahendit.

a) $\frac{1}{x}+\frac{1}{x} = \frac{2}{x}$

b) $\frac{x-1}{x+1} = \frac{x}{x-1}$

c) $\frac{6x+3}{4x^2-9}+\frac{1}{3-2x} = \frac{1}{2x+3}$

421. Lahenda võrrand ruutvõrrandi lahendivalemit kasutamata.

a) $\left(\sqrt{2}x-1\right)^2-x^2 = 0$

b) $(x-1)^2-(x-3)^2 = 0$

422. Kui palju kaalub kala, kui ta saba kaalub 4 kg, pea kaalub niisama palju kui saba ja pool keha ning keha kaalub niisama palju kui pea ja saba kokku?

423. „Vanaisa, kui vana on su poeg?" „Tema turjal on niimitu nädalat, kuimitu päeva on vana minu pojapoeg." „Aga kui vana on pojapoeg?" „Temal on niimitu kuud, kuimitu on minul aastaid. Lisaks võin sulle öelda, et me oleme kolmekesi kokku 100 aastat vanad." Kui vanad nad on?

424. Õues on kanu ja lambaid, kokku 18 pead ja 50 jalga. Mitu kana ja mitu lammast on õues?

425. Lahinguväljal olid ratsarüütlid (2 pead ja 6 jalga) ja lohemaod (3 pead ja 4 jalga). Kokku oli lahinguväljal 27 pead ja 46 jalga. Mitu ratsarüütlit ja mitu lohemadu võttis lahingust osa?

Ruutvõrrandiks nimetatakse võrrandit, mis esitub kujul $ax^2+bx+c = 0$, kus $a \neq 0$. Siin a, b ja c on reaalarvud ning x tundmatu (otsitav).

Ruutvõrrandi lahendivalem on

$$x_{1,2} = \frac{b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}. \qquad (*)$$

Kui ruutvõrrandis ruutliikme kordaja $a = 1$, siis sellist võrrandit nimetatakse *taandatud ruutvõrrandiks*. Taandatud ruutvõrrand esitub kujul $x^2+px+q = 0$. Lahendeid võib leida valemi (*) abil (siis tuleb arvestada varasemat tähistust), kuid lihtsam on kasutada järgmist valemit:

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}. \qquad (**)$$

Näide: Lahendame võrrandi $x(x-5) = 6$ taandatud ruutvõrrandi lahendivalemi abil.

Pärast sulgude avamist saame võrrandi $x^2 - 5x - 6 = 0$. Kasutades valemit (**) kirjutame $x_{1,2} = 2{,}5 \pm \sqrt{6{,}25 - (-6)} = 2{,}5 \pm 3{,}5$ ehk $x_1 = 6$ ja $x_2 = -1$.

Varasemast on teada, ruutvõrrandi lahendite arv sõltub ruutvõrrandi diskriminandist.

$D = b^2 - 4ac$.

Kui $D > 0$, siis võrrandil on kaks erinevat lahendit $x_1 \neq x_2$.
Kui $D = 0$, siis võrrandil on kaks võrdset lahendit $x_1 = x_2$.
Kui $D < 0$, siis võrrandil **reaalarvulised lahendid puuduvad**.

Tuletame meelde, missugused seosed on ruutvõrrandi lahendite vahel.

Põhikoolist on teada *Viète'i valemid*, mis annavad seosed ruutvõrrandi kordajate ja lahendite vahel.

Võrrandi $x^2 + px + q = 0$ korral $x_1 + x_2 = -p$ ja $x_1 \cdot x_2 = q$.

Võrrandi $ax^2 + bx + c = 0$ korral $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ ja $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$.

Näide: Koosta taandatud ruutvõrrand, mille lahendid on 3 ja -2.

Viète'i valemite järgi $q = 3 \cdot (-2) = -6$ ja $-p = 3 + (-2) = 1$. Otsitav võrrand on seega $x^2 - x - 6 = 0$.

Näide: Lahendame Viète'i valemite abil võrrandi $x^2 - 2x - 8 = 0$.

Lahendite korrutis on -8 ja summa on 2. Proovimise teel leiame, et võrrandi lahendid on 4 ja -2.

Kasutades Viète'i valemeid saab võrrandit lahendamata kindlaks määrata lahendite märgid.

Vaatleme ruutvõrrandit $ax^2 + bx + c = 0$, kus $a > 0$.

a) Kui $c < 0$, siis on üks lahend positiivne ja teine lahend negatiivne (sõltumata b märgist).

Tõepoolest, kui $a > 0$ ja $c < 0$, siis Viète'i valemite põhjal on lahendite korrutis negatiivne. Seega on lahendid erimärgilised;

b) kui $c > 0$ ja $b < 0$, siis on mõlemad lahendid positiivsed;

c) kui $c > 0$ ja $b > 0$, siis on mõlemad lahendid negatiivsed.

Põhjenda kahe viimase väite paikapidavust ise.

426. Järgnevad võrrandid on koostanud araabia matemaatik al'Horezmi umbes 830. a. Lahenda need võrrandid.

a) $5x^2 = 40x$ b) $\frac{25}{9}x^2 = 100$ c) $10x = x^2 + 21$

d) $x^2 = 12x + 228$ e) $x^2 + 20\frac{1}{4} = 11\frac{1}{4}x$ f) $\frac{1}{12}x^2 + \frac{7}{12}x = 19$

427. Lahenda võrrandid (võimaluse korral peast). Eelnevalt uuri, missuguste märkidega on lahendid.

a) $x^2 + 2x - 35 = 0$ b) $x^2 - 8x - 20 = 0$
c) $x^2 + 10x - 39 = 0$ d) $y^2 + 5y + 6 = 0$
e) $y^2 + 3y - 18 = 0$ f) $y^2 - 5y - 14 = 0$
g) $5z^2 - 125z = 0$ h) $3z^2 + 5z = 0$
i) $10z^2 - 1000 = 0$ j) $5t^2 + 25 = 0$

428. Lahenda võrrandid võimalikult ratsionaalselt.

a) $(3x - 1)(x + 2) = 0$ b) $(3x - 1)(x + 2) = 20$
c) $(x - 4)(4x - 3) + 3 = 0$ d) $(x + 3)(x - 2) + (x + 2)^2 - 3x = 10$
e) $(x + 2)(x - 2) - (2x - 3)^2 + 4 = 0$ f) $\frac{y^2}{6} - \frac{2y}{3} = \frac{3y - 10}{4}$
g) $\frac{1}{y} + 1 = y$ h) $\frac{u - 3}{4} - \frac{u^2 - 11}{12} = -\frac{2u + 3}{6}$

429. Lahenda võrrandid. Kas võrrandid a ja c ning b ja d on samaväärsed?

a) $2(z - 2) = \frac{18}{12 - z}$ b) $\frac{15}{7 - z} = 3(z - 1)$
c) $\frac{s - 15}{2s + 9} = \frac{s + 5}{s - 24}$ d) $\frac{2s - 5}{s - 1} = \frac{5s - 3}{3s + 5}$
e) $\frac{7}{z + 3} - \frac{1}{3 - z} - \frac{14}{z^2 - 9} = \frac{4 - z}{3 + z}$ f) $\frac{6}{z^2 - 1} - \frac{2}{z - 1} = 2 - \frac{z + 4}{z + 1}$

430. Kasutades taandatud ruutvõrrandi lahendivalemeid tõesta, et Viète'i valemid kehtivad.

431. Võrrandi $x^2 + bx + c = 0$ üks lahend on 1. Leia teine lahend, kui on teada, et lahendite aritmeetiline keskmine on 2,5.

432. Tõesta, et võrrandi $(2a - b)x^2 + (a - b)x - a = 0$ lahendid on reaalarvulised mistahes a ja b väärtuste korral.

433. Võrrandil $kx^2 - 6kx + k^2 - 1 = 0$ on lahendid võrdsed. Leia need lahendid.

434. Leia võrrandit $3x^2 - 5x - 4 = 0$ lahendamata avaldise $x_1^3 \cdot x_2 + x_2^3 \cdot x_1$ väärtus, kui x_1 ja x_2 on võrrandi lahendid.

435. Koosta ruutvõrrand, mille lahenditeks on ruutvõrrandi $x^2 + px + q = 0$ lahendite ruudud.

4.1.4. PARAMEETRIT SISALDAVAD VÕRRANDID

Olgu vaja lahendada võrrand $ax - 5x = 10$, kus a on mingi arv. Toome x sulgude ette, saame $x(a-5) = 10$ ehk $x = \frac{10}{a-5}$.

Nagu näha, sõltub leitud lahend tähelisest suurusest (ehk parameetrist) a. Andes a-le reaalarvulisi väärtusi võime leida tundmatu x vastavad väärtused. Tulemused võime esitada tabelina:

a	0	1	2	3	4	5	6
x	-2	$-2{,}5$	$-3\frac{1}{3}$	-5	-10	???	10

Juhul kui $a = 5$, siis me x väärtust arvutada ei saa, sest tekib jagamine nulliga. Seepärast tuleb parameetrit sisaldavas võrrandis pärast lahendi leidmist seda ka uurida. Antud juhul tuleb lahend esitada nii:

$x = \frac{10}{a-5}$, kui $a \neq 5$ ja lahend puudub, kui $a = 5$.

Näide: Lahendame võrrandi $2a(a-2)x = a - 2$ x-i suhtes.

Avaldame x-i, saame $x = \frac{a-2}{2a(a-2)}$. Uurime nüüd saadud lahendit.

Kui $a = 0$, siis on esialgne võrrand vastuoluline, sest saame võrrandi $0x = -2$. Viimasel võrrandil lahendeid ei ole.

Kui $a = 2$, siis sobib esialgse võrrandi lahendiks mistahes reaalarv (esialgne võrrand esitub siis kujul $0x = 0$).

Vastus: $x = \frac{1}{2a}$; kui $a \neq 2$ ja $a \neq 0$; kui $a = 2$, siis sobib lahendiks iga reaalarv; kui $a = 0$, siis võrrandil lahendeid ei ole.

Näide: Lahendada võrrand $ax^2 - 2x - 3 = 0$ x-i suhtes.

Kasutades taandamata ruutvõrrandi lahendivalemit võime kirjutada:

$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot a \cdot (-3)}}{2a} = \frac{1 \pm \sqrt{1+3a}}{a}$, kui $a \neq 0$. Ruutvõrrandil on reaalarvulised lahendid, kui võrrandi diskriminant pole negatiivne, s.t. $1 + 3a \geq 0$ ehk $a \geq -\frac{1}{3}$ ja $a \neq 0$. Kui $a < -\frac{1}{3}$, siis võrrandil reaalarvulisi lahendeid ei ole.

Kui $a = 0$, siis esialgne võrrand esitub kujul $-2x - 3 = 0$, lahend on $-1{,}5$.

Näide: Missugustel k väärtustel on ruutvõrrandil $(k-1)x^2 + (k+4)x + k + 7 = 0$ võrdsed lahendid?

Lahendid on võrdsed, kui ruutvõrrandi diskriminant on null, seega $D = (k+4)^2 - 4(k-1)(k+7) = 0$.

Ruutvõrrandi $3k^2 + 16k - 44 = 0$ lahendamisel saame, et otsitavad k väärtused on $k = 2$ ja $k = -\frac{22}{3}$.

436. Lahenda järgmised võrrandid x-i suhtes ja uuri lahendeid.

a) $(b+1)x + ab = b(a+x) + a$ b) $(2a-1)x = 3a + (a+2)x$

c) $a^2x + 2 = a(x+2)$ d) $\frac{x-m}{n} = \frac{x-n}{m}$

e) $m(mx-1) = 3(mx-1)$ f) $\frac{a+x}{b} = \frac{x-b}{a} + 2$

g) $x^2 - 8ax + 12a^2 = 0$ h) $x^2 - 3ax = 10a^2$

i) $ay^2 - (a+1)y + 1 = 0$ j) $\frac{x}{a+1} = \frac{1-a}{2a-x}$

437. Missugustel a väärtustel on võrrandil $9x^2 - 2x + a = 6 - ax$ võrdsed lahendid?

438. Missugustel a väärtustel on võrrandil $x^2 + ax + 25 = 0$ võrdsed lahendid? Lahenda ülesanne ruutvõrrandi diskriminanti leidmata.

439. Ruutvõrrandil $ax^2 + bx + c = 0$ ei ole reaalarvulisi lahendeid ja $a + b + c < 0$. Kas $c > 0$, $c = 0$ või $c < 0$?

440. Missugustel m väärtustel on võrrandil $m^2x = m(x+2) - 2$ üksainus lahend?

441. Missugustel k väärtustel on võrrandi $2x^2 + (k-9)x + k^2 + 3k + 4 = 0$ lahendid võrdsed?

442. Missuguse k väärtuse korral on võrrandil $x^2 + kx + 5 = 0$ lahend $x = 5$?

443. Lahenda võrrand $\frac{6b+7a}{6b} - \frac{3ay}{2b^2} = 1 - \frac{ay}{b^2 - ab}$ y suhtes.

4.1.5. VÕRRANDISÜSTEEMIDE LAHENDAMINE

Põhikoolis õppisime lahendama lineaarvõrrandisüsteeme ja ruutvõrrandisüsteeme. Tuletame nüüd meelde, missugused on nende võrrandisüsteemide lahendamise võtted.

1. Lineaarvõrrandisüsteemide lahendamine

Kahe tundmatuga kahest võrrandist koosneva lineaarvõrrandisüsteemi üldkuju on $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$.

Selleks et saaks üldse kõnelda võrrandisüsteemist, eeldame, et mõlemas võrrandis on vähemalt üks x või y kordaja nullist erinev.

Lineaarvõrrandisüsteeme oskame praegu lahendada kolme erineva võttega:
a) asendusvõttega, b) liitmisvõttega, c) graafiliselt.

ASENDUSVÕTE

Näide: Lahendame võrrandisüsteemi $\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ \dots \end{cases}$ asendusvõttega.

Avaldame esimesest võrrandist x ja asendame saadud avaldise teise võrrandisse.

$$2x + 3y = 5 \Leftrightarrow 2x = 5 - 3y \Leftrightarrow x = \frac{5-3y}{2}. \quad (*)$$

$$5 \cdot \frac{5-3y}{2} + 2y = 10.$$

Korrutame viimase võrrandi mõlemad pooled 2-ga ning pärast sarnaste liikmete koondamist saame, et $y = 1$.

Asendame leitud y väärtuse avaldisse $(*)$ ja leiame, et $x = 1$. Kontrolli iseseisvalt, kas leitud lahendipaar $(1; 1)$ rahuldab esialgset võrrandisüsteemi.

LIITMISVÕTE

Lahendame eelmise näite võrrandisüsteemi ka liitmisvõttega.

$$\begin{cases} 2x + 3y = 5 \mid \cdot 5 \\ 5x + 2y = 7 \mid \cdot (-2) \end{cases}$$

Süsteemis olevaid võrrandeid tuleb korrutada niisuguste arvudega, et pärast võrrandite liitmist (lahutamist) jääks alles üks tundmatu.

Saame võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} 10x + 15y = 25 \\ -10x - 4y = -14 \end{cases} +$$

Leitud y asendatakse esialgses süsteemis ükskõik kumba võrrandisse ja leitakse x väärtus. Saame jällegi, et $x = 1$.

$$11y = 11 \Leftrightarrow y = 1$$

Vastus $x = 1$ ja $y = 1$.

GRAAFILINE MEETOD

Lineaarses võrrandisüsteemis olevaid võrrandeid saab alati esitada kujul $y = kx + m$. Varasemast teame, et selliselt on esitatav lineaarfunktsioon, mille graafikuks on sirge.

Selleks, et lahendada lineaarvõrrandisüsteemi graafiliselt, tuleb:
– leida kummagi sirge peal vähemalt kaks punkti;
– joonestada sirged. Jooniselt loetud sirgete lõikepunkti koordinaadid ongi võrrandisüsteemi lahendiks.

Näide: Lahendame võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} 2x + y = 7 \\ x - y = 1 \end{cases}$$ graafiliselt.

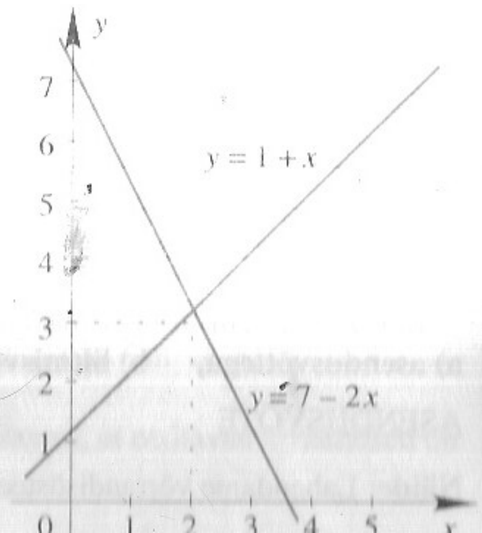
Avaldame esimesest võrrandist y, saame $y = 7 - 2x$. Leiame sellelt sirgelt kaks punkti:

x	0	3
y	7	1

Teisest võrrandist saame, et $y = 1 + x$.

Punktid:

x	0	3
y	1	4



Süsteemi lahendid on seega $x = 2$ ja $y = 3$.

Lineaarvõrrandisüsteemide lahendamisel peab teadma seda, kui palju süsteemil võib üldse lahendeid olla ja missugustel tingimustel lahendid puuduvad. Vaatame näitena kolme võrrandisüsteemi.

Näide: Lahendame võrrandisüsteemid

a) $\begin{cases} x + y = 2 \\ x - y = 0 \end{cases}$

Lahendame selle süsteemi liitmisvõttega ja saame, et

$x = 1$ ja $y = 1$

b) $\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ 2x + 3y = 6 \end{cases}$

Lahutame esimesest võrrandist teise ja saame, et

$0 = 1$

Kuna saadud võrdus ei kehti, siis on võrrandisüsteem vastuoluline ja sellel süsteemil lahendid puuduvad.

c) $\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ 4x + 6y = 10 \end{cases}$

Korrutame esimese võrrandi mõlemaid pooli 2-ga. Seejärel lahutame ülemisest võrrandist alumise, saame

$0 = 0$

Sellel võrrandisüsteemil on lõpmata palju lahendeid.

KOKKUVÕTE:

Võrrandisüsteemil $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$

on üheselt määratud lahendipaar $(x_0; y_0)$, kui	lahendid puuduvad, kui	on lõpmata palju lahendeid, kui
$\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$	$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$	$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$

Näites a: $\frac{1}{1} \neq \frac{1}{-1}$, näites b: $\frac{2}{2} = \frac{3}{3} \neq \frac{5}{6}$, näites c: $\frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \frac{5}{10}$.

Esialgu jääb toodud väite kinnituseks vaid kolm näidet. Kuid üksnes näidete järgi ei saa veel otsustada selle üle, kas need väited ka üldjuhul paika peavad. Täpsema selgituse anname sellele küsimusele edaspidi.

444. Otsusta, kas järgmistel võrrandisüsteemidel on üheselt määratud lahend, lahendid puuduvad või on lahendeid lõpmata palju.

a) $\begin{cases} 3x + 4y = 9 \\ 6x - 7y = 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3x + 4y = 9 \\ 15x + 2y = 4{,}5 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3y + 4x = 5 \\ 8x + 6y = 7 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x - 2y = -3 \\ x + 2y = -3 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 5x - 1\frac{1}{2}y = 3\frac{1}{3} \\ 10x - 3y = 6\frac{2}{3} \end{cases}$

f) $\begin{cases} x - 2y = -3 \\ 2x - 7 = 3y \end{cases}$

445. Lahenda võrrandisüsteemid.

a) $\begin{cases} 4x+3y=21 \\ 4x-3y=3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 13+2y=9x \\ 7x=3y \end{cases}$ c) $\begin{cases} 9x+3y-2=0 \\ 10x+6y-4=0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 3x=2y+1 \\ 2x=3y+4 \end{cases}$ e) $\begin{cases} 2x=5+5y \\ -8+3x=7y \end{cases}$ f) $\begin{cases} 2x+7y=-0{,}5 \\ 6x+21y=-3{,}4 \end{cases}$

446. Kirjuta igale antud võrrandile lisaks veel üks võrrand nii, et saaksime süsteemi, millel a) on parajasti üks lahend, b) lahendeid on lõpmata palju, c) lahendid puuduvad.

a) $x-y+10=0$, b) $0{,}2x=5-2y$. c) $4x-y=0$.

447. Kas võrrandisüsteemi $\begin{cases} a_1x+b_1y=0 \\ a_2x+b_2y=0 \end{cases}$ korral leiduvad sellised kordajad a_1, b_1, a_2, ja b_2, et süsteemil puudub lahend?

448. Joonesta koordinaatteljestikku sirged s: $x+3y=4$; t: $y=x$; u: $2x-y=4$. Leia jooniselt sirgete s ja t ning s ja u lõikepunktide koordinaadid.

449. Lahenda järgmised võrrandisüsteemid graafiliselt.

a) $\begin{cases} x-2y=1 \\ y-x=1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x-y+3=0 \\ 2x+y-3=0 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x-y=3 \\ 2x-2y=6 \end{cases}$

Missugusel võrrandisüsteemil puuduvad lahendid? Kuidas asetsevad sel juhul sirged? Kuidas asetsevad sirged siis, kui võrrandisüsteemil on lõpmata palju lahendeid?

2. Ruutvõrrandisüsteemide lahendamine

Vaatleme nüüd võrrandisüsteeme kahest võrrandist, millest vähemalt üks võrrand ei ole lineaarvõrrand. Selliseid võrrandisüsteeme lahendatakse üldjuhul kahel viisil: asendusvõttega või graafiliselt. Graafiline lahendusviis on küll piltlik, aga graafiliselt ei saa leida lahendite täpseid väärtusi. Seetõttu on soovitav kasutada asendusvõtet.

Näide: Lahendame võrrandisüsteemi $\begin{cases} x^2-y=1 \\ x-y=-5 \end{cases}$.

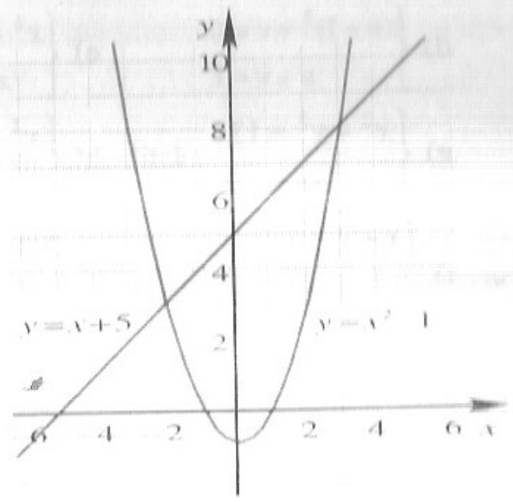
Avaldame teisest võrrandist x, saame $x=y-5$. Asendame x-i esimesse võrrandisse ja lahendame saadud ruutvõrrandi:

$(y-5)^2-y=1 \Leftrightarrow y^2-11y+24=0$.

Lahenditeks saame $y_1=8$ ja $y_2=3$. Kuna x on y kaudu avaldatud, siis leiame ka vastavad x väärtused:

$x_1=8-5=3$ ja
$x_2=3-5=-2$.

Graafilise lahenduse korral tuleb esmalt ära tunda, mis joontega meil on tegemist.
Võrrand $y=x^2-1$ (selle me saame esimesest võrrandist) on parabooli võrrand. Teine võrrand esitab sirget $y=x+5$. Joonestame mõlemad jooned teljestikku. Nende joonte lõikepunktide koordinaadid ongi võrrandisüsteemi lahenditeks (vt. joonist).



Võrrandisüsteemi lahendid on $(3;\ 8)$ ja $(-2;\ 3)$.

Võrrandisüsteemide lahendamisel võime kokku puutuda olukorraga, kus pärast asendamist ja võrrandi lihtsustamist saame neljanda astme võrrandi kujul $ax^4+bx^2+c=0$. Sellist võrrandit nimetatakse **biruutvõrrandiks** ja selle lahendusvõtetega olete tutvunud juba põhikoolis.

Näide: Lahendame võrrandisüsteemi $\begin{cases} x^2+y^2=34 \\ xy=15 \end{cases}$.

Avaldame teisest võrrandist x ja asendame esimesse võrrandisse. Tulemuseks saame võrrandi

$$\left(\frac{15}{y}\right)^2+y^2=34 \Leftrightarrow \frac{225}{y^2}+y^2=34.$$

Korrutame viimase võrrandi mõlemat poolt y^2-ga ($y\neq 0$), korrastame võrrandi liikmed, saame

$y^4-34y^2+225=0$.

Asendame $y^2=k$, saame ruutvõrrandi k suhtes:

$k^2-34k+225=0$.

Selle võrrandi lahenditeks saame $k_1=25$ ja $k_2=9$. Arvestades asendust $y^2=k$, lahendame võrrandid

$y^2=25 \Leftrightarrow y_1=5 \vee y_2=-5$
$y^2=9 \Leftrightarrow y_3=3 \vee y_4=-3$

Kuna $x=\frac{15}{y}$, siis $x_1=3$, $x_2=-3$, $x_3=5$ ja $x_4=-5$.

Vastus: Lahendid on $(3;\ 5)$, $(-3;\ -5)$, $(5;\ 3)$, ja $(-5;\ -3)$.

450. Lahenda võrrandisüsteem asendusvõttega, kontrolli saadud lahendeid.

a) $\begin{cases} xy=24 \\ x+2y=14 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x^2-y^2=27 \\ x-y=3 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x^2+xy=10 \\ 2x+y=-7 \end{cases}$

d) $\begin{cases} (u-1)^2+v=0 \\ u+v=1 \end{cases}$ e) $\begin{cases} x^2+y^2=153 \\ x-y=9 \end{cases}$ f) $\begin{cases} x^2+y^2=65 \\ x+y=11 \end{cases}$

g) $\begin{cases} x^2+y^2=13 \\ xy=-6 \end{cases}$ h) $\begin{cases} x^2+y^2=50 \\ xy=-7 \end{cases}$ i) $\begin{cases} x^2+y^2=17 \\ xy=4 \end{cases}$

j) $\begin{cases} x+y=7 \\ y=\dfrac{6}{x} \end{cases}$ k) $\begin{cases} x^2-y^2=16 \\ x+y=8 \end{cases}$ l) $\begin{cases} \dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}=\dfrac{13}{6} \\ x+y=5 \end{cases}$

451. Järgmise programmi abil saab lahendada biruutvõrrandeid. Kas see programm võimaldab ka ruutvõrrandeid lahendada? Missugused muudatused tuleks siis programmis teha?

```
10 REM BIRUUTVÕRRANDI LAHENDAMINE
20 INPUT "Anna kordajad a, b ja c ";A,B,C
30 IF A=0 THEN 20
40 D=B*B-4*A*C
50 IF D<0 THEN 130
60 M1=(-B+SQR(D))/2/A
70 M2=(-B-SQR(D))/2/A
80 IF M1<0 AND M2<0 THEN 130
90 IF M1=0 THEN 110
100 PRINT "x=";SQR(M1);"x=";-SQR(M1);
110 IF M2<0 THEN 140
115 PRINT "x=";SQR(M2);"x=";-SQR(M2);
120 GOTO 140
130 PRINT "Reaalarvulised lahendid puuduvad"
140 END
```

4.1.6. VÕRRANDITE JA VÕRRANDISÜSTEEMIDE KOOSTAMINE JA LAHENDAMINE

Tekstülesannete lahendamisel, mis eeldavad võrrandi või võrrandisüsteemi koostamist ja lahendamist, võib tegutseda etapiviisiliselt.

1. Ülesandes leiduvad otsitavad suurused tähistatakse tähtedega x, y, z jne.
2. Ülesandes sisalduvate andmete järgi koostatakse võrrand või võrrandisüsteem.
3. Saadud võrrand või võrrandisüsteem lahendatakse.
4. Lahendeid kontrollitakse ülesande teksti järgi.

Näide: Leia selline kahekohaline arv, mille üheliste number on kümneliste numbrist kahe võrra suurem ning mille korrutis tema ristsummaga on 144.

Olgu x kümneliste number ja y üheliste number. Kahekohaline arv on siis $10x+y$. Ülesande tingimustest järeldub, et

$y-x=2$ ja $(10x+y)(x+y)=144$.

Saame võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} y-x=2 \\ (10x+y)(x+y)=144 \end{cases}$$

Asendusvõttega lahendamisel saame süsteemi lahenditeks

(2; 4) ja $\left(-3\frac{2}{11};\ -1\frac{2}{11}\right)$.

Teine lahendipaar ei rahulda ülesande tingimusi: x ja y on positiivsed täisarvud 0 ja 9 vahelt. Seega on arv 24 ainus ülesande tingimusi rahuldav arv.

Näide: Kui palju tuleb võtta hõbedat prooviga 850 ja kui palju hõbedat prooviga 720, et saada 1040 g hõbedat prooviga 800?

Hõbe prooviga 850 sisaldab 85% hõbedat ja 15% lisandeid, hõbedas prooviga 720 on 72% hõbedat ja 28% lisandeid.

Olgu hõbedat prooviga 850 x grammi, siis hõbedat prooviga 720 on $(1040-x)$ grammi.

Kuna tahetakse saada hõbedat prooviga 800, siis see sisaldab puhast hõbedat 80%. Lähtume nüüd meile teadaolevast seosest:

$$\text{kontsentratsioon} = \frac{\text{puhta aine mass}}{\text{kogu mass}}.$$

Seega saame võrrandi $\dfrac{0{,}85x+0{,}72(1040-x)}{1040}=0{,}8$.

Tekkinud lineaarvõrrandi lahendiks on $x = 640$. Järelikult tuleb hõbedat prooviga 800 võtta 640 grammi ja hõbedat prooviga 720 võtta $1040-640=400$ grammi.

Kontrolli iseseisvalt, kas saadud tulemused rahuldavad ülesandes esitatud tingimusi.

Näide: 720-dollarine arve tuleb tasuda võrdselt teatud arvul inimestel. Kui inimesi oleks kolme võrra vähem, siis peaks igaüks maksma 40 dollarit rohkem. Mitmele inimesele oli arve määratud?

Olgu inimeste arv K. Iga inimene maksaks siis $\frac{720}{K}$ dollarit, kui inimesi oleks $K-3$, siis maksaks igaüks $\frac{720}{K-3}$ dollarit. Nüüd saame koostada võrrandi

$$\frac{720}{K-3}-\frac{720}{K}=40 \Leftrightarrow \frac{720K-720K+2160}{K(K-3)}=40.$$

Ruutvõrrandi $K^2-3K-54=0$ lahenditeks saame

$K_1=9$ ja $K_2=-6$.

Teine leitud lahenditest ei sobi, järelikult oli arve määratud 9 inimesele.

Näide: Esita arv 19 naturaalarvude kuupide vahena.

Seega $19 = a^3 - b^3$, kus $a, b \in \mathbb{N}$.

Kuna arv 19 on algarv, siis ta esitub naturaalarvude korrutisena vaid kujul $19 = 19 \cdot 1$ ja kuupide vahe valemit kasutades võime kirjutada $19 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$.

1	19
19	1

Lahendame kaks võrrandisüsteemi:

1. $\begin{cases} a - b = 1 \\ a^2 + ab + b^2 = 19 \end{cases}$ Avaldame esimesest võrrandist a ja asendame teise võrrandisse, saame b suhtes ruutvõrrandi $b^2 + b - 6 = 0$. Lahendid on $b_1 = 2$ ja $b_2 = -3$.

Kui $b = 2$, siis $a = 3$. Tõepoolest, $3^3 - 2^3 = 27 - 8 = 19$. Teine lahend $b = -3$ pole naturaalarvuline ja seega ei sobi.

2. $\begin{cases} a - b = 19 \\ a^2 + ab + b^2 = 1 \end{cases}$ Selle võrrandisüsteemi lahendame nagu eelmisegi. Saame ruutvõrrandi $b^2 + 19b + 120 = 0$.

Saadud ruutvõrrandil puuduvad reaalarvulised lahendid, seega puuduvad ka võrrandisüsteemil lahendid.

Vastus: $19 = 3^3 - 2^3$.

Näide: Angelika, Aivar ja Tanel kasvatasid suhkrupeeti. Angelika ja Tanel said kahe peale kokku kaks korda rohkem suhkrupeeti kui Aivar. Aivar ja Tanel kahe peale said Angelikast kolm korda rohkem suhkrupeeti. Kelle põllul oli kõige suurem saak?

Tähistame ülesandes olevad suurused nii:
Angelika saak: x,
Aivari saak y ja
Taneli saak z.

Saame võrrandisüsteemi, milles on kaks võrrandit ja kolm tundmatut.

$\begin{cases} x + z = 2y \\ y + z = 3x \end{cases}$ Sellest süsteemist ei leia me x, y ja z konkreetseid väärtusi, piisab, kui suudame suhtearvude kaudu järjestada x, y ja z.

Jagame esimese ja teise võrrandi mõlemaid pooli z-ga, saame

$\begin{cases} \frac{x}{z} + 1 = 2 \cdot \frac{y}{z} \\ \frac{y}{z} + 1 = 3 \cdot \frac{x}{z} \end{cases}$ Lahendame selle süsteemi $\frac{x}{z}$ ja $\frac{y}{z}$ suhtes. Saame, et $\frac{x}{z} = \frac{3}{5}$ ja $\frac{y}{z} = \frac{4}{5}$, millest omakorda järeldub, et $x : y : z = 3 : 4 : 5$.

Vastus: Tanel kogus kõige suurema saagi.

Liikumisülesannete (aga ka muud tüüpi ülesannete) korral on otstarbekas andmed esitada tabelina. Selline esitusviis hõlbustab võrrandi koostamist.

Näide: Sirgel vaarikavarrel, punktides A ja B, on kaks tigu. Punktide A ja B vahekaugus on 40 cm. Punktist A allaroomav tigu läbib tunnis 2 cm rohkem kui punktist B ülesroomav tigu ja jõuab punkti B üks tund varem kui teine tigu punkti A. Leia kumbagi teo kiirus.

Koostame tabeli:

	Tee (cm)	Aeg (h)	Kiirus ($\frac{\text{cm}}{\text{h}}$)
Allaroomav tigu	40	t	$40 : t$
Ülesroomav tigu	40	$t + 1$	$40 : (t + 1)$

Saame võrrandi $\frac{40}{t} - 2 = \frac{40}{t+1}$.

Võrrandi lahenditeks saame $t_1 = 4$ ja $t_2 = -5$ (ei sobi).

Tabeli neljandast veerust leiamegi, et esimese teo kiirus oli 10 $\frac{\text{cm}}{\text{h}}$ ja teise teo kiirus oli 8 $\frac{\text{cm}}{\text{h}}$.

452. Kaks töölist valmistavad 350 detaili, kusjuures esimene töötas 6 tundi ja teine, valmistades tunnis 15 detaili vähem kui esimene, töötas 7 tundi. Mitu detaili valmistas tunnis kumbki tööline?

453. Ruudu pindala on ristküliku pindalast suurem 10 m^2 võrra. Leia ruudu ja ristküliku ümbermõõt, kui ristküliku üks külg on ruudu küljest suurem 1 m võrra ja teine külg väiksem 2 m võrra.

454. Leia kaks arvu, mille summa, vahe ja korrutis suhtuvad nagu arvud $5 : 1 : 18$.

455. Kui murru lugejat vähendada ühe võrra, siis saame $\frac{1}{2}$. Kui aga murru lugejat suurendada kahe võrra ja nimetajat vähendada ühe võrra, siis saame $1\frac{2}{3}$. Leia see murd.

456. Ristkülikukujuline lillepeenar, mille küljed on 2 m ja 4 m, on piiratud ühe lause teega. Leia tee laius, kui selle pindala on 9 korda suurem lillepeenra pindalast.

457. On kahte sorti värvi. 1 kg esimest sorti värvi maksab 1,4 kr, ja 1 kg teist sorti värvi maksab 1,3 kr. Mitu kilogrammi tuleb kummastki sordist värvi võtta, et saada 10 kg segu, mille hind on 1,36 kr?

458. Klubi saalis on 270 kohta. Pärast seda, kui kohtade arvu igas reas suurendati 1 võrra ja lisati veel 2 rida, on saalis 320 kohta. Mitu rida on nüüd saalis?

459. Brigaad pidi valmistama tähtajaks 8000 detaili. Tehes iga päev 50 detaili rohkem, kui ette nähtud, lõpetas brigaad töö 8 päeva enne tähtaega. Mitu päeva oli detailide valmistamiseks ette nähtud?

460. Turist sõitis $\frac{5}{8}$ kogu teest autoga ja ülejäänud osa mootorpaadiga. Mootorpaadi kiirus on $20\frac{\text{km}}{\text{h}}$ võrra väiksem auto kiirusest. Autoga sõitis turist 15 minutit kauem kui mootorpaadiga. Leia auto ja mootorpaadi kiirus, kui kogu tee pikkus on 160 km.

461. Lennuk lendas kiirusega $780\frac{\text{km}}{\text{h}}$. Kui tal jäi veel lennata 680 km vähem, kui oli juba lennatud, muutis ta kiirust ja hakkas lendama kiirusega $830\frac{\text{km}}{\text{h}}$. Keskmine kiirus kogu teel oli tal $800\frac{\text{km}}{\text{h}}$. Kui pika vahemaa läbis lennuk?

Uuri hoolikalt kolme järgmist ülesannet. Mille poolest need ülesanded on sarnased?

462. Turist kavatses matkata k km. Ta läbis iga päev n kilomeetrit rohkem kui planeeritud. Siis kestis matk plaanitust m päeva vähem. Mitmele päevale planeeriti matk?

463. Albumisse taheti kleepida k pilti, igale leheküljele ühepalju. Kui igale lehele panna n pilti rohkem kui esialgu otsustatud, siis jääb m lehte tühjaks. Leia, mitu lehte on albumis.

464. Kahe linna vaheline kaugus on k km. Ühe ratturi keskmine kiirus on teise ratturi keskmisest kiirusest $n\frac{\text{km}}{\text{h}}$ võrra suurem. Seetõttu jõuab ta kohale m tundi varem. Mitu tundi oli teel aeglasem rattur?

Püüa leida nende ülesannete lahendamiseks ühine eeskiri. Kas selliseid ülesandeid saaks arvuti abil lahendada? Kirjuta arvutile selline programm, mis võimaldab kolme eespool toodud ülesannet lahendada. Uuri samalt seisukohalt kahte järgmist ülesannet.

465. Kahe linna vahemaa mööda jõge a km. Laeval kulub edasi-tagasi sõiduks b tundi. Leia laeva kiirus seisvas vees, kui jõe voolu kiirus on $y\frac{\text{km}}{\text{h}}$.

466. Kahe linna vahemaa mööda jõge a km. Laeval kulub pärivoolu sõitmiseks c tundi vähem aega kui vastuvoolu sõiduks. Leia laeva kiirus seisvas vees. Jõe voolu kiirus on $y\frac{\text{km}}{\text{h}}$.

467. Kahekohalise arvu üheliste number on neli korda väiksem kümneliste numbrist. Kui sellest arvust lahutada 54, saame samade numbritega, kuid vastupidises järjestuses kirjutatud arvu. Leia esialgne arv.

468. Sadamast väljusid üheaegselt kaks aurikut teineteisega ristuvas suunas. Poole tunni möödudes oli nende vahekaugus 15 kilomeetrit, aga veel 15 minuti pärast oli üks aurikutest sadamast 4,5 kaugusel. Leia aurikute kiirus.

469. Kui põllu kündmisel oli üks traktor juba 6 tundi töötanud, tuli appi teine traktor. Pärast neljatunnilist koostööd oli põld küntud. Mitme tunniga oleks kündnud selle põllu kumbki traktor eraldi, kui esimesel traktoril oleks kulunud 3 tundi rohkem kui teisel?

470. Leia naturaalarvude paarid, mille ruutude vahe on 45.

471. Kui mingile naturaalarvule liita 100, siis ta naturaalarvu ruut. Kui esialgsele arvule liita 168, siis on tulemus mingi teise naturaalarvu ruut. Leia esialgne arv.

472. Leia kaks naturaalarvu, kui nende summa on 85 ja vähim ühiskordne 102.

4.2. DETERMINANDI MÕISTE. KAHEREALISE DETERMINANDI KASUTAMINE VÕRRANDISÜSTEEMIDE LAHENDAMISEL

Paljude sisult erinevate probleemide lahendamine viib ühe ja sama seaduse järgi koostatud avaldisteni. Sel juhul on otstarbekas uurida nende avaldiste üldisi omadusi.

Üheks selliseks avaldiseks on kahe korrutise vahe.

Näide 1: Kui neli arvu a, b, c ja d on võrdelised, s.t.

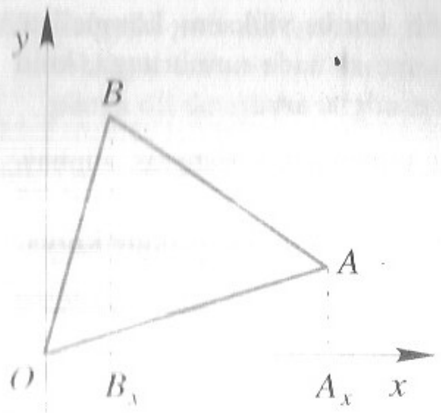
$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, siis $a \cdot d = b \cdot c$ ehk $a \cdot d - b \cdot c = 0$.

Viimase võrduse võib kirja panna kujul

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 0.$$

Võrduse vasakul pool olevat tabelit tuleb mõista avaldisena, mis saadakse, kui arvude a ja d korrutisest lahutatakse arvude c ja b korrutis.

Näide 2: Kolmnurga OAB tipud on $O(0; 0)$, $A(x_1; y_1)$ ja $B(x_2; y_2)$. Arvutame selle kolmnurga pindala.



Kolmnurga OAB pindala leiame nii: kolmnurga OBB_x pindalale liidame trapetsi B_xBAA_x pindala ning tulemusest lahutame täisnurkse kolmnurga OA_xA pindala.
Saame, et

$$S=\frac{x_2y_2}{2}+\frac{y_1+y_2}{2}(x_1-x_2)-\frac{x_1y_1}{2}$$

ja pärast sarnaste liikmete koondamist

$$S=\frac{1}{2}(x_1y_2-x_2y_1)$$

ehk teisiti kirjutatult

$$S=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}.$$

Märkus: Saadud valem kolmnurga pindala arvutamiseks kehtib ka siis, kui kolmnurga tipp A juures oleks nürinurk või täisnurk. Sel juhul valemi tuletuskäik erineks mõnevõrra eelnevast, kuid lõpptulemus on sama.

Näide 3: Olgu vaja lahendada lineaarvõrrandisüsteem

$$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$$

kus a_1, b_1, c_1, a_2, b_2 ja c_2 on antud arvud ja x ning y on tundmatud.

Avaldanud esimesest võrrandist x-i ja asendanud saadud tulemuse teise võrrandisse, saame

$$a_1x+b_1y=c_1 \quad\Leftrightarrow\quad x=\frac{c_1-b_1y}{a_1}, \text{ kui } a_1\neq 0.$$

$$a_2\left(\frac{c_1-b_1y}{a_1}\right)+b_2y=c_2 \quad \Big|\cdot a_1 \text{ korrutame võrrandi pooli } a_1\text{-ga}$$

$$a_2c_1-a_2b_1y+a_1b_2y=c_2a_1 \;\Rightarrow\; y=\frac{a_1c_2-a_2c_1}{a_1b_2-a_2b_1}. \qquad (*)$$

Analoogiliselt saab näidata, et $x=\dfrac{c_1b_2-c_2b_1}{a_1b_2-b_1a_2}$. (**)

Saadud valemeid saab muuta kergemini meeldejäävaks, kui murdude lugejates ja nimetajates olevad korrutiste vahed esitada tabelina:

$$a_1b_2-a_2b_1=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix},\quad a_1c_2-a_2c_1=\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} \text{ ja}$$

$$c_1b_2-c_2b_1=\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}.$$

Avaldist kujul $a\cdot d-b\cdot c$ nimetatakse kaherealiseks determinandiks ja kirjutatakse tabelina, milles on kaks rida ja kaks veergu:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=a\cdot d-b\cdot c.$$

Arve a, b, c ja d nimetatakse **determinandi elementideks**. Leiame näidetena mõnede determinantide väärtused:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 4 \end{vmatrix}=2\cdot 4-5\cdot 3=-7; \qquad \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}=4\cdot 1-3\cdot 2=-2;$$

$$\begin{vmatrix} a & b \\ b & a \end{vmatrix}=a^2-b^2; \qquad \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}=3\cdot 4-2\cdot 6=0.$$

Kolmandas näites leitud võrrandisüsteemide lahendid esituvad determinantide abil järgmiselt:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} \quad \text{ja} \quad y=\frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}.$$

Murru nimetajas olev determinant koosneb tundmatute ees olevatest kordajatest. Seda determinanti nimetatakse **võrrandisüsteemi determinandiks** ja tähistatakse tähega D. Murru lugejas olevate determinantide elemendid on aga saadud süsteemi determinandist vastava tundmatu kordajate asendamisel vabaliikmetega. Neid determinante tähistatakse lühidalt tähtedega D_x ja D_y.

Seega võrrandisüsteemi $\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$ *lahend esitub kujul*

$$x=\frac{D_x}{D} \quad ja \quad y=\frac{D_y}{D}, \quad kus\ D\neq 0.$$

Näide: Lahendame võrrandisüsteemi $\begin{cases} 4x+7y=2 \\ x+2y=1. \end{cases}$

Süsteemi determinant on $D=\begin{vmatrix} 4 & 7 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=4\cdot 2-1\cdot 7=1,$

determinant $D_x=\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=2\cdot 2-1\cdot 7=-3$ ja

determinant $D_y=\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=4\cdot 1-1\cdot 2=2.$

Seega $x=\dfrac{D_x}{D}=\dfrac{-3}{1}=-3$ ja $y=\dfrac{D_y}{D}=\dfrac{2}{1}=2.$

Kontrolli, kas saadud lahendid rahuldavad võrrandisüsteemi.

473. Arvuta determinandi väärtus.

a) $\begin{vmatrix} 6 & 7 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 18 & 3 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} 4 & 7 \\ 13 & 9 \end{vmatrix}$ d) $\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}$

e) $\begin{vmatrix} 36 & 28 \\ -36 & -28 \end{vmatrix}$ f) $\begin{vmatrix} 36 & 28 \\ 18 & 14 \end{vmatrix}$ g) $\begin{vmatrix} 36 & 28 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$ h) $\begin{vmatrix} 0{,}5 & -2{,}4 \\ 3{,}5 & 5{,}4 \end{vmatrix}$

474. Kontrolli, missugused võrdused kehtivad.

a) $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$

d) $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix}$ e) $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b & a \\ d & c \end{vmatrix}$ f) $\begin{vmatrix} a & b \\ 0 & c \end{vmatrix} = ac$

475. Lahenda võrrand.

a) $\begin{vmatrix} 2 & x \\ x & 8 \end{vmatrix} = 0$ b) $\begin{vmatrix} x+2 & x-1 \\ x+3 & x+4 \end{vmatrix} = 7$ c) $\begin{vmatrix} 3 & k \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} k & 1 \\ 3 & 7 \end{vmatrix}$

d) $\begin{vmatrix} 5 & 6-x \\ x+2 & 3 \end{vmatrix} = 0$ e) $\begin{vmatrix} 5+x & x+3 \\ x-1 & 5+x \end{vmatrix} = 4$ f) $\begin{vmatrix} x & x \\ x & 2x \end{vmatrix} = 0$

476. Avalda ja lihtsusta.

a) $\begin{vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 1+\sqrt{2} & 2-\sqrt{5} \\ 2+\sqrt{5} & 1-\sqrt{2} \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} x-1 & 1 \\ x^3 & x^2+x+1 \end{vmatrix}$

d) $\begin{vmatrix} a^2-ab+b^2 & a-b \\ a^2+ab+b^2 & a+b \end{vmatrix}$ e) $\begin{vmatrix} u-v & u+v \\ u+v & u-v \end{vmatrix}$ f) $\begin{vmatrix} u^{-2} & v^{-2} \\ u^{-3} & v^{-3} \end{vmatrix}$

477. Lahenda võrrandisüsteemid determinantide abil.

a) $\begin{cases} x+3y=4 \\ 4x-y=3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 5x-6y=11 \\ x-y=2 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 3x+4y=0 \\ 5x-7y=0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2x-y-3=0 \\ x+2y-4=0 \end{cases}$ e) $\begin{cases} 8x-3y=46 \\ 5x+6y=13 \end{cases}$ f) $\begin{cases} x-y+5=0 \\ x-3y+9=0 \end{cases}$

g) $\begin{cases} 7{,}3x+2{,}8y=59{,}42 \\ 3{,}4x-2{,}8y=2{,}64 \end{cases}$ h) $\begin{cases} -2{,}3x+4{,}9y=-6{,}2 \\ 6{,}7x+2{,}9y=31{,}8 \end{cases}$

478. Lihtsusta ja seejärel lahenda võrrandisüsteem determinantide abil.

a) $\begin{cases} 4(x+2)=1-5y \\ 3(y+2)=3-2x \end{cases}$ b) $\begin{cases} \frac{x}{3}+5y=28 \\ x-6y=0 \end{cases}$ c) $\begin{cases} \frac{p}{2}-\frac{q}{3}=1 \\ \frac{p}{4}+\frac{2q}{3}=8 \end{cases}$

d) $\begin{cases} \frac{x+1}{3}-\frac{y-2}{4}=\frac{2(x-y)}{5} \\ \frac{x-3}{4}-\frac{y-3}{3}=2y-x \end{cases}$ e) $\begin{cases} \frac{3x-2y}{5}+\frac{5x-3y}{3}=x+1 \\ \frac{2x-3y}{3}+\frac{4x-3y}{2}=y+1 \end{cases}$

Punktis 4.1.5. leidsime näidete abil seaduspärasused, mis võimaldasid võrrandite kordajate abil määrata seda, kas võrrandisüsteemil on üks lahend või lõpmata palju lahendeid või lahendid puuduvad. Nüüd põhjendame seal leitud seaduspärasust.

1. Et antud võrrandisüsteemil oleks parajasti üks lahend, peab süsteemi determinant D olema nullist erinev, s.t.

$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$. *(Miks?)*

Kui $D \neq 0$, siis $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$ ehk $a_1b_2 \neq a_2b_1$ ehk $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$.

Järeldus: Selleks, et võrrandisüsteemil oleks ühene lahend, ei tohi tundmatute kordajad olla võrdelised.

2. Olgu süsteemi determinant $D = 0$ ja ülejäänud determinantidest üks (näiteks D_x) samuti võrdne nulliga. Näitame, et sel juhul determinant $D_y = 0$.

Eeldustest $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0$ ja $\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0$ saab järeldada, et

$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$ ja $\frac{c_1}{c_2} = \frac{b_1}{b_2}$. Mõlema võrduse paremad pooled on võrdsed, järelikult on ka vasakud pooled omavahel võrdsed.

Saime, et $\frac{a_1}{a_2} = \frac{c_1}{c_2}$ ehk teisiti $D_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = 0$.

Kui kõik kolm determinanti on nullid, siis tundmatud avalduvad kujul $x = \frac{0}{0}$ ja $y = \frac{0}{0}$. Sümbol $\frac{0}{0}$ ei määra aga mingit arvu.

Olgu $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} = k$, siis $a_1 = ka_2$, $b_1 = kb_2$ ja $c_1 = kc_2$.

Võrrandi $a_1x + b_1y = c_1$ võime nüüd esitada kujul

$ka_2x + kb_2y = kc_2$.

Viimasel võrrandil on samad lahendid mis võrrandil

$a_2x + b_2y = c_2$.

Seega rahuldavad vaadeldaval juhul süsteemi mõlemat võrrandit ühed ja samad arvupaarid.

> Kui lineaarvõrrandisüsteemis võrrandite vastavad kordajad ja vabaliikmed on võrdelised, siis on võrrandisüsteemil lõpmata palju lahendeid.

3. Kui süsteemi determinant on null ja üks ülejäänud kahest determinandist (näiteks D_x) ei ole null, siis ei ole null ka teine determinant (antud juhul D_y).

Eeldusest $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0$ ja $\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$ saab järeldada, et $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$ ja $\frac{c_1}{c_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$.

Saime, et $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$ ehk teisiti $D_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} \neq 0$.

Tähistame $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = m$. Siis $a_1 = ma_2$ ja $b_1 = mb_2$, aga $c_1 \neq mc_2$.

Vaadeldav võrrandisüsteem on esitatav kujul

$$\begin{cases} ma_2x + mb_2y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases} \quad \text{ehk} \quad \begin{cases} a_2x + b_2y = \frac{c_1}{m} \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}.$$

Et $c_1 \neq mc_2$, siis näeme, et saadud võrrandite vasakud pooled on samad, paremad pooled aga erinevad. Järelikult on need võrrandid vasturääkivad, ehk teisiti öeldes võrrandisüsteemil lahendid puuduvad.

Kui lineaarvõrrandisüsteemi tundmatute kordajad on võrdelised, kuid ei ole võrdelised vabaliikmetega, siis võrrandisüsteemil lahendid puuduvad.

Seega kokku võttes:

1. Kui $D \neq 0$, siis $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$ ja võrrandisüsteemil on ühene lahend.
2. Kui $D = 0$, $D_x = 0$ ja $D_y = 0$, siis $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$ ja võrrandisüsteemil on lõpmata palju lahendeid.
3. Kui $D = 0$ ja $D_x \neq 0$ ja $D_y \neq 0$, siis $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$ ja võrrandisüsteemil pole lahendeid.

479. Lahendada võrrandisüsteem.

a) $\begin{cases} x - y + 5 = 0 \\ x - 3y + 9 = 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x + 4y = -12 \\ 6x + 8y = 24 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x - 3y = -18 \\ 10 = 4x - 6y \end{cases}$

d) $\begin{cases} x - 5 = -y \\ 2x + 2y = 3 \end{cases}$ e) $\begin{cases} 2x - y = 3 \\ x + 2y = 4 \end{cases}$ f) $\begin{cases} 2x - 3y = 4 \\ 4x - 6y = 8 \end{cases}$

480. Leia parameetri väärtused nii, et võrrandisüsteemil oleks üheselt määratud lahend, lahendeid oleks lõpmata palju, lahendid puuduvad.

a) $\begin{cases} x + y = a \\ x - y = 2b \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + y = c \\ 2x + 2y = 3c - d \end{cases}$ c) $\begin{cases} ax + by = 1 \\ a^2x - b^2y = a \end{cases}$

d) $\begin{cases} 3ax + 2by = 15 \\ ax - by = -5 \end{cases}$ e) $\begin{cases} a + \frac{x}{b} = by \\ b - x = \frac{b^2y}{a} \end{cases}$ f) $\begin{cases} \frac{x+a}{y} = b \\ \frac{x+b}{y} = a \end{cases}$

481. Leia a väärtused, mille korral võrrandisüsteemil on ühene lahend.

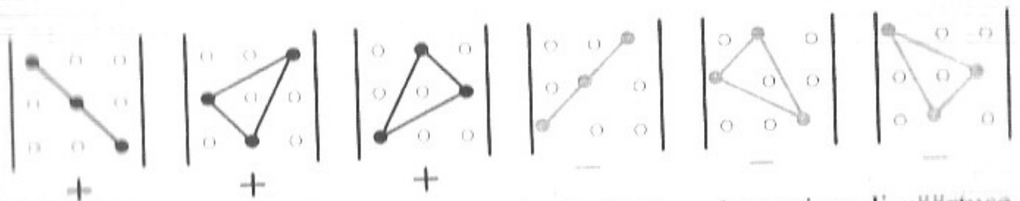
a) $\begin{cases} (a+1)x - y = a + 1 \\ x + (a-1)y = 2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} ax + y = a \\ x + ay = a^2 \end{cases}$

4.3. KOLMEREALINE DETERMINANT. DETERMINANDI OMADUSED

Avaldist $a_1b_2c_3 + c_1a_2b_3 + b_1c_2a_3 - c_1b_2a_3 - a_2c_3b_1 - b_3a_1c_2$ nimetatakse kolmerealiseks determinandiks ja kirjutatakse tabelina, milles on kolm rida ja kolm veergu:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Kolmereal ise determinandi väärtuse arvutamiseks kasutatakse järgmist skeemi, mida nimetatakse ka Sarruse[1] reegliks:



Lisatud märgid näitavad, millised korrutised võetakse determinandi väärtuse arvutamisel sama märgiga ja missugused vastandmärgiga.

Näide: arvutame kahe järgmise determinandi väärtused:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 4 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 2\cdot4\cdot(-1) + (-1)\cdot(-2)\cdot3 + (-3)\cdot1\cdot0 - (-3)\cdot4\cdot3 - (-1)\cdot1\cdot(-1) - 2\cdot(-2)\cdot0 = 33.$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 1\cdot5\cdot9 + 3\cdot4\cdot8 + 2\cdot6\cdot7 - 3\cdot5\cdot7 - 1\cdot6\cdot8 - 2\cdot4\cdot9 = 45 + 96 + 84 - 105 - 48 - 72 = 0.$$

Determinandi $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

elemente a_1, b_2 ja c_3 nimetatakse **peadiagonaali elementideks** ja elemente c_1, b_2 ja a_3 nimetatakse **kõrvaldiagonaali elementideks**.

[1] Sarrus, Pierre Frédéric (1798 — 1861) — prantsuse matemaatik.

Sarruse reegli järgi on determinandi väärtust küll lihtne arvutada, kuid arvutuskäiku võib veelgi lihtsustada, kui determinandist paremale kirjutada täiendavalt juurde esimene ja teine veerg ning arvutada diagonaalidel asuvate elementide korrutised näidatud suundades.

sama märgiga

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \quad \begin{matrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & a_3 \end{matrix}$$

vastandmärgiga

Peadiagonaali sihis võetud korrutised liidetakse ja tulemusest lahutatakse kõrvaldiagonaali sihis võetud korrutised.

Kontrolli, kas selliselt arvutades saad eelmises näites antud determinantide korral samad tulemused kui Sarruse reegli järgi arvutades.

Determinantidel on terve rida omadusi. Need omadused kehtivad kaherealiste, kolmerealiste kui ka suurema ridade ja veergude arvuga determinantide korral. Omaduste kehtivust näitame siiski ainult kaherealiste determinantide korral.

1. Determinandi väärtus ei muutu, kui tema read teha veergudeks ja veerud ridadeks.

Näitame, et kehtib võrdus $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}$

Võrduse vasaku poole väärtus on $ad - cb$ ja parema poole väärtus on $ad - bc$. Seega on võrduse mõlemad pooled võrdsed.

Sellest omadusest järeldub, et kõik laused, mis kehtivad determinandi ridade kohta, kehtivad ühtlasi ka determinandi veergude kohta.

2. Kahe rea (veeru) vahetamisel muutub determinandi märk vastupidiseks.

Tõepoolest, $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - cb$ ja $\begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix} = cb - ad = -(ad - cb)$

ehk $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix}$.

3. Kui determinandi read (veerud) on võrdsed, siis on determinant võrdne nulliga.

Tõepoolest, $\begin{vmatrix} a & b \\ a & b \end{vmatrix} = ab - ab = 0.$

4. Determinandi mingi rea (veeru) kõigi elementide korrutamisel ühe ja sama teguriga korrutub determinant selle teguriga.

Korrutame determinandi $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ üht rida mingi arvuga k, siis

$$\begin{vmatrix} ka & kb \\ c & d \end{vmatrix} = kad - kcb = k(ad - cb) = k\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}.$$

Kahest viimasest omadusest järeldub, et kehtib järgmine omadus:

5. Determinant võrdub nulliga, kui determinandi kahe rea (veeru) vastavad elemendid on võrdelised.

$$\begin{vmatrix} a & b \\ ka & kb \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a & b \\ a & b \end{vmatrix} = 0.$$

6. Kui determinandi ühe rea (veeru) kõik elemendid on nullid, siis on determinant võrdne nulliga.

$$\begin{vmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = a \cdot 0 - 0 \cdot b = 0.$$

7. Kui determinandis asuvad ühel pool peadiagonaali vaid nullid, siis on determinant võrdne peadiagonaali elementide korrutisega. Kui ühel pool kõrvaldiagonaali on vaid nullid, siis on determinandi väärtus võrdne kõrvaldiagonaali elementide korrutise vastandarvuga.

Selle omaduse kehtivust kontrollime kolmerealise determinandi korral kahe näite abil.

Näited:

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 3 \cdot 3 \cdot 2 + (-2) \cdot 5 \cdot \mathbf{0} + 3 \cdot \mathbf{0} \cdot \mathbf{0} - 3 \cdot 3 \cdot \mathbf{0} - \mathbf{0} \cdot 5 \cdot 3 - 2 \cdot \mathbf{0} \cdot (-2) = 18$$

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 & 3 \\ 5 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -18,$$ sest see determinant on saadud eelmisest esimese ja kolmanda veeru ümberpaigutamise teel.

482. Arvuta determinandi väärtus.

a) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} -2 & 3 & 3 \\ -4 & 6 & 6 \\ 2 & 4 & 4 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} -3 & 3 & 12 \\ 4 & 6 & 7 \\ 2 & 4 & 6 \end{vmatrix}$ d) $\begin{vmatrix} 0{,}3 & -0{,}3 & 15 \\ 3 & 5 & 7 \\ 7 & -2 & -3 \end{vmatrix}$

Missuguseid determinandi omadusi võib kasutada juhtudel b ja c, et arvutamine oleks võimalikult lihtne?

483. Leia järgmiste determinantide väärtused.

a) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 4 & 0 & 8 \\ 8 & 2 & 3 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 4 & 0 & 8 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}$ d) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 6 \end{vmatrix}$

484. Kasutades determinantide omadusi, selgita, kas võrdus kehtib.

a) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 3 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -2$ b) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 3 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 4 & 4 & 6 \\ 5 & 5 & 5 \end{vmatrix} = 0$

d) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$ e) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix}$

485. Leia a väärtus nii, et kehtiks võrdus.

a) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 2 & 6 & a \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 0$ b) $\begin{vmatrix} 4 & 2 & 5 \\ 6 & a & 3 \\ a & 3 & 1 \end{vmatrix} = 1$ c) $\begin{vmatrix} a & 3 & 5 \\ 4 & 6 & 3 \\ a & 2 & 2 \end{vmatrix} = -2$

486. Näita, et determinandi omadused 1 — 7 kehtivad ka kolmerealiste determinantide korral.

487. Näita, et järgmised kaks determinantide omadust kehtivad
a) kahekealiste determinantide korral;
b) kolmerealiste determinantide korral;

8. Kui determinandi mõne rea (veeru) elemendid esinevad kahe liidetava summana, siis ka determinant avaldub kahe determinandi summana, kusjuures esimese determinandi vastavas reas (veerus) on esimesed liidetavad ja teise determinandi vastavas reas (veerus) teised liidetavad.

9. Determinandi väärtus ei muutu, kui ühe rea (veeru) elementidele liita ühe ja sama teguriga korrutatud teise rea (veeru) elemendid.

488. Kontrolli, kas kehtivad järgmised võrdused.

a) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} j & k & l \\ m & n & p \\ q & r & s \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+j & b+k & c+l \\ d+m & e+n & f+p \\ g+q & h+r & i+s \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} j & k & l \\ m & n & p \\ q & r & s \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a \cdot j & b \cdot k & c \cdot l \\ d \cdot m & e \cdot n & f \cdot p \\ g \cdot q & h \cdot r & i \cdot s \end{vmatrix}$

Too vähemalt üks näide selle kohta, et teatavatel tingimustel need valemid kehtivad.

489. Arvud 204, 527 ja 255 jaguvad 17-ga. Ilma determinanti arvutamata näita, et determinandi A väärtus jagub 17-ga.

$A = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 5 & 2 & 7 \\ 2 & 5 & 5 \end{vmatrix}$ Näpunäide: kasuta omadust 9.

4.4. KOLME TUNDMATUGA LINEAARVÕRRANDISÜSTEEMID

Vaatleme võrrandisüsteeme, mis sisaldavad kolme kolme tundmatuga lineaarvõrrandit. Sellise võrrandisüsteemi üldkuju on:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3. \end{cases} \quad (*)$$

Võrrandisüsteemi (*) võib lahendada mitmel erineval viisil:

a) ühe tundmatu elimineerimise võte.

Võrrandisüsteemi ühest võrrandist avaldatakse mingi tundmatu ja asendatakse ülejäänud kahte võrrandisse. Selle tulemusena tekib võrrandisüsteem, mis koosneb kahest kahe tundmatuga võrrandist. Selliseid võrrandisüsteeme aga me juba oskame lahendada.

Näide. Lahendame võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} 2x + y - z = 9 \\ x + y + z = 9 \\ x - 2y + 3z = 4. \end{cases}$$

Avaldame teisest võrrandist x ja asendame ta esimesse ja kolmandasse võrrandisse.

$$x = 9 - y - z \quad (1)$$

$$\begin{cases} 2(9 - y - z) + y - z = 9 \\ 9 - y - z - 2y + 3z = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 18 - 2y - 2z + y - z = 9 \\ 9 - y - z - 2y + 3z = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y + 3z = 9 \\ -3y + 2z = -5 \end{cases}$$

Viimase võrrandisüsteemi lahendame liitmisvõttega ja saame et $y = 3$ ja $z = 2$. Asendame nüüd leitud väärtused avaldisse (1) ja saame, et $x = 4$.

Vastus: Võrrandisüsteemi lahend on $x = 4$; $y = 3$ ja $z = 2$.

Lineaarvõrrandisüsteeme võib lahendada ka nii, et teisendame süsteemi võrrandeid selliselt, et saaksime rakendada liitmisvõtet. Niiviisi vabaneme järk-järgult tundmatutest, kuni jääb alles ühe tundmatuga lineaarvõrrand.

Näide. Lahendame lineaarvõrrandisüsteemi

$$\begin{cases} x + 2y - z = -3 \\ 2x - y + z = 8 \\ 3x + 3y - 2z = -3. \end{cases}$$

Teisendame võrrandeid nii, et kõikides võrrandites oleksid x-i kordajad ühesugused. Selleks korrutame esimeses võrrandis mõlemaid pooli 6-ga, teises võrrandis 3-ga ja kolmandas võrrandis 2-ga. Saame võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} 6x + 12y - 6z = -18 \\ 6x - 3y + 3z = 24 \\ 6x + 6y - 4z = 6 \end{cases}$$

Lahutame teisest ja kolmandast võrrandist esimese võrrandi. Edaspidi märgime: II − I ja III − I.

Saame eelmisega samaväärse võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} 6x + 12y - 6z = -18 \\ -15y + 9z = 42 \\ -6y + 2z = 12 \end{cases}$$

Nüüd korrutame teise võrrandi mõlemat poolt −2-ga ja kolmanda võrrandi mõlemat poolt 5-ga ja liidame kolmandale võrrandile teise võrrandi.

$$\begin{cases} 6x + 12y - 6z = -18 \\ -30y - 18z = -84 \\ -18z = -24 \end{cases}$$

Kolmandast võrrandist saame, et $z = 3$. Asendades z teise võrrandisse saame $y = -1$. Asendades leitud y ja z väärtused esimesse võrrandisse. Saame, et $x = 2$.

Kontrolli, kas arvukolmik $(2; -1; 3)$ *on võrrandisüsteemi lahendiks.*

Tähelepanelik lugeja kindlasti märkas, et eelmises näites lahendati võrrandisüsteem küllaltki ebaratsionaalselt. Järgmises näites teeme võrrandisüsteemi teisendamisel mitu tehet korraga. Selline lahendus on eelmisega võrreldes tunduvalt lihtsam ja lühem.

Näide: Lahendame võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} x+2y+3z=14 \\ 2x-y+z=3 \\ 4x+y+2z=12 \end{cases}$$

Lahutame teisest võrrandist 2-kordse esimese võrrandi ja seejärel lahutame kolmandast võrrandist 4-kordse esimese võrrandi.

$$\begin{cases} x+2y+3z=14 \\ 2x-y+z=3 \\ 4x+y+2z=12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2y+3z=14 \\ -5y-5z=-25 \\ -7y-10z=-44 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2y+3z=14 \\ -5y-5z=-25 \\ -15z=-45 \end{cases}$$

II – 2I, III – 4I; 5III – 7II

Kirjutis II – 2I tähendab, et teisest võrrandist lahutame kahekordse esimese võrrandi.

Viimasest võrrandist saame, et $z = 3$. Teise võrrandi teisendame kujule $y + z = 5$. Kuna $z = 3$, siis järelikult $y = 2$. Esimesest võrrandist leiame, et $x = 1$.

Vastus: $x = 1$; $y = 2$; $z = 3$.

490. Lahenda lineaarvõrrandisüsteem.

a) $\begin{cases} 2x+y-z=2 \\ x+y+z=3 \\ x+2y+3z=6 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x-y-z=5 \\ -x+y-z=1 \\ -x-y+z=-15 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x+2y-3z=-4 \\ 3x-2y+z=4 \\ 2x+3y-3z=1 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 4x+y-z=15 \\ 3x-y+z=6 \\ x+2y-3z=10 \end{cases}$

b) lineaarvõrrandisüsteemi lahendamine determinantide abil.

Eespool toodud võtetega saab lahendada kõiki võrrandisüsteeme, milles on kolm kolme tundmatuga lineaarvõrrandit. Selliseid võrrandisüsteeme saab lahendada ka determinantide abil. Kuidas seda teha, sellele küsimusele leidis vastuse šveitsi matemaatik Gabriel Cramer (1704 — 1752). Siinkohal sõnastame Crameri teoreemi kolmest kolme tundmatuga lineaarvõrrandist koosneva võrrandisüsteemi korral.

TEOREEM: Kolme tundmatuga lineaarvõrrandisüsteemil

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=d_1 \\ a_2x+b_2y+c_2z=d_2 \\ a_3x+b_3y+c_3z=d_3 \end{cases}$$

on ühene lahend $(x_0; y_0; z_0)$, kus

$$x_0 = \frac{\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}} \quad y_0 = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}} \quad z_0 = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}$$

parajasti siis, kui

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Tähistades murru lugejas olevad determinandid vastavalt D_x, D_y ja D_z ning murru nimetajas oleva determinandi D-ga, võime lineaarvõrrandisüsteemi lahendid üles märkida järgmiselt:

$$x_0 = \frac{D_x}{D}; \quad y_0 = \frac{D_y}{D} \text{ ja } z_0 = \frac{D_z}{D}, \text{ kusjuures } D \neq 0. \qquad (**)$$

Meenutame, et sarnaseid valemeid kasutati ka siis, kui oli vaja lahendada kahest kahe tundmatuga lineaarvõrrandist koosnevaid lineaarvõrrandisüsteeme. See oli Crameri teoreemi lihtsam erijuhtum. Sõnastame nüüd reegli, mille abil saab lineaarvõrrandisüsteeme lahendada Crameri valemite abil.

Lineaarvõrrandisüsteemi lahendis avaldub iga tundmatu murruna, mille nimetajaks on süsteemi determinant, lugeja aga saadakse nimetajast, asendades määratava tundmatu kordajad süsteemi vabaliikmetega.

Tõestame nüüd, et valemid kujul (**) kehtivad.

Olgu antud lineaarvõrrandisüsteem

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=d_1 \\ a_2x+b_2y+c_2z=d_2 \\ a_3x+b_3y+c_3z=d_3 \end{cases}$$ mille süsteemi determinant $D \neq 0$.

Korrutame esimese võrrandi mõlemad pooled c_2-ga ja teise võrrandi mõlemad pooled c_1-ga ning lahutame esimesest võrrandist teise võrrandi. Samaaegselt korrutame teise võrrandi mõlemad pooled c_3-ga ning kolmanda võrrandi mõlemad pooled c_2-ga ning teisest võrrandist lahutame kolmanda võrrandi.

Saame kaks kahe tundmatuga lineaarvõrrandit

$(a_1c_2 - c_1a_2)x + (b_1c_2 - c_1b_2)y = d_1c_2 - c_1d_2$ ja

$(a_2c_3 - c_2a_3)x + (b_2c_3 - c_2b_3)y = d_2c_3 - c_2d_3$.

Avaldame nendest võrranditest tundmatu x. Selleks korrutame esimese võrrandi mõlemad pooled avaldisega $b_2c_3 - c_2b_3$ ja teise võrrandi mõlemad pooled avaldisega $b_1c_2 - c_1b_2$ ning lahutame esimesest võrrandist teise võrrandi. Saame ühe tundmatuga võrrandi x-i suhtes:

$$(a_1c_2 - c_1a_2)(b_2c_3 - c_2b_3)x - (a_2c_3 - c_2a_3)(b_1c_2 - c_1b_2)x =$$
$$= (d_1c_2 - c_1d_2)(b_2c_3 - c_2b_3) - (d_2c_3 - c_2d_3)(b_1c_2 - c_1b_2),$$

millest

$$x = \frac{d_1b_2c_3 + d_2b_3c_1 + d_3b_1c_2 - d_3b_2c_1 - d_2b_1c_3 - d_1b_3c_2}{a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1 - a_2b_1c_3 - a_1b_3c_2}.$$

Kerge on kontrollida, et murru nimetajas on kolmerealise determinandi definitsiooni kohaselt võrrandisüsteemi determinant ning murru lugejas on süsteemi determinandi esimene veerg asendatud vabaliikmete veeruga. Järelikult on murru lugejas determinant D_x. Tundmatud y ja z leiame analoogiliselt.

Näide: Lahendame võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ 2x + y - z = 2 \\ x - y - z = -1. \end{cases}$$

Arvutame determinandid D_x, D_y, D_z ja D.

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -4 \quad D_x = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -4 \quad D_y = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -4$$

$$D_z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -4$$

Kerge on veenduda, et $x = y = z = 1$.

Kui võrrandisüsteemi lahendades selgub, et $D = 0$, siis on sellel võrrandisüsteemil lahendeid lõpmata palju või lahendid puuduvad.

491. Lahenda võrrandisüsteem determinantide abil.

a) $\begin{cases} x + y + z = 42 \\ x + y - z = 18 \\ x + y + z = 20 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + y + z = 3 \\ x - 2y - 2z = 0 \\ x + 3y + 3z = -1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x + y = 2 \\ y + z = 3 \\ z + x = 4 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x + y - z = 2 \\ 2x + 3y - 4z = 1 \\ 3x - y - 2z = 4 \end{cases}$ e) $\begin{cases} x + y + 2z = 4 \\ x + y + 2z = 9 \\ x - y - z = 2 \end{cases}$ f) $\begin{cases} x + y = 3 \\ y + z = 6 \\ z + x = 6 \end{cases}$

492. Leia a sellised väärtused, mille korral võrrandisüsteemil pole üheselt määratud lahendit.

a) $\begin{cases} 3x + ay - z = 1 \\ x - 4y + z = 4 \end{cases}$ b) $\begin{cases} ax + 4y = 3 \\ ay - 4z = 9 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x - y + az = 4 \\ x + 2y - z = 3 \end{cases}$

493. Kolmnurga kahe külje summad on 15 cm, 22 cm ja 23 cm. Leia kolmnurga küljed ja arvuta pindala. Leia sobiv pindala arvutamise valem õpiku lõpus olevate valemite seast.

494. Gabrovlane varus talveks suhkrut, jahu ja konserve kokku 1510 kg. Jahu ja konserve oli 310 kg rohkem kui suhkrut ja suhkrut ning konserve kokku oli 350 kg rohkem kui jahu. Mitu kilogrammi oli gabrovlane varunud suhkrut, jahu ja konserve?

495. Volli on farmer. Tal on kokku 120 lehma, siga ja küülikut. Kui sigade arv suureneks 50% võrra ja küülikute arv väheneks 10%, siis oleks loomi kokku 138. Kui aga lehmade arvu vähendada $\frac{1}{3}$ võrra ja sigade arvu vähendada $\frac{1}{4}$ võrra, siis oleks Volli loomadel kokku 360 jalga. Mitu lehma, siga ja küülikut on Vollil?

496. Koosta lineaarvõrrandisüsteem, mille lahendiks on arvukolmik (6; 3; 8). Koosta ise selline tekstülesanne, mille lahendiks on need arvud.

4.6. JUURVÕRRANDID

Seni oleme lahendanud lineaar- ja ruutvõrrandeid ning vastavaid võrrandisüsteeme. Uurime nüüd, kuidas lahendada selliseid võrrandeid, milles tundmatu on juuritavas, s.t. juuremärgi all.

Juurvõrrandiks nimetatakse võrrandit, milles tundmatu esineb juuremärgi all.

Näide:

Võrrandid $\sqrt{x} = 4$ ja $\sqrt{x+13} - \sqrt[3]{x-5} = 7$ on juurvõrrandid, kuid võrrand $\sqrt{2}x + 3 = 7$ on lineaarvõrrand.

Lineaar- ja ruutvõrrandeid lahendades võib võrrandi mõlemale poolele liita ühe ja sama arvu. Samuti võib võrrandi mõlemat poolt korrutada ühe ja sama nullist erineva arvuga. Juurvõrrandite lahendamisel tuleb lisaks neile teisendustele kasutada veel üht võtet, nimelt võrrandi mõlemaid pooli võib *astendada ühe ja sama arvuga*.

Saadud lahendeid peame kontrollima, sest paarisarvulise astendajaga astendamisel võivad tekkida võõrlahendid.

Näide: Lahendame võrrandi $\sqrt{x+5} = x - 1$.

Tõstame võrduse mõlemad pooled ruutu, saame

$$\sqrt{x+5} = x - 1 \quad ()^2 \quad \Rightarrow$$
$$x + 5 = x^2 - 2x + 1 \quad \Leftrightarrow$$
$$x^2 - 3x - 4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = 4 \text{ ja } x_2 = -1.$$

Kontrollime, kas saadud lahendid rahuldavad esialgset võrrandit. Selleks arvutame eraldi võrduse vasaku poole (vp) ja parema poole (pp) väärtuse ning võrdleme saadud tulemusi.

Kui $x = 4$, siis vp $= \sqrt{4+5} = 3$ ja pp $= 4 - 1 = 3$.

Järelikult $x = 4$ on võrrandi lahend.

Kui $x = -1$, siis vp $= \sqrt{-1+5} = 2$ ja pp $= -1 - 1 = -2$.

Võrduse vasak ja parem pool pole võrdsed, järelikult $x = -1$ ei ole võrrandi lahend.

Vastus: $x = 4$.

Näide: Lahendame võrrandi $\sqrt{x} - 1 = \sqrt{x+1}$.

$\sqrt{x} - 1 = \sqrt{x+1} \quad ()^2 \quad \Rightarrow$

$x - 2\sqrt{x} + 1 = x + 1 \quad \Leftrightarrow$

$-2\sqrt{x} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0$.

Kontrollimisel selgub, et $x = 0$ ei ole võrrandi lahend. Kuna võrrandil polnud muid lahendeid peale võõrlahendi, siis järelikult võrrandil puuduvad lahendid.

Vastus: Lahendid puuduvad.

Näide: Lahendame võrrandi $\sqrt{2x-1} + \sqrt{x-1} = 1$.

Tõstame võrrandi mõlemad pooled ruutu, saame

$2x - 1 + 2\sqrt{(2x-1)(x-1)} + x - 1 = 1$ ehk

$2\sqrt{(2x-1)(x-1)} = 3 - 3x$.

Tõstame veel kord võrrandi mõlemad pooled ruutu, saame

$4(2x-1)(x-1) = 9 - 18x + 9x^2$ ehk

$x^2 - 6x + 5 = 0$.

Viimase võrrandi lahendid on 5 ja 1. Kontrollimisel selgub, et $x = 5$ on võõrlahend (missuguse teisenduse tulemusena ta tekkis?) ja võrrandi ainus lahend on $x = 1$. Püüa nüüd ise sama võrrand lahendada teisel viisil. Selleks vii $\sqrt{x-1}$ kõigepealt võrduse paremale poolele. Kumb lahendusviis on lihtsam?

Mõnikord võib juurvõrrandit lahendades vabaneda juurtest ka võrrandi mõlemat poolt astendamata.

Näide: Lahendame võrrandi $\sqrt{x^2+5x+3} - \sqrt{x^2+3x+2} = 2x+1$.

Korrutame võrrandi mõlemaid pooli avaldisega $\sqrt{x^2+5x+3} + \sqrt{x^2+3x+2}$.

Kasutades valemit $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$ saame

$2x + 1 = (2x+1)(\sqrt{x^2+5x+3} + \sqrt{x^2+3x+2})$.

Kui $2x + 1 = 0$, siis $x = -0{,}5$. Kontrolli, kas see lahend sobib.

Nüüd tuleb veel lahendada võrrand

$\sqrt{x^2+5x+3} + \sqrt{x^2+3x+2} = 1 \quad \Leftrightarrow$

$\sqrt{x^2+5x+3} = 1 - \sqrt{x^2+3x+2} \quad ()^2 \quad \Rightarrow$

$x^2 + 5x + 3 = 1 - 2\sqrt{x^2+3x+2} + x^2 + 3x + 2 \quad \Leftrightarrow$

$x = -\sqrt{x^2+3x+2} \quad ()^2 \quad \Rightarrow$

$x^2 = x^2 + 3x + 2 \quad \Leftrightarrow \quad x = -\frac{2}{3}$.

Kontrollimisel selgub, et mõlemad leitud lahendid rahuldavad esialgset võrrandit.

Vastus: $x = -0{,}5$ ja $x = -\frac{2}{3}$.

Mõnikord on kasulik asendada juurvõrrandis tundmatut sisaldav avaldis mõne lihtsama, kuid eelmisega samaväärse avaldisega.

Näide: Lahendame juurvõrrandi $\sqrt{\frac{3-x}{2+x}} + 3\sqrt{\frac{2+x}{3-x}} = 4$.

Teeme asenduse: $\sqrt{\frac{3-x}{2+x}} = t$.

Esialgne võrrand esitub siis kujul $t + \frac{3}{t} = 4$.

Lahendame t suhtes ruutvõrrandi $t^2 - 4t + 3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t_1 = 1$ ja $t_2 = 3$.

Kui $t = 3$, siis $\sqrt{\frac{3-x}{2+x}} = 3 \quad \Rightarrow \quad \frac{3-x}{2+x} = 9 \quad \Leftrightarrow \quad 9(2+x) = 3 - x \quad \Leftrightarrow \quad x = -1{,}5$.

Kui $t = 1$, siis $\sqrt{\frac{3-x}{2+x}} = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{3-x}{2+x} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad 3 - x = 2 + x \quad \Leftrightarrow \quad x = 0{,}5$.

Kontrollides saadud lahendeid on lihtne veenduda, et mõlemad lahendid rahuldavad esialgset võrrandit.

Vastus: $x = -1{,}5$ või $x = 0{,}5$.

497. Kas antud võrrand on juurvõrrand? Põhjenda.

a) $\sqrt{5} + 2x = 6$ b) $\sqrt{x} - 7 = x$ c) $x^2 - \sqrt{3} = 0{,}5x$

d) $\sqrt{2} + x = \sqrt{5}$ e) $\sqrt{x^2} - x = \pi$ f) $x^{0{,}25} - 16 = 0$

498. Selgita, miks antud võrrandil lahendeid ei ole.

a) $\sqrt{x-1} + \sqrt{x+2} = 0$ b) $\sqrt{2x-1} = -7$ c) $\sqrt{5-x} + 3 = 2$

d) $\sqrt{5-x} + \sqrt{x-5} = 1$ e) $\sqrt{x-9} - \sqrt{4-x} = 2$ f) $\sqrt{x} - \sqrt{-2-x} = 3$

499. Kas järgmised võrrandipaarid on samaväärsed?

a) $\sqrt{2x+21} = x$ ja $2x + 21 = x^2$ b) $\sqrt[3]{3x-1} = 2$ ja $3x - 1 = 8$

c) $\sqrt{x+5} = x - 1$ ja $x + 5 = (x-1)^2$ d) $\sqrt[4]{x-2} = 2$ ja $x - 2 = 16$

500. Lahenda juurvõrrand. Kuue esimese võrrandi lahendite summa on 25% arvust 2^7.

a) $\sqrt{5x+1}=\sqrt{2x+10}$ b) $\sqrt{2x+3}=x$ c) $\sqrt{x+1}+x=11$

d) $\sqrt{x+16}=x-4$ e) $\sqrt{x+1}+x-5=0$ f) $\sqrt{x-2}-x+4=0$

g) $\sqrt{x+3}+\sqrt{2-x}=3$ h) $\sqrt{x+11}=\sqrt{x+4}+1$ i) $\sqrt{2x+4}-\sqrt{7-x}=3$

j) $\sqrt{x+7}-\sqrt{x-5}-2=0$

501. Lahenda võrrand ja kontrolli lahendeid.

a) $\sqrt{12-x}=x$ b) $\sqrt{7-x}=x-1$ c) $\sqrt{x+2}-\sqrt{x-6}=2$

d) $\sqrt[4]{x-1}=4$ e) $\sqrt[5]{7-x}=2$ f) $\sqrt[3]{x-1}=\sqrt[6]{8(x-1)}$

502. Lahenda juurvõrrand.

a) $\sqrt{2x-3}+\sqrt{4x+1}=4$ b) $\sqrt{2x+6}+\sqrt{x-3}=2\sqrt{x}$ c) $\sqrt{x+8}-\sqrt{3x-2}=2$

d) $21+\sqrt{2x-7}=x$ e) $1-\sqrt{1+5x}=x$ f) $\sqrt{6-4x-x^2}=x+4$

g) $\sqrt{5-x^2}=x-1$ h) $\dfrac{1+\sqrt{2x+1}}{x}=1$

503. Lahenda juurvõrrand.

a) $\sqrt{\dfrac{x-7}{x-19}}=\sqrt{x-19}$ b) $\dfrac{5}{\sqrt{5+x^2}+x}-\dfrac{5}{\sqrt{5+x^2}-x}=6$

c) $\dfrac{\sqrt{13-x^2}}{x+1}=1$ d) $\sqrt{2+\sqrt{2+x}}=2$

504. Lahenda juurvõrrand.

a) $x^2-4x+6=\sqrt{2x^2-8x+12}$ b) $\sqrt{x+\sqrt{x+11}}+\sqrt{x-\sqrt{x+11}}=4$

c) $\sqrt[3]{5x+7}-\sqrt[3]{5x-12}=1$ d) $\sqrt{x^2+32}-2\sqrt{x^2+32}=3$

505. Lahenda juurvõrrand.

a) $(x^2-1)\sqrt{2x-1}=0$ b) $(9-x^2)\sqrt{2-x}=0$

c) $\sqrt{\dfrac{2x+1}{x-1}}+\sqrt{\dfrac{x-1}{2x+1}}=1$ d) $\dfrac{x}{x+1}-2\sqrt{\dfrac{x+1}{x}}=3$

e) $\sqrt{\dfrac{5-x}{x+3}}+\sqrt{\dfrac{x+3}{5-x}}=2$ f) $\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}=3$

g) $1+\sqrt{1+\sqrt{x^2-24}}=x$ h) $-\sqrt[4]{x-13}=7\pi$

506. Lahenda juurvõrrand parameetri suhtes.

a) $\dfrac{x}{x+a}+\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{x+a}}=\dfrac{b}{a}$ b) $\sqrt[3]{a-x}+\sqrt[3]{b-x}=\sqrt[3]{a-b}$

c) $\sqrt{a^2+x\sqrt{b^2+x^2-a^2}}=x-a$ d) $\dfrac{\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}}=\sqrt{b}$

507. Lahenda juurvõrrand.

a) $\sqrt{2x^2+21x-11}-\sqrt{2x^2-9x+4}=\sqrt{18x-9}$

b) $\sqrt{3x^2+6x+7}+\sqrt{5x^2+10x+14}=4-2x-x^2$

4.6. ARVVÕRRATUSED

Igapäevases elus puutume sageli kokku olukorraga, kus peame võrdlema mingeid suurusi. Me peame võrdlema hindu, pikkusi, masse jne.

Näiteks „Mercedes" on kallim kui „Trabant", Kalle on vanem kui Jüri, Jüri kaalub rohkem kui Rein jne.

I peatükis oli juttu sellest, et reaalarvude hulk on järjestatud hulk. Mistahes kahe reaalarvu a ja b korral kehtib parajasti üks kolmest seosest:

$a<b$ (arv a on väiksem arvust b),
$a=b$ (arvud a ja b on võrdsed),
$a>b$ (arv a on suurem arvust b).

Märke $>$ ja $<$ nimetatakse **range võrratuse märkideks** ning märke $\geqslant$ ja $\leqslant$ **mitterange võrratuse märkideks**.

Kui kaks matemaatilist avaldist (sealhulgas reaalarvu) on seotud ühega märkidest $>$, $<$, $\geqslant$ või $\leqslant$, siis kõneleme võrratusest (vastavalt arvvõrratusest).

Uurime nüüd mõningaid arvvõrratustega seotud olulisemaid omadusi.

OMADUS	NÄIDE
1. Kui $a>b$, siis $b<a$.	Kuna $4>0$, siis $0<4$.
2. Kui $a>b$ ja $b>c$, siis $a>c$.	$5>1$ ja $1>-6$, seega $5>-6$.
3. Kui $a>b$, siis $a+c>b+c$.	$7>0$; $7+3>0+3$ ehk $10>3$.
4. Kui $a>b$ ja $m>0$, siis $a\cdot m>b\cdot m$.	$3>2$; $3\cdot4>2\cdot4$ ehk $12>8$.
5. Kui $a>b$ ja $m<0$, siis $a\cdot m<b\cdot m$.	$5>3$; $5\cdot(-2)<3\cdot(-2)$ ehk $-10<-6$.
6. Kui $a>b$ ja $c>d$, siis $a+c>b+d$.	$4>2$ ja $5>3$, $4+5>2+3$ ehk $9>5$.

Kasutades toodud võrratuste omadusi, võime tuletada juurde veel mõningaid arvvõrratuste puhul kehtivaid seoseid.

Tõestame, et kui $a>0$, ja $b\geqslant0$, siis $a>b \Leftrightarrow a^2>b^2$.

Tõestus: $a>b \overset{\text{om. } 3}{\Leftrightarrow} a+(-b)>b+(-b) \Leftrightarrow$

$a-b>0 \overset{\text{om. } 4}{\Leftrightarrow} (a-b)(a+b)>0 \Leftrightarrow$

$a^2-b^2>0 \Leftrightarrow a^2-b^2+b^2>b^2 \Leftrightarrow a^2>b^2$.

Rõhutame, et saadud tulemus kehtib juhul, kui $a>0$ ja $b\geqslant0$.

508. Selgita, kuidas on otstarbekas omavahel võrrelda erinimelisi murde, täisarvu ja harilikku murdu, kümnendmurdu ja harilikku murdu.

509. Võrdle ($>$, $<$, $=$).

a) 6,9556 . . . 6,499 b) 320 cm . . . 32 dm c) $\frac{12}{21}$ . . . $\frac{3}{5}$

d) 5,3 dm^3 . . . 0,053 m^3 e) 2,34 t . . . 23,4 ts f) 1 ha . . . 6

Miks viimases alaülesandes ei saa antud suurusi võrrelda?

510. Kas lause on tõene, väär või pole võimalik üheselt vastata?

a) positiivne arv on suurem mistahes negatiivsest arvust;

b) kui $a > 0$ ja $b < 0$, siis $a + b = 0$;

c) leidub nullist suuremaid negatiivseid arve;

d) kui $a \cdot b > 0$, siis $a > 0$ ja $b > 0$;

e) kui $a > b$, siis $a^2 > b^2$;

f) kui $a > b$, siis $a + b > 0$;

g) kui $a > 0$, siis $-a < 0$.

511. Järgnevate võrratuste teisendamisel on kasutatud võrratuste omadusi 1 – 5, kuid kahel korral on eksitud. Tee kindlaks, missuguseid omadusi on kasutatud, ja paranda vead.

a) $a > b \Leftrightarrow a + 2 > b + 2$ b) $a > b \Leftrightarrow 4a > 4b$ c) $a > b \Leftrightarrow -a > -b$

d) $5a - 4 > b \Leftrightarrow 5a > b + 4$ e) $a > 0 \Leftrightarrow -a < 0$ f) $a < 0 \Leftrightarrow -6a < 0$.

512. Tõesta, et $\frac{a^2}{1+a^4} \leq 0{,}5$.

513. Tõesta, et kui $a > b$, siis $a^3 > b^3$.

514. Tõesta, et kui $a < b$, siis $a < \frac{a+b}{2}$ ja $b > \frac{a+b}{2}$.

515. Tõesta, et kui $a > b$ ja $c > 0$, siis $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$.

516. Tõesta, et kui $a > b > 0$ ja $c > d > 0$, siis $a \cdot c > b \cdot d$.

517. Võrdhaarse täisnurkse kolmnurga hüpotenuus on a. Tõesta, et kolmnurga ümbermõõt $p < 2{,}5a$.

4.7. ÜHE MUUTUJAGA LINEAARVÕRRATUSED

Eelmises punktis vaatlesime arvvõrratusi ja nende omadusi. Võtame nüüd vaatluse alla võrratused, mis sisaldavad muutuvat suurust ehk **muutujat**.

$3x^2 - 4x - 5 < 0$ — ühe muutujaga ruutvõrratus;

$3x + 4y - 7 < 0$ — kahe muutujaga lineaarvõrratus.

Võrratust, mis esitub kujul $ax + b > 0$ ($<$, $\leq$, $\geq$), kus $a \neq 0$, nimetatakse ühe muutujaga lineaarvõrratuseks.

Võrratuste lahendamisel kasutame järgmisi omadusi, mis tulenevad arvvõrratuste omadustest:

1. Võrratuse mõlemale poolele võib liita või temast lahutada ühe ja sama arvu.

2. Võrratuse mõlemaid pooli võib korrutada või jagada ühe ja sama nullist erineva arvuga. Kui see arv on positiivne, siis jääb võrratuse märk samaks, kui negatiivne, siis muutub vastupidiseks.

Tihti kasutatakse ka neist omadustest tulenevaid järeldusi.

Järeldus 1.

Võrratuse liikmeid võib viia teisele poole võrratuse märki, muutes ülekantava liikme ees märgi vastupidiseks.

Veendume, et see järeldus on tuletatav esimesest omadusest.

Olgu meil võrratus

$ax + b > c$.

Liidame selle mõlemale poole arvu $-b$, saame

$ax + b + (-b) > c + (-b)$ ehk

$ax > c - b$.

Järeldus 2.

Võrratuse märk muutub võrratuse poolte vahetamisel vastupidiseks.

Võrrandeid käsitledes kasutasime mõisteid: *samaväärsed võrrandid, võrrandi lahendihulk*. Tekib küsimus: mida mõeldakse võrratuse lahendihulga all ja missugused võrratused on samaväärsed?

Võrratuse lahenditeks on muutuja need väärtused, mille korral võrratus on tõene. Võrratuse kõik lahendid kokku moodustavad võrratuse lahendihulga.

Näide: Kontrollime, kas võrratuse $3x - 5 < -3$ lahenditeks on -5; 0 ja 7.

Kui $x = -5$, saame $3 \cdot (-5) - 5 = -20$ ja võrratus $-20 < -3$ on tõene, seega $x = -5$ on võrratuse lahend.

Kui $x = 0$, saame $3 \cdot 0 - 5 = -5$. Võrratus $-5 < -3$ on tõene, $x = 0$ on võrratuse lahend.

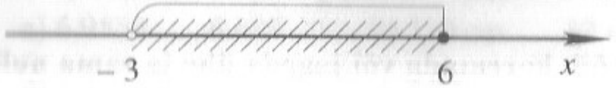
Kui $x = 7$, saame $3 \cdot 7 - 5 = 16$. Võrratus $16 < -3$ on ilmselt väär, seega $x = 7$ ei ole võrratuse lahend.

Võrratuse lahendamise eesmärgiks on leida kõik sellised muutuja väärtused, mille korral võrratus on tõene. Leitud lahendi esitamiseks on mitu võimalust:

— lahendihulga esitamine võrratusena, näiteks $L = \{x \mid x > 3\}$. Viimast kirjutist loe nii: *hulka L kuuluvad kõik kolmest suuremad arvud*;

— kasutame lõigu, vahemiku, poollõigu jne. sümboleid, näiteks $L =]-6; 23[$, $L =]-\infty; +\infty[= \mathbb{R}$, $L = [8; 22[$ jne.;

— lahendihulka võib märkida graafiliselt arvteljel, näiteks kui $L =]-3; 6]$.



Võrratuste lahendamisel kasutame selles punktis sõnastatud võrratuste omadusi ja nendest tulenevaid järeldusi. Sel juhul on esialgse võrratuse ja teisendatud võrratuse lahendihulgad võrdsed.

Samu muutujaid sisaldavaid võrratusi nimetatakse samaväärseteks, kui neil on üks ja sama lahendihulk.

Vaatleme nüüd seda, kuidas lahendada ühe muutuja lineaarvõrratusi. Olgu meil võrratus

$ax + b > 0$, kus $a \neq 0$.

Kui $a > 0$, siis $ax > -b \Leftrightarrow x > -\frac{b}{a}$.

Kui $a < 0$, siis $ax > -b \Leftrightarrow x < -\frac{b}{a}$.

Kui $a = 0$, siis on kaks võimalust:

a) kui $b > 0$, siis lahendihulk on reaalarvude hulk $\mathbb{R}$,

b) kui $b \leq 0$, siis lahendihulk on tühi hulk.

Vaatleme nüüd konkreetseid näiteid ühe muutujaga lineaarvõrratuse lahendamisel.

Näide 1: Lahendame võrratuse $2(x - 7) \geq 5x + 4$.

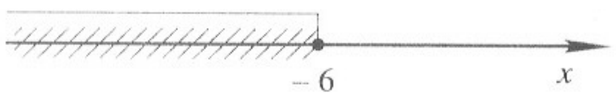
$2(x - 7) \geq 5x + 4 \Leftrightarrow$

$2x - 14 \geq 5x + 4 \Leftrightarrow$

$2x - 5x \geq 4 + 14 \Leftrightarrow$

$-3x \geq 18 \mid : (-3) \Leftrightarrow$

$x \leq -6$, joonisel:



Lahendihulga võime märkida kujul $L = \{x \mid x \leq -6\}$ või $L =]-\infty; -6]$

Näide 2: Lahendame võrratuse $2(x + \sqrt{5}) < \sqrt{5}(x + 2)$.

$2(x + \sqrt{5}) < \sqrt{5}(x + 2) \Leftrightarrow$

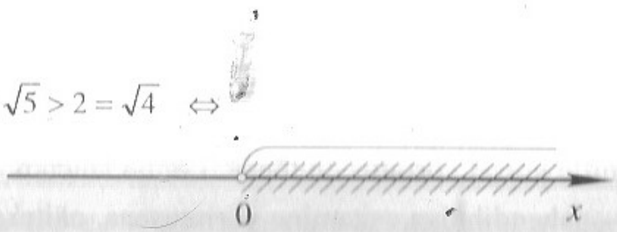
$2x + 2\sqrt{5} < \sqrt{5}x + 2\sqrt{5} \Leftrightarrow$

$2x - \sqrt{5}x < 0 \Leftrightarrow$

$x(2 - \sqrt{5}) < 0 \mid : (2 - \sqrt{5}) < 0$, sest $\sqrt{5} > 2 = \sqrt{4} \Leftrightarrow$

$x > 0$;

Lahendihulk joonisel:



Kui võrratus sisaldab murdarve, siis on otstarbekas võrratuse mõlemaid pooli korrutada sobivalt valitud arvuga. Selle tulemusena vabaneme murdudest.

Näide 3: Lahendame võrratuse $\frac{x-1}{6} - 3(1{,}5x - 1) - \frac{3 - 2x}{3} > 0$.

Korrutame võrratuse mõlemad pooled 6-ga, saame

$x - 1 - 18(1{,}5x - 1) - 2(3 - 2x) > 0 \Leftrightarrow$

$x - 1 - 27x + 18 - 6 + 4x > 0 \Leftrightarrow$

$-22x + 11 > 0 \Leftrightarrow$

$-22x > -11 \mid : (-22) \Leftrightarrow$

$x < 0{,}5$.

Võrratust lahendades võime jõuda olukorrani, kus kõik muutujad koonduvad ja saame arvvõrratuse. Viimane võib olla tõene, kuid võib osutuda ka vääraks. Mis on lahendihulgaks sellistel juhtudel?

Näide 4: Lahendame võrratuse $\frac{2}{3}(2x - 1) \geq \frac{4x - 3}{3} - \frac{1}{2}$.

Korrutame võrratuse mõlemaid pooli 6-ga, saame võrratuse

$4(2x - 1) \geq 2(4x - 3) - 3 \Leftrightarrow$

$8x - 4 \geq 8x - 6 - 3 \Leftrightarrow$

$0 \geq -5 \Leftrightarrow 5 \geq 0$.

Viimane võrratus ei sisalda muutujat x, seega saime tulemuseks tõese arvvõrratuse, järelikult esialgne lineaarvõrratus on tõene mistahes reaalarvulise x korral.

Vastus: Lahendihulk $L = \mathbb{R}$.

Näide 5: Lahendame võrratuse $2(x - 1) > 3 + 2x$.

$2(x - 1) > 3 + 2x \Leftrightarrow 2x - 2 > 3 + 2x \Leftrightarrow 0 > 5$.

Nagu näha, vabanesime ka selle võrratuse korral muutujatest, kuid tulemuseks saime väära võrratuse. Järelikult esialgsel võrratusel lahendid puuduvad.

Vastus: Lahendihulk on tühi hulk. (ehk $L = \varnothing$).

Näide 6: Lahendame võrratuse $ax \geq 1 - 2x$.

$ax \geq 1 - 2x \Leftrightarrow ax + 2x \geq 1 \Leftrightarrow (a + 2)x \geq 1$.

Kui $a + 2 > 0$ ehk $a > -2$, siis $x \geq \frac{1}{a+2}$,

kui $a + 2 < 0$ ehk $a < -2$, siis $x \leq \frac{1}{a+2}$,

kui $a + 2 = 0$, ehk $a = -2$, siis $-2x \geq 1 - 2x \Leftrightarrow 0 > 1$.

Järelikult sel juhul võrratusel lahendid puuduvad.

Järgmises näites tutvume tekstülesande lahendamisega.

Näide 7: Mitu kolmekohalist naturaalarvu jaguvad 7-ga?

Ülesande tingimuste kohaselt saame järgmised võrratused:

$100 \leqslant 7 \cdot n < 1000 \mid : 7$

$14\frac{2}{7} \leqslant n < 142\frac{6}{7}$.

Vähim naturaalarv n, mis rahuldab esialgset võrratust, on 15 ja suurim 142. Otsitavaid kolmekohalisi arve on järelikult: $142 - 15 + 1 = 128$.

518. Kontrolli peast, kas $t = 5$ kuulub järgmiste võrratuste lahendihulka.

a) $7t > 7$ b) $-0{,}4t < 12$ c) $-2{,}4t > 0$

d) $3(t-2) \leqslant -1$ e) $\pi t > \pi^2$ f) $9t - 1 < t$

519. Leia peast samaväärsete võrratuste paarid. Põhjenda.

a) $4x > 8$ $x < 3$ b) $4x \geqslant 8$ $x \geqslant 2$

c) $-x > 0$ $x < 0$ d) $3x > 0$ $5x > 0$

e) $4x > -2$ $x < -1$ f) $3x > 9$ $4x \leqslant 10$

g) $-x \leqslant 0$ $x \geqslant 0$ h) $9x > 3$ $-x > -13$

i) $4x - 1 > 0$ $8x > 3$ j) $4x - 1 \leqslant 0$ $8x \leqslant 2$

520. Lahenda lineaarvõrratused ja esita lahendihulk graafiliselt.

a) $3x - 5 > 6x + 7$ b) $4x - 1 \geqslant 2(x-2)$ c) $4(x-2) \leqslant 4x - 9$

d) $5x - 1 < 3x - 9$ e) $3(x-2) > x - 1$ f) $3x - 1 \leqslant -3x + 1$

g) $6 < 3x - 9$ h) $3x - 1 < 5x$ i) $6 - 3x > 0$

521. Teisenda võrratused lineaarvõrratusteks (kui see on võimalik) ja lahenda need.

a) $x(x+3) > x^2$ b) $(4+x)(4-x) \leqslant x^2 - 9$

c) $(5+x)(7-x) \leqslant -x^2 + 2$ d) $(6-x)^2 \geqslant x^2$

e) $(9-x)x \leqslant -x^2 - 6$ f) $(4+x)(3+x) \leqslant x^2 + 5$

g) $-(x-2)^2 \geqslant x(x-4)$ h) $-(x-5) \leqslant (x-1)^2 - x^2$

522. Lahenda võrratused.

a) $\frac{x^2}{3} - \frac{x}{2} > \frac{(x-1)^2}{3} + 1$ b) $\frac{1}{2}(x-1) - \frac{x-2}{6} < \frac{3x-1}{3}$

c) $\frac{3}{4}(x+1) - \frac{5x-1}{12} > \frac{2x-1}{3}$ d) $-\frac{1}{2}(x+1) < -\frac{1}{2}(3x+2)$

e) $2x - \sqrt{3}x < 1$ f) $x + 1 < \sqrt{2}x$

g) $\sqrt{2}x - \sqrt{3}x > \sqrt{6}$ h) $3x - 2\sqrt{2}x \geqslant 1$

523. Lahenda võrratus x-i suhtes

a) $ax > 1 + 2x$ b) $a^2x > 10 - x$ c) $1{,}5x + 1 < kx + 6$.

524. Leia neli järjestikust paaritut naturaalarvu, mille korral kolme väiksema summa on väiksem, kui kahekordne neljas arv.

525. Olev võttis mingi naturaalarvu ja liitis sellele vahetult järgnéva naturaalarvu ruudu. Saadud tulemusest lahutas ta neljakordse poole esialgse arvu ruudu. Missugune võib olla Olevi nõeldud naturaalarv, et lõpptulemus oleks 12-st väiksem?

4.8. ÜHE MUUTUJAGA RUUTVÕRRATUSED

Võrratust, mis esitub kujul $ax^2 + bx + c > 0$, kus $a \neq 0$, nimetatakse ühe muutujaga ruutvõrratuseks.

Märgi $>$ asemel võib võrratuses olla ka üks märkidest: $<$, $\leqslant$ või $\geqslant$.

Võrratuse $ax^2 + bx + c > 0$ lahendamine tähendab seda, et leiame kõik muutuja x sellised väärtused, mis rahuldavad esialgset võrratust. Vaatleme mõningaid lihtsamaid näiteid.

Näide: Lahendame võrratused a) $x^2 > 0$, b) $x^2 + 2x + 11 < 0$, c) $2x^2 \geqslant 0$.

a) Võrratust $x^2 > 0$ rahuldab iga reaalarv, välja arvatud 0 (iga nullist erineva arvu ruut on positiivne arv ja $0^2 = 0$). Lahendihulgaks saame seega $L = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

b) Võrratuse vasakut poolt võime teisendada järgmiselt:
$x^2 + 2x + 11 = x^2 + 2x + 1 + 10$ ehk $x^2 + 2x + 11 = (x+1)^2 + 10$. Järelikult on võrratuse vasaku poole väärtus iga x korral positiivne ning esialgsel võrratusel lahendid puuduvad, seega $L = \varnothing$.

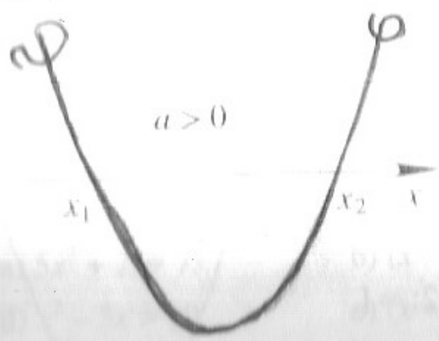
c) Kui $2x^2 \geqslant 0$, siis $x^2 \geqslant 0$. Viimast võrratust rahuldab iga reaalarv, seega on lahendihulgaks reaalarvude hulk $\mathbb{R}$: $L = \mathbb{R}$.

Põhikooli kursusest teame, et ruutfunktsiooni $y = ax^2 + bx + c$ graafik on parabool. Kui $a > 0$, siis avaneb parabool ülespoole. Kui $a < 0$, siis avaneb parabool allapoole. Kasutades neid teadmisi, võime edaspidi mistahes ruutvõrratuse lahendada skeemi järgi:

1. Lahendame võrrandi $ax^2 + bx + c = 0$.
2. Skitseerime parabooli $y = ax^2 + bx + c$.
3. Leiame jooniselt võrratuse lahendihulga.

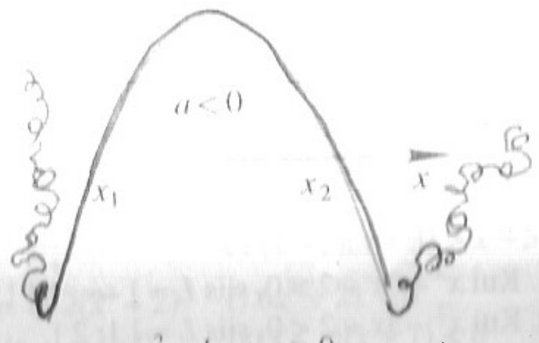
Kui lahendame ruutvõrrandi $ax^2 + bx + c = 0$, siis on kolm erinevat võimalust:

A) Diskriminant $D = b^2 - 4ac > 0$. Parabool lõikab sel juhul x-telge kahes erinevas punktis.



$ax^2 + bx + c > 0$

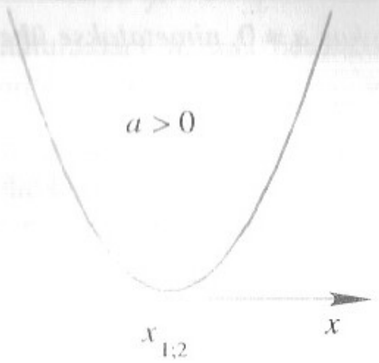
$L =]-\infty; x_1[\cup]x_2; \infty[$



$ax^2 + bx + c > 0$

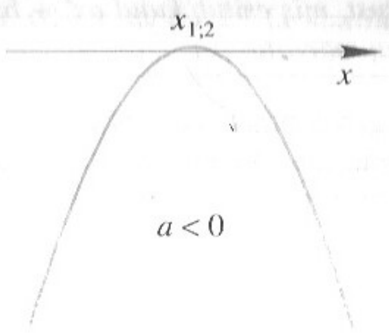
$L =]x_1; x_2[$

B) Kui diskriminant $D = 0$, siis on ruutvõrrandil kaks võrdset reaalarvulist lahendit ning parabool puudutab x-telge punktis $x_1 = x_2$.



$ax^2 + bx + c > 0$

$L = \mathbb{R} \setminus \{x_{1;2}\}$



$ax^2 + bx + c > 0$

Lahendid puuduvad $L = \varnothing$.

C) Kui diskriminant $D < 0$, siis võrrandil puuduvad reaalarvulised lahendid. Parabool ei lõika ega puuduta x-telge.

$ax^2 + bx + c > 0$

Lahendiks sobib iga reaalarv $L = \mathbb{R}$

$ax^2 + bx + c > 0$

Lahendid puuduvad $L = \varnothing$.

Näide: Lahenda võrratus $x^2 - 3x + 2 > 0$ (< 0, $\geqslant 0$, $\leqslant 0$).

Lahendame võrrandi $x^2 - 3x + 2 = 0$ ja saame, et $x_1 = 1$ ja $x_2 = 2$. Parabool $y = x^2 - 3x + 2$ avaneb ülespoole ja lõikab x-telge punktides, kus $x = 1$ ja $x = 2$. Jooniselt loeme kõikide võrratuste lahendihulgad.

1. Kui $x^2 - 3x + 2 > 0$, siis $L =]-\infty; 1[\cup]2; \infty[$.
2. Kui $x^2 - 3x + 2 < 0$, siis $L =]1; 2[$.
3. Kui $x^2 - 3x + 2 \geqslant 0$, siis $L =]-\infty; 1] \cup [2; \infty[$.
4. Kui $x^2 - 3x + 2 \leqslant 0$, siis $L = [1; 2]$.

Näide: Lahenda võrratus $-\frac{1}{2}x^2 + 6x - 18 < 0$.

Korrutades võrratuse mõlemat poolt -2-ga, saame võrratuse $x^2 - 12x + 36 > 0$. Võrrandi $x^2 - 12x + 36 = 0$ lahendid on $x_1 = x_2 = 6$. Teeme joonise ja leiame lahendihulga

$L =]-\infty; 6[\cup]6; \infty[$ ehk $L = \mathbb{R} \setminus \{6\}$.

Antud juhul teisendasime esialgset võrratust. Joonise tegime uue, mitte esialgse võrratuse järgi.

Näide: Lahenda võrratus $5x^2 + 20x + 26 < 0$.

Lahendame võrrandi $5x^2 + 20x + 26 = 0$. Ruutvõrrandi diskriminant $D = -120 < 0$. Parabool avaneb ülespoole ja x-telge ei puuduta ega lõika. Seega esialgsel võrratusel lahendid puuduvad.

526. Lahenda ruutvõrrandid (võimaluse korral peast).

a) $x^2 - 2x - 3 = 0$ b) $x^2 - 5x + 6 = 0$ c) $4x^2 - 5x + 7 = 0$
d) $x^2 - 2x - 15 = 0$ e) $5x^2 + 3x = 0$ f) $7x^2 = 0$
g) $-8x^2 + 3x = 0$ h) $9x^2 + 7x - 4 = 0$ i) $-2x^2 - 7x - 4 = 0$

527. Miks ruutvõrratuse $ax^2 + bx + c > 0$ korral esitatakse tingimus, et $a \neq 0$?

528. Lahenda järgmised võrratused peast:

a) $x^2 > 0$; b) $x^2 \geqslant 0$; c) $x^2 < 0$; d) $x^2 \leqslant 0$; e) $-x^2 > 0$; f) $-x^2 \leqslant 9$

529. Lahenda ruutvõrratused.

a) $x^2 - 2x - 3 > 0$ b) $-x^2 < 0$ c) $-x^2 - 4 < 0$
d) $x(x - 1) \geqslant -2$ e) $4x^2 - 6x + 110 < 0$ f) $9x^2 + 5 \leqslant 0$
g) $9x^2 - 3x - 7 > 0$ h) $(x - 1)^2 \geqslant 0$ i) $x^2 - 3x + 3 < 0$
j) $x^2 - 6x > x$ k) $-x^2 - 2x - 3 < 0$ l) $0{,}4x^2 - 5{,}8x \leqslant 0$

Õigesti lahendades leiad neli ruutvõrratust, mille lahendihulk on tühi hulk.

530. Leia võrratused, mille lahendihulk on tühi hulk. Missugused on teiste võrratuste lahendihulgad?

a) $16x^2 - 8x + 1 \leqslant 0$ b) $x^2 + 4x + 12 < 0$ c) $-9x^2 + 24x - 16 \geqslant 0$
d) $5x^2 - 2x + 1 < 0$ e) $-x^2 - x - 1 > 0$ f) $4x^2 - 28x + 49 \leqslant 0$

531. Lahenda ruutvõrratus.

a) $5x^2 + 2 \geqslant 7x$ b) $(x - 1)^2 < \frac{1}{4}$ c) $(x - 2)(x + 3) > x - 5$
d) $x^2 - 3x > 10$ e) $(x + 5)x \geqslant 2(x^2 + 2)$ f) $6x^2 + 2x < 0$
g) $x(x + 1) \leqslant x$ h) $(x - 6)(6 - x) \geqslant 0$ i) $(3 - x)(x + 7) < 0$
j) $4x - 4 - x^2 < 0$ k) $3x^2 + 4 < 0$ l) $50x^2 - 2 > 0$

532. Leia igale võrratusele sobiv lahendihulk.

1) $(x+2)(x-1)>0$

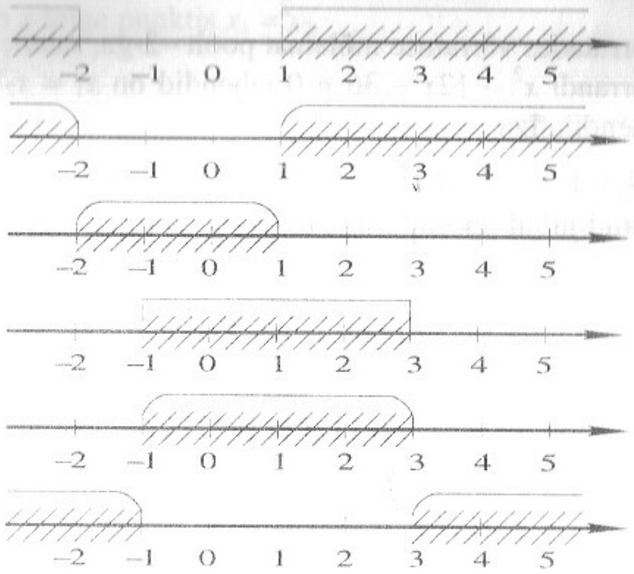
2) $(x-3)(x+1)\leq 0$

3) $(x+2)(x-1)\geq 0$

4) $(x-3)(x+1)>0$

5) $(x+2)(x-1)<0$

6) $(x-3)(x+1)<0$



533. Lahenda võrratus.

a) $x^4 \geq 10x^2 - 9$ b) $x^4 - 1 < 0$ c) $x^4 - 2x^2 - 3 > 0$ d) $x^4 + 2x^2 + 4 < 0$

534. Missugustel x väärtustel puudub avaldisel mõte?

a) $\sqrt{2x+3-x^2}$ b) $\sqrt{1-x^2}$ c) $(\sqrt{x^2-4})^{-1}$

Vaatleme ka parameetrilisi ruutvõrratusi.

Näide: Lahenda võrratus $x^2 - (a+2)x + 2a < 0$ $(a \in \mathbb{R})$.

Lahendame võrrandi $x^2 - (a+2)x + 2a = 0$ ja saame, et

$$x_{1,2} = \frac{a+2 \pm \sqrt{(a+2)^2 - 8a}}{2} = \frac{a+2 \pm |a-2|}{2}.$$

Kui $a > 2$, siis $x_1 = 2$ ja $x_2 = a$, järelikult $L =]\,2;\,a\,[$,
kui $a = 2$, siis $x_1 = x_2 = 2$ ning $L = \varnothing$,
kui $a < 2$, siis $x_1 = a$ ja $x_2 = 2$, järelikult $L =]\,a;\,2\,[$.

Näide: Raudtatt, mille pikkus on 20 cm, painutatakse ristkülikukujuliseks. Kui pikad võivad olla ristküliku küljed, et selle pindala oleks vähemalt 9 cm^2?

Olgu ristküliku üks külg x (cm), siis teine külg on $10 - x$ (cm). Ristküliku pindala

$$S = x \cdot (10 - x) = 10x - x^2.$$

Lahendame võrratuse

$$10x - x^2 \geq 9 \Leftrightarrow x^2 - 10x + 9 \leq 0.$$

Võrratuse lahendihulk on $L = [\,1;\,9\,]$,
seega ristküliku külg $x \in [\,1;\,9\,]$ ja teine külg on $10 - x$ (cm).

535. Lahenda võrratused x suhtes.

a) $ax^2 - 1 < 0$ b) $(x+a)(x-1) \geq 0$ $(a \in \mathbb{R})$.

536. Missugustel a väärtustel on võrrandil $ax^2 - 3ax - 1 = 0$ reaalarvulised lahendid?

537. Missuguste k väärtuste korral on võrratuse $(k+1)x^2 - 2x + k + 1 > 0$ lahendihulk a) $\mathbb{R}$, b) tühi hulk?

538. Ristkülikukujulise maatüki ümbermõõt on 32 m. Näita, et selle maatüki pindala pole suurem kui 64 m^2.

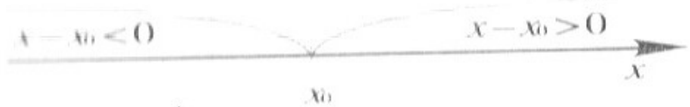
539. Leia $a;\ b \in \mathbb{R}$ väärtused, mille korral võrratuse $a(x+b)(x+a+b) > 0$ lahendihulk on $L =]\,2;\,3\,[$.

540. Pall visatakse vertikaalselt üles algkiirusega 20 $\frac{\text{m}}{\text{s}}$. Missuguse ajavahemiku jooksul on pall maapinnast vähemalt 15 m kõrgusel? ($g \approx 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$)

4.9. INTERVALLIDE MEETOD. MURDVÕRRATUSED

4.9.1. INTERVALLIDE MEETOD

Joonestame x-telje ja märgime sellel mingi punkti x_0. Punkt x_0 jaotab x-telje kaheks osaks (vt. joonist).



Iga x_0-st paremal pool asuva x korral on kaksliige $x - x_0 > 0$ ja iga x_0-st vasakul pool asuva x korral on kaksliige $x - x_0 < 0$.

See kaheslikme omadus ongi nn. *intervallide meetodi* aluseks. Olgu vaja lahendada võrratus

$$(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) > 0 \qquad (1)$$

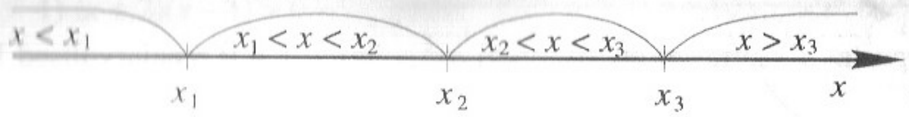
või võrratus

$$(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) < 0, \qquad (2)$$

kus arvud x_1, x_2 ja x_3 on erinevad ja nad on esitatud kasvavas järjekorras:

$$x_1 < x_2 < x_3.$$

Kanname punktid x_1, x_2 ja x_3 arvteljele. Näeme, et need punktid jaotavad arvtelje neljaks osaks.



Vaatleme avaldist

$A(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$.

Eespool esitatud kaksliikme omaduse tõttu iga $x > x_3$ korral avaldis $A(x) > 0$, sest kõik tegurid on korrutises positiivsed. Kui $x \in]\, x_2; x_3\, [$, siis $A(x) < 0$, sest korrutises kaks esimest tegurit on positiivsed ja viimane tegur on negatiivne. Lihtne on nüüd veenduda, et kui $x \in]\, x_1; x_2\, [$, siis $A(x) > 0$ ja kui $x < x_1$, siis $A(x) < 0$.

Võrratuse (1) lahendihulk on seega

$L =]\, x_1; x_2\, [\cup]\, x_3; \infty\, [$

ja võrratuse (2) lahendihulk on

$L =]\, -\infty; x_1\, [\cup]\, x_2; x_3 [$.

Analoogiliselt eespooltooduga võib lahendada ka võrratused

$(x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_n) > 0$ ja $(x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_n) < 0$.

Märkus: Range võrratuse asemel võib olla ka mitterange võrratus.

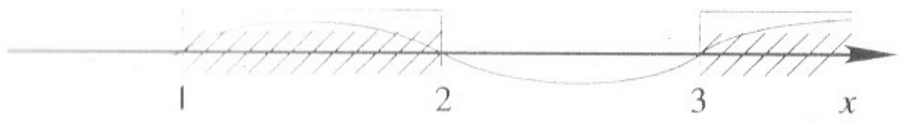
Näide: Lahendame võrratuse $(x - 1)(x - 2)(x - 3) \geq 0$.

Märgime x-teljel punktid 1, 2 ja 3 ning arvutame, missuguse märgiga on võrratuse vasaku poole väärtus, kui $x > 3$, näiteks $x = 10$ korral. Saame, et

$(10 - 1)(10 - 2)(10 - 3) > 0$,

sest kõik tegurid on positiivsed.

Teeme joonise



Ja loeme sellelt otsitava lahendihulga

$L =]\, 1; 2\,] \cup]\, 3; \infty\, [$.

Kontrolli, kas $x = 1{,}5$; $x = 4$ ja $x = 9$ on võrratuse lahenditeks.

Näide: Lahenda võrratus $(2 - x)(x^2 - 4x + 3)(x + 1) > 0$.

Lahutame ruutkolmliikme $x^2 - 4x + 3$ teguriteks

$x^2 - 4x + 3 = (x - 1)(x - 3)$.

Esialgse võrratuse võime nüüd esitada kujul

$(2 - x)(x - 1)(x - 3)(x + 1) > 0$.

Leiame x väärtused, mille korral sulgudes olevad kaksliikmed on võrdsed nulliga, ja kanname nad kasvavas järjekorras arvteljele.

Joonise tegemiseks arvutasime võrratuse vasaku poole väärtuse, kui $x = 10$ ja saime, et esimene tegur on negatiivne, ülejäänud positiivsed. Sellepärast alustasimegi joone tõmbamist altpoolt x-telge. Võrratuse lahendihulk on

$L =]\, -1; 1\, [\cup]\, 2; 3\, [$.

Näide: Lahendada võrratus $(x - 2)^2 (x - 3)^1 (x - 4)^2 > 0$.

Leiame jällegi sellised x väärtused, mille korral sulgudes olevad avaldised on võrdsed nulliga:

$(x - 2)^2 = 0 \Leftrightarrow x_1 = x_2 = 2$,
$(x - 3)^1 = 0 \Leftrightarrow x_1 = x_2 = x_3 = 3$ ja
$(x - 4)^4 = 0 \Leftrightarrow x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 4$.

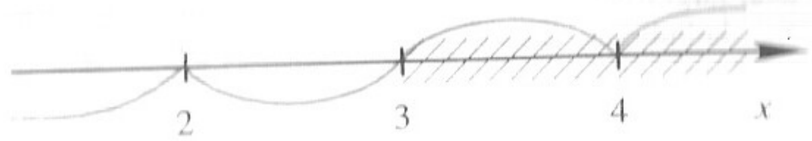
Hindame võrratuse vasaku poole märki, kui $x > 4$. Sellisel juhul on kõik tegurid positiivsed ja korrutis seega positiivne. Joon asub ülevalpool x-telge (vt. joonist).

Kui $x \in]\, 3; 4\, [$, siis $(x - 2)^2 (x - 3)^1 (x - 4)^4 > 0$ ja vahemikus $]\, 3; 4\, [$ asub joon x-teljest ülevalpool.

Kui $x \in]\, 2; 3\, [$, siis $(x - 2)^2 (x - 3)^1 (x - 4)^4 < 0$, sest teine tegur on negatiivse väärtusega, esimene ja kolmas tegur on aga positiivse väärtusega. Vahemikus $]\, 2; 3\, [$ asub joon x-teljest allpool.

Kui $x < 2$, siis $(x - 2)^2 (x - 3)^3 (x - 4)^4 < 0$ samal põhjusel nagu eelmises vahemikus.

Teeme joonise

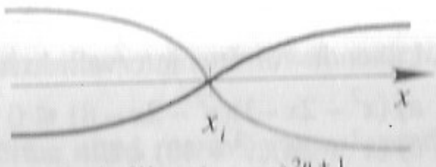


Võrratuse lahendihulga loeme jooniselt

$L =]\, 3; 4\, [\cup]\, 4; \infty\, [$ ehk $L =]\, 3; \infty\, [\setminus \{4\}$.

Nagu näeme eelmiselt jooniselt, pöördub joon punktides $x = 2$ ja $x = 4$ x-telge lähimata tagasi. Üldiselt võib öelda, et kui võrratus sisaldab kaksliiget paarisarvulises astmes, siis nendes punktides pöördub joon tagasi (vt. alljärgnevat joonist).

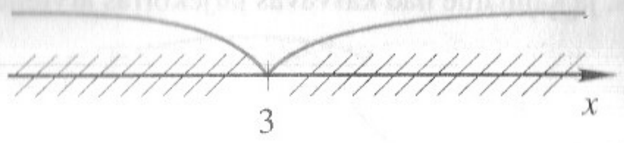
kaksliige $(x - x_1)^{2n}$



kaksliige $(x - x_1)^{2n+1}$

Näide: Lahenda võrratused a) $(x-3)^2 > 0$, b) $(x-1)^3(x-2)^4 < 0$.

a) $(x-3)^2 > 0$
Lahendihulk $L = \mathbb{R} \setminus \{3\}$.



b) $(x-1)^3(x-2)^4 < 0$
Lahendihulk $L =]-\infty; 1[$.

Lõpetuseks lahendame ühe mitterange võrratuse.

Näide: Lahendame võrratuse $(x+1)^2x(x-2)^{100} \geq 0$.

Võrratuse vasak pool on võrdne nulliga, kui $x = -1$, $x = 0$ või $x = 2$. Kanname leitud x väärtused arvteljele ning teeme joonise (lahendite kordsust arvestades).

Võrratuse lahendihulk on $L = \{-1\} \cup [0; \infty[$.

541. Selgita, kuidas lahendatakse võrratusi intervallide meetodiga.

542. Lahenda intervallide meetodiga ruutvõrratused.

a) $(x-3)(x+3) < 0$ b) $-x(x-1) < 0$ c) $(2-x)(x-3) \geq 0$
d) $(x-1)(x-\pi) \geq 0$ e) $-(3-x)(x-2) > 0$ f) $(1-x)(x-1) < 0$

543. Järgmistes võrratustes ei saa ruutkolmliiget teguriteks lahutada. Hinda ruutkolmliikme väärtust ja lahenda võrratused intervallide meetodiga.

a) $(x-1)(x^2-x+1) > 0$
b) $(1-x+8x^2)(3-x) < 0$
c) $(x-\pi)(x^2+x+\pi^2) < 0$.

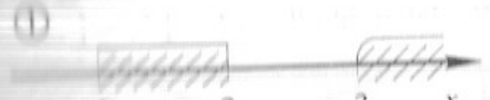
544. Lahenda võrratus intervallide meetodiga.

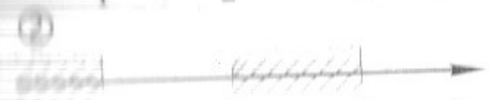
a) $(x^2-1)(x+3) > 0$ b) $(3-x)(2-x)(1-x) \leq 0$ c) $(x^2+2)(x-2) \geq 0$
d) $(5-x)(5+x) < 0$ e) $(5-x)^3(5+x)^4 \geq 0$ f) $x(x^2-2x+1) < 0$
g) $(x^2-2x+9)x \leq 0$ h) $(x-1)^2(x-3) < 0$ i) $(x-2)^2(x-3)^4 \leq 0$
j) $(x-2)^{16}x^3 \geq 0$ k) $(2{,}3x-9{,}4)^{13}x < 0$ l) $(7-3x)^9(3-5x)^3 < 0$
m) $x(x^2-x) \geq 0$ n) $x^3(x^3-x^2) > 0$ o) $(1-x^2)(1-x^4) \leq 0$

545. Lahenda võrratus intervallide meetodiga.

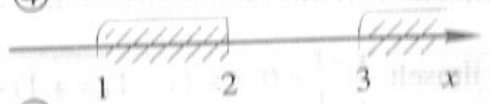
a) $(x^2-2x-3)(x^2-2x-8) \leq 0$ b) $(x^2-2x+7)(x^2+3x+21) > 0$
c) $(x^2+24)(x^2+48) < 0$ d) $(x^2-3x-4)(x^2+x-2) < 0$
e) $(x^2-1)(x^2-1)^2(x^2-1)^3 < 0$ f) $(x^2+1)(x^4+1)(x^2-1) \leq 0$

546. Joonistel on mingi võrratuse lahendihulk. Koosta antud lahendihulgale vastav võrratus. Mõtle, kas lahendihulga järgi saab üheselt kindlaks määrata, missuguse võrratusega on tegemist.

①


②


③

④


⑤

⑥

4.9.2. MURDVÕRRATUSED

Vaatleme nüüd, missugused võrratused on murdvõrratused ja kuidas selliseid võrratusi lahendatakse.

Võrratust, mis sisaldab muutujat murru nimetajas, nimetatakse murdvõrratuseks.

Murdvõrratused on näiteks $\frac{x-1}{x-2} > 2$; $\frac{x^2-3x-4}{x} < -2$; $\frac{3-t}{t} \leq 0$ jne.

Enne, kui asume murdvõrratuste lahendamise juurde, tuletame varemõpitust meelde mõned olulised faktid.

547. Sõnasta tingimused, mille korral
a) murru väärtus on negatiivne, null, positiivne;
b) kahe arvu korrutis on negatiivne, null, positiivne.

Võrdleme nüüd mõningaid saadud tulemusi: kui kahe arvu jagatis on negatiivne, siis need arvud on **erimärgilised**. Kui kahe arvu korrutis on negatiivne, siis tegurid on samuti **erimärgilised**. Kui kahe arvu jagatis või korrutis on positiivne, siis on mõlemad arvud **samamärgilised**. Kokku võttes saame, et

$$\frac{a}{b} < 0 \iff a \cdot b < 0 \qquad \frac{a}{b} > 0 \iff a \cdot b > 0 \qquad (*)$$

Kas ränge võrratuse märgi võib asendada mitterange võrratuse märgiga? Miks?

Kasutades viimati saadud tulemusi (*) võime nüüd murdvõrratuse asendada võrratusega, mis sisaldab korrutist.

Näide: Lahendame võrratused a) $\frac{x-1}{3}>0$; b) $\frac{x-1}{x+1}<0$; c) $\frac{-3(x-2)}{x+5}<0$.

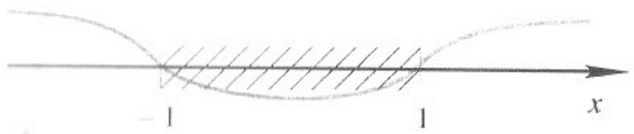
a) Seose (∗) põhjal võime kirjutada $\frac{x-1}{3}>0 \Leftrightarrow 3(x-1)>0$.

Viimane võrratus on lineaarvõrratus, mille lahendihulk on $L=]1;\infty[$.

b) ilmselt $\frac{x-1}{x+1}<0 \Leftrightarrow (x-1)(x+1)<0$.

Viimast võrratust võib lahendada nagu ruutvõrratust, kuid otstarbekam on kasutada intervallide meetodit.

$(x-1)(x+1)<0$



Võrratuse lahendihulk on seega $L=]-1;1[$.

c) Kui $\frac{-3(x-2)}{x+5}<0$, siis $-3(x-2)(x+5)<0$. Jagades viimase võrratuse mõlemad pooled −3-ga, saame võrratuse $(x-2)(x+5)>0$. Lahendame selle võrratuse intervallide meetodiga, saame

lahendihulgaks $L=]-\infty;-5[\cup]2;\infty[$.

548. Lahenda võrratus.

a) $\frac{4x-8}{3}>0$ b) $\frac{5x-13}{6}<0$ c) $\frac{1-2x}{-4}<0$ d) $\frac{2-3x}{-2}>0$

549. Lahenda võrratus.

a) $-3(x-3)>0$ b) $(2-x)(x-1)<0$ c) $-2(2-x)<0$ d) $4(x-4)<0$

Juhul kui võrratuses on märgi > või < asemel märk ≥ või ≤, siis võime küll kasutada võrratuste lahendamisel intervallide meetodit, kuid tingimuste (∗) asemel kasutame järgmisi tingimusi:

$\frac{a}{b}\geq 0 \Leftrightarrow a\cdot b\geq 0 \wedge b\neq 0$ $\frac{a}{b}\leq 0 \Leftrightarrow a\cdot b\leq 0 \wedge b\neq 0$ (∗∗)

Näide: Lahendame võrratuse $\frac{5x-10}{x+2}\geq 3$.

Toome võrratuses kõik liikmed ühele poole võrratuse märki ja lihtsustame saadud tulemust: $\frac{5x-10}{x+2}\geq 3 \Leftrightarrow \frac{5x-10}{x+2}-3\geq 0 \Leftrightarrow \frac{2x-16}{x+2}\geq 0$.

Viimase võrratuse lahendame intervallide meetodiga, arvestades tingimusi (∗∗).

$\frac{2x-16}{x+2}\geq 0 \Leftrightarrow (2x-16)(x+2)\geq 0$ ja $x+2\neq 0$.

Teeme joonise

Võrratuse lahendihulk on $L=]-\infty;-2[\cup[8;\infty[$.

Vaatleme veel mõningaid näiteid murdvõrratuste lahendamise kohta.

Näide: Lahenda võrratus $x+4\leq\frac{5}{x}$.

Lahendame selle võrratuse kahel erineval viisil. Kõigepealt lahendame võrratuse nii, nagu eelnevates näidetes. Siis uurime, kuidas lahendada seda võrratust graafiliselt.

Kui $x+4\leq\frac{5}{x}$, siis $x+4-\frac{5}{x}\leq 0 \Leftrightarrow \frac{x^2+4x-5}{x}\leq 0$, kus $x\neq 0$.

Lahutame murru lugejas oleva ruutkolmliikme teguriteks, saame võrratuse

$\frac{(x-1)(x+5)}{x}\leq 0$.

Kasutades tingimust (∗∗) esitame võrratuse kujul

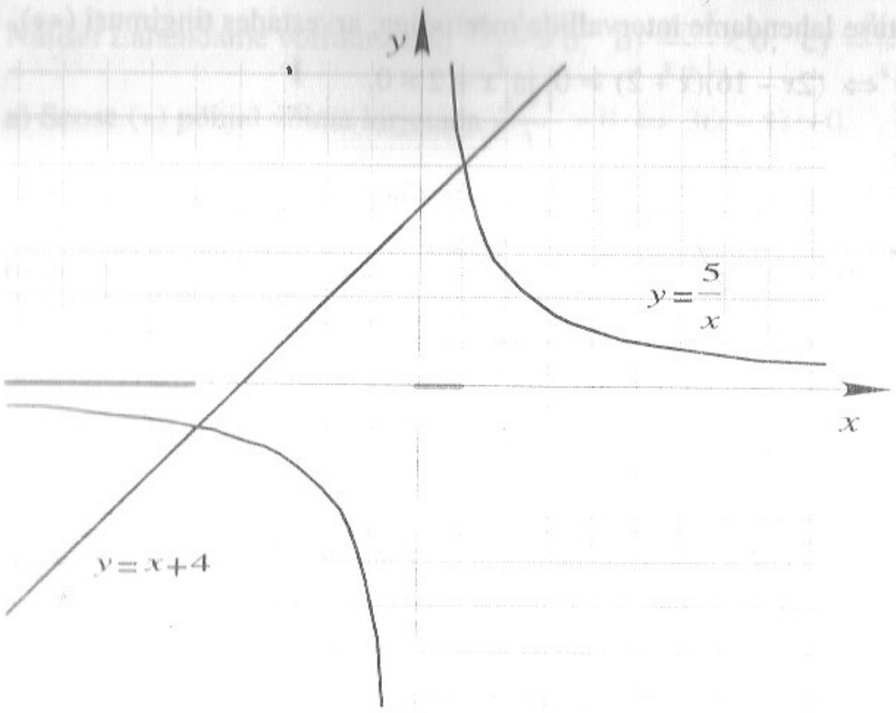
$x(x-1)(x+5)\leq 0$ ja $x\neq 0$.

Teeme joonise.

Lahendihulk on $L=]-\infty;-5]\cup]0;1]$.

Sama võrratuse võib lahendada ka graafiliselt. Selleks tuleb meil koordinaatteljestikku joonestada jooned $y=x+4$ ja $y=\frac{5}{x}$. Jooniselt leiame arvtelje need piirkonnad, mille korral sirge ei paikne hüperboolist ülevalpool. Joonise tegemiseks leiame sirgelt vähemalt kaks punkti. Hüperboolilt tuleb punkte leida rohkem, sest muidu võib joonis jääda ebatäpseks. Nii ei saa lahendihulka täpselt leida, kuid selline lahendusviis võimaldab kontrollida ja illustreerida varem leitut.

Pärast vajaliku arvu punktide leidmist saame järgmisel leheküljel toodud joonise. Lihtne on veenduda, et eespool saadud lahendihulk ja joonis on omavahel kooskõlas.



Näide: Lahendame võrratuse $\frac{x}{x+1} \leqslant \frac{1}{2-x}$.

Toome kõik liikmed võrratuse ühele poole ja lihtsustame seejärel võrratuse vasakut poolt. Tulemusena saame võrratuse

$$\frac{x}{x+1} - \frac{1}{2-x} \leqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x}{x+1} + \frac{1}{x-2} \leqslant 0 \quad \Leftrightarrow$$
$$\frac{x(x-2)+x+1}{(x+1)(x-2)} \leqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x^2-x+1}{(x+1)(x-2)} \leqslant 0.$$

Ruutkolmliiget $x^2 - x + 1$ me teguriteks lahutada ei saa, kuid arvestame, et iga reaalarvulise x korral on murru lugeja väärtus positiivne. Kasutame nüüd tingimust (∗∗) ja esitame võrratuse kujul

$$(x^2 - x + 1)(x + 1)(x - 2) \leqslant 0 \text{ ja } (x + 1)(x - 2) \neq 0.$$

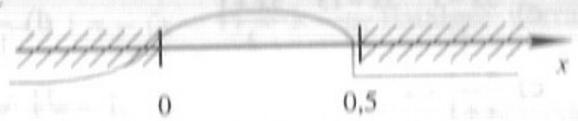
Teeme joonise

Lahendihulk $L =]-1; 2[$.

Järgmist võrratust võib lahendada tavaliste võtetega, kuid ka graafiline lahendusviis annab täpse vastuse.

Näide: Lahendame võrratuse $\frac{1}{x} \leqslant 2$.

Kui $\frac{1}{x} \leqslant 2$, siis $\frac{1}{x} - 2 \leqslant 0$ ehk $\frac{1-2x}{x} \leqslant 0$. Tingimuse (∗∗) kohaselt $(1-2x)x \leqslant 0$ ja $x \neq 0$.



Joonisel

Lahendihulk $L =]-\infty; 0[\cup [0,5; \infty[$.

888. Lahenda võrratus.

a) $\frac{3}{x-2} \geqslant 0$ b) $\frac{-4}{2-3x} \geqslant 0$ c) $\frac{10}{4-5x} \leqslant 0$ d) $\frac{-4}{-(x-4)} < 0$

e) $\frac{6x-3}{x+2} \geqslant 0$ f) $\frac{4x-2}{x+1} > 0$ g) $\frac{3x-8}{x-1} > 0$ h) $\frac{4x-5}{x-7} < 0$

i) $\frac{3x-4}{x+7} \leqslant 0$ j) $\frac{3x-5}{2x-3} \geqslant 0$ k) $\frac{2x-3}{2x-5} \leqslant 0$ l) $\frac{3-4x}{3+4x} \geqslant 0$

889. Leia järgmistest lausetest väärad laused ja paranda vead

a) kui $x \cdot y = 3$, siis x suurenedes y suureneb;

b) kui $x \cdot y = -4$, siis $\frac{x}{y} < 0$;

c) kui $\frac{1}{x} > \frac{1}{3}$, siis $x > 3$;

d) kui $\frac{2}{x} \geqslant \frac{2}{3}$, siis $x \in]0; 3]$;

e) võrratuse $\frac{x-3}{3-x} > 0$ lahendihulk on tühi hulk;

f) võrratuse $\frac{2x-4}{x-2} > 0$ lahendihulk on reaalarvude hulk $\mathbb{R}$.

890. Selgita, miks ei saa mitterangeid võrratusi lahendada tingimuse (∗) järgi. Mille poolest erinevad tingimused (∗) ja (∗∗)?

891. Lahenda võrrand.

a) $\frac{3-x}{x+2} = 5$ b) $\frac{2x-3}{3x+1} = \frac{1}{2}$ c) $\frac{2}{x-3} = \frac{3}{1-5x}$

d) $\frac{1}{x+2} = \frac{1}{x+3}$ e) $\frac{1-x}{1-x} = \frac{2+x}{2+x}$ f) $\frac{x}{x} = \frac{x}{x}$

892. Lahenda võrratus.

a) $\frac{4x-1}{x-2} \geqslant 3$ b) $\frac{5x-2}{x+6} < 3$ c) $\frac{4x-1}{x+1} > 3$ d) $\frac{3x-2}{x+2} > 6$

e) $\frac{3x+9}{x-6} < -7$ f) $\frac{6x-8}{x-2} \leqslant -3$ g) $\frac{4x-7}{x-2} \geqslant -5$ h) $\frac{3x+7}{x+2} \leqslant -5$

893. Lahenda võrratus.

a) $\frac{1}{x} \geqslant 4$ b) $\frac{1}{x} \leqslant \frac{1}{2}$ c) $\frac{x^2}{x-3} \geqslant 0$ d) $\frac{x}{(x-3)^2} \geqslant 0$

e) $\frac{x^3-x}{x^3-x^2} \geqslant 0$ f) $\frac{5x-4}{(5x-4)^3} < 0$ g) $\frac{(2x-1)^4}{x-0,5} \leqslant 0$ h) $\frac{-(-1-x)^2}{x^2-1} > 0$

556. Lahenda võrratus.

a) $\frac{2x+1}{5}-\frac{2-x}{3}>1$

b) $\frac{3x-1}{5}-\frac{x+1}{2}<1-\frac{x}{7}$

c) $\frac{5x-1}{4}-\frac{3x-13}{10}>\frac{5x+1}{3}$

d) $\frac{4}{1+x}+\frac{2}{1-x}<1$

e) $\frac{x-1}{x+1}<x$

f) $x-17\geq\frac{60}{x}$

557. Lahenda võrratus.

a) $\frac{x^2+2x-3}{x^2+1}<0$

b) $\frac{x^2+4x+4}{2x^2-x-1}>0$

c) $\frac{3}{x^2-4}<1$

d) $\frac{1-2x-3x^2}{3x-x^2-5}>0$

e) $\frac{x}{x^2-3x-4}>0$

f) $\frac{x^2-9}{3x-x^2-24}<0$

4.10. ABSOLUUTVÄÄRTUST SISALDAVAD VÕRRANDID

Reaalarvu absoluutväärtus defineeriti järgmiselt:

$$|a|\overset{def}{=}\begin{cases}a, \text{ kui } a\geq 0;\\ -a, \text{ kui } a<0.\end{cases}$$

Näide: Lahendame võrrandid a) $|x|=3$; b) $|x|=-2$; c) $|x-1|=2$.

a) Kui $x\geq 0$, siis $|x|=x$ ja saame, et $x=3$.
Kui $x<0$, siis $|x|=-x$ ja saame, et $-x=3 \Leftrightarrow x=-3$.
Võrrandi $|x|=3$ lahendid on -3 ja 3.

b) Võrrandil $|x|=-2$ lahendeid ei ole, sest absoluutväärtus ei ole kunagi negatiivne.

c) Kui $x-1\geq 0$, siis $|x-1|=x-1$. Seega $x-1=2$, ehk $x=3$.
Kui $x-1<0$, siis $|x-1|=-(x-1)=1-x$. Seega $1-x=2$, ehk $x=-1$.

Keerulisemaid absoluutväärtust sisaldavaid võrrandeid on mõistlik lahendada järgmise üldise skeemi alusel.

1. ***Leiame tundmatu need väärtused, mille korral absoluutväärtuse märkide vahel olevad avaldised võrduvad nulliga.***
2. ***Kanname saadud tundmatu väärtused arvteljele, jaotades viimase osadeks.***
3. ***Lahendame võrrandi igal tekkinud arvtelje osal eraldi, vabanedes absoluutväärtuse definitsiooni kohaselt absoluutväärtuse märkidest.***

Näide: Lahendame võrrandi $|x-1|-2x=4$.
Võrrandis olev absoluutväärtus on null siis, kui $x=1$. Kanname selle arvteljele.

Seega tuleb võrrand lahendada kahel juhul: a) kui $x<1$ ja b) $x\geq 1$.

a) Kui $x<1$, siis $x-1<0$ ja $|x-1|=-(x-1)=1-x$. Esialgse võrrandi asemel lahendame nüüd võrrandi

$1-x-2x=4 \Rightarrow -3x=3 \Rightarrow x=-1$.

Kuna saadud lahend $x=-1$ kuulub vaadeldavasse piirkonda, siis võime öelda, et piirkonnas $]-\infty;1[$ on esialgse võrrandi lahendiks $x=-1$.

b) Kui $x\geq 1$, siis $x-1\geq 0$ ja $|x-1|=x-1$. Lahendame võrrandi

$x-1-2x=4 \Rightarrow -x=5 \Rightarrow x=-5$.

Saadud lahend $x=-5$ ei kuulu piirkonda $[1;\infty[$, seega ta pole esialgse võrrandi lahend.

Vastus: Võrrandi lahend on $x=-1$.

Näide: Lahendame võrrandi $|x+1|-|x|=1-x$.

Kasutame sama lahendusmeetodit nagu eelmises näites. Absoluutväärtuse märkide vahel olevad avaldised võrdsustuvad nulliga, kui $x=-1$ või $x=0$. Teeme vastava joonise

Seega lahendame võrrandi kolmel juhul:
a) kui $x\leq -1$, b) kui $-1\leq x<0$ ja c) kui $x\geq 0$.

a) Kui $x\leq -1$, siis $|x+1|=-x-1$ ja $|x|=-x$.
Lahendame võrrandi $-x-1-(-x)=1-x \Leftrightarrow -2=-x \Leftrightarrow x=2$.
Leitud lahend ei kuulu piirkonda $]-\infty;-1[$, seega selles piirkonnas esialgsel võrrandil lahendeid pole.

b) Kui $-1\leq x<0$, siis $|x+1|=x+1$ ja $|x|=-x$.
Lahendame võrrandi $x+1-(-x)=1-x \Rightarrow 3x=0 \Rightarrow x=0$.
See lahend ei kuulu piirkonda $[-1;0[$, järelikult selles piirkonnas esialgsel võrrandil lahendeid pole.

c) Kui $x\geq 0$, siis $|x+1|=x+1$ ja $|x|=x$.
Lahendame võrrandi $x+1-x=1-x \Rightarrow x=0$.
Kuna saadud lahend kuulub piirkonda $[0;\infty[$, siis sobib ta esialgse võrrandi lahendiks.

Vastus: Võrrandi lahend on $x=0$.

Märkus: Juhul b võib poollõigu $[-1;0[$ asemel vaadelda lõiku $[-1;0]$. Juhul c leiame sel juhul lahendid vahemikus $]0;\infty[$.

Absoluutväärtust sisaldavate võrrandite lahendamisel on sageli otstarbekas kasutada järgmisi absoluutväärtuse omadusi:

$$|a| = b \Leftrightarrow (a = b \vee a = -b) \wedge b \geq 0 \qquad (*)$$
$$|a| = |b| \Leftrightarrow a = b \vee a = -b. \qquad (**)$$

Näide: Lahenda võrrand $|x+1| = |2x|$.

Antud võrrandi võime lahendada eelmises näites esitatud viisil, kuid hoopis lihtsam on kasutada omadust (**). Esialgse võrrandi võime esitada kujul

$|x+1| = |2x| \Leftrightarrow \underline{x+1 = 2x}$ või $\underline{x+1 = -2x}$.

Esimesel juhul saame võrrandi $x+1 = 2x \Rightarrow x = 1$

ja teisel juhul lahendame võrrandi $x+1 = -2x \Rightarrow x = -\frac{1}{3}$.

Veendu iseseisvalt, et mõlemad leitud lahendid sobivad.

Näide: Lahendame võrrandi $|x+2| = |1-x|$.

Me võime selle võrrandi lahendada eelmise näite eeskujul, kuid lihtsam on siiski kasutada järgmist omadust:

kui $|a| = |b|$, siis $a^2 = b^2$. (***)

Kasutades eespool toodud omadust võime võrrandi lahendada järgmiselt:

$|x+2| = |1-x| \Leftrightarrow |x+2|^2 = |1-x|^2 \Leftrightarrow x^2 + 4x + 4 = 1 - 2x + x^2$.

Viimase võrrandi lahendiks on $x = -\frac{1}{2}$ ja see on ühtlasi ka esialgse võrrandi lahend.

Vastus: Võrrandi lahend on $x = -\frac{1}{2}$.

Kui absoluutväärtuse märkide vahel on ruutkolmliige, siis võib selle teguriteks lahutada. Saadud võrrandi lahendame eelmiste näidete eeskujul. Mõnikord on siiski otstarbekam kasutada absoluutväärtuse omadusi.

Näide: Lahendame võrrandi $|3x^2 + 5x - 4| = 2x - 1$.

Teame, et kui $|a| = b$ ja $b \geq 0$, siis $a = b$ või $a = -b$. Kasutades neid teadmisi saame esialgse võrrandi asemele kaks absoluutväärtust mitte sisaldavat ruutvõrrandit:

$3x^2 + 5x - 4 = 2x - 1$ ja $3x^2 + 5x - 4 = 1 - 2x$.

Esimese võrrandi lahendid on $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ ja $\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$.

Veendu, et esimene lahend sobib, kuid teine ei sobi.

Teise võrrandi lahendid on $\frac{-7+\sqrt{109}}{6}$ ja $\frac{-7-\sqrt{109}}{6}$ ning neist sobib esialgse võrrandi lahendiks ainult esimene.

Vastus: Võrrandi lahendid on $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ ja $\frac{-7+\sqrt{109}}{6}$.

858. Sõnasta reaalarvu absoluutväärtuse definitsioon.

859. Kas on õige, et $|x-3| = |3-x|$, $|x^2+1| = x^2+1$?

860. Lahenda peast võrrand.

a) $|x| = 5$; b) $|k| = 0$; c) $|m| = -\pi$; d) $|x-1| = 3$; e) $|2-k| = 2$

861. Lahenda võrrand, kasutades omadusi (*), (**) või (***).

a) $|x-1| = |5+x|$ b) $|2x-1| = |3x-4|$ c) $|2-3t| = |3t-2|$
d) $|4+5t| = |6+5t|$ e) $|8s^2 - 9s| = -2\pi$ f) $|3t-1| = -|1-3t|$

Mitu vastuolulist võrrandit leidsid? Miks need võrrandid on vastuolulised? Kas antud võrrandite seas on ka selliseid, mille lahendiks sobib mistahes reaalarv?

862. Lahenda võrrandid ja kontrolli saadud lahendeid. Leia võrrandite kõikide positiivsete lahendite summa S_p ja kõikide negatiivsete lahendite aritmeetiline keskmine.

a) $|x+2| = 2(3-x)$ b) $|3x-2| + x = 11$ c) $|x| - |x-2| = 2$
d) $|x-1| - |x-2| = 1$ e) $|x-2| + |4-x| = 3$ f) $|3x-5| = 5-3x$

863. Leia võrrandi $|x-3| + 2|x+1| = 4$ vähim täisarvuline lahend.

864. Lahenda võrrand.

a) $|2x+1| - |3-x| = |x-4|$ b) $|x-1| + |1-2x| = 2|x|$
c) $|x| - 2|x+1| + 3|x+2| = 0$ d) $|x| + 2|x+1| - 3|x-3| = 0$
e) $|x^2-9| + |x-2| = 5$ f) $|x^2-1| + x + 1 = 0$
g) $|x^2-4| - |9-x^2| = 5$ h) $|x^2-9| + |x^2-4| = 5$

865. Lahenda võrrand.

a) $|x^2+4x+2| = \frac{5x+16}{3}$ b) $|x^2-2x-1| = \frac{5x+1}{3}$ c) $|x^2-4x+2| = \frac{5x-4}{3}$

866. Lahenda võrrand.

a) $|x| + x^2 = 0$ b) $(x+1)(|x|-1) = -0{,}5$
c) $|x^2-3x+3| = 2$ d) $|x^2-x-3| = -x-1$
e) $2|x^2+2x-5| = x-1$ f) $x^2 + 3|x| + 2 = 0$
g) $(x+1)^2 - 2|x+1| + 1 = 0$ h) $x^2 + 2x - 3|x+1| + 3 = 0$

867. Kasutades seost $\sqrt{a^2} = |a|$ lahenda juurvõrrand.

a) $\sqrt{(x-1)^2} = 4$ b) $\sqrt{(x+1)^2} = -2$ c) $\sqrt{x^2-4x+4} = 4$
d) $\sqrt{x^2-2x+1} + \sqrt{x^2+2x+1} = 3$ e) $\sqrt{x^2-4x+4} + \sqrt{x^2+2x+1} = 3$

868. Lahenda võrrand.

a) $x|2x+5| + 2x|x-3| = 22$ b) $||x^2-3x|-5| = x+1$
c) $||x+3|-|x-1|| = 2-x^2$ d) $\sqrt{5x-34} = |x-3| - 4$
e) $\sqrt{|5x-7|-27} = x-7$ f) $(1+x)|x+2| + x|x-3| = 6x+2$
g) $3\sqrt{x+1} + |x-5| = 6$ h) $\sqrt{x-2} + |x-5| = 3$

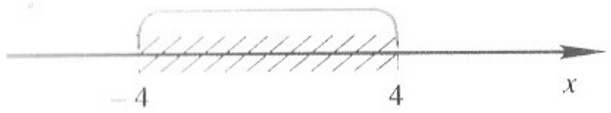
4.11. ABSOLUUTVÄÄRTUST SISALDAVAD VÕRRATUSED

Absoluutväärtust sisaldavad võrratused on näiteks $|x-3| \leq 3$, $3|x| < 0$ jne. Selliste võrratuste lahendamiseks on mitmesuguseid võtteid. Lihtsamate võrratuste korral on võimalik absoluutväärtuste märkidest vabaneda, kasutades järgmisi seoseid:

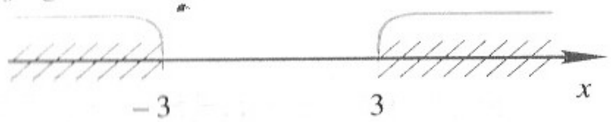
kui $a \geq 0$, siis $|x| < a \Leftrightarrow -a < x < a$ ja
$|x| > a \Leftrightarrow x < -a \vee x > a$.

Näide: Lahendame võrratused a) $|x| < 4$; b) $|t| > 3$; c) $|n-1| < -4$.

a) Kui $|x| < 4$, siis saame lahendihulgaks $-4 < x < 4$ ehk $L =]-4; 4[$. Arvteljel võib saadud lahendihulka kujutada järgmiselt:



b) Kui $|t| > 3$, siis võrratuse lahendihulk on võrratuste $t < -3$ ja $t > 3$ lahendihulkade ühend $L =]-\infty; -3[\cup]3; \infty[$. Joonisel võib lahendihulga esitada järgmiselt:



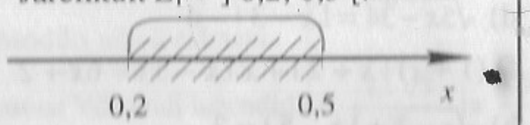
c) Võrratuse $|n-1| < -4$ lahendihulk on tühi hulk, sest absoluutväärtus ei saa olla mingist negatiivsest arvust (sealhulgas ka arvust – 4) väiksem.

Absoluutväärtust sisaldavaid võrratusi võime lahendada ka nii, nagu lahendasime eelmises punktis võrrandeid. Selleks leiame kõigepealt need muutuja väärtused, mille korral absoluutväärtuse märkide vahel olevad avaldised võrduvad nulliga. Saadud muutuja väärtused kanname nüüd arvteljele ning lahendame võrratuse igas tekkinud piirkonnas eraldi.

Näide: Lahendame võrratuse $|2x-1| < 3x$.

Avaldis $2x - 1 = 0$, kui $x = 0{,}5$. Lahendame võrratuse juhtudel a) $x < 0{,}5$ ja b) $x \geq 0{,}5$.

a) Kui $x < 0{,}5$, siis $|2x-1| = 1-2x$, lahendame võrratuse $1 - 2x < 3x$ ehk $1 < 5x \Leftrightarrow 5x > 1 \Leftrightarrow x > 0{,}2$.
Järelikult $L_1 =]0{,}2; 0{,}5[$.



b) Kui $x \geq 0{,}5$, siis $|2x-1| = 2x-1$, lahendame võrratuse $2x - 1 < 3x$ ehk $-1 < x \Leftrightarrow x > -1$.
Järelikult $L_2 = [0{,}5; \infty[$.

Ühendades mõlemad lahendihulgad L_1 ja L_2 saame võrratuse lahendihulga $L =]0{,}2; \infty[$, joonisel

Näide: Lahendame võrratuse $2x + 3 - |x+4| \geq |1-x|$.

Leiame need x-i väärtused, mille korral absoluutväärtuse märkide vahel olevad avaldised on võrdsed nulliga. Otsitavad x-i väärtused on – 4 ja 1. Teeme joonise

Lahendame võrratuse kolmes piirkonnas a) kui $x < -4$, b) kui $-4 \leq x < 1$ ja c) kui $x \geq 1$.

a) Kui $x < -4$, siis pärast absoluutväärtuse märkidest vabanemist lahendame võrratuse $2x + 3 - (-x-4) \geq 1 - x$.
Selle võrratuse lahendihulk on $L_1 = [-1{,}5; \infty[$. Saadud lahendihulgast mitte ükski lahend ei kuulu piirkonda $]-\infty; -4[$, järelikult esialgsel võrratusel pole selles piirkonnas mitte ühtegi lahendit.

b) Kui $-4 \leq x < 1$, siis pärast absoluutväärtuse märkidest vabanemist saame võrratuse $2x + 3 - (x+4) \geq 1 - x$.
Selle võrratuse lahendihulk on $L_2 = [1; \infty[$. Kuna lahendihulgast mitte ükski lahend ei kuulu piirkonda $[-4; 1[$, siis võime öelda, et ka selles piirkonnas esialgsel võrratusel lahendid puuduvad.

c) Kui $x \geq 1$, siis lahendame võrratuse $2x + 3 - (x+4) \geq -(1-x)$.
Pärast sulgude avamist ja sarnaste liikmete koondamist saame võrratuse $0 \geq 0$.
Kuna viimane võrratus on tõene iga x-i väärtuse korral piirkonnast $[1; \infty[$, siis esialgset võrratust rahuldab iga reaalarv piirkonnast $[1; \infty[$.

869. Lahenda peast.

a) $|x| > 4$ b) $|x| < 4$ c) $|t-1| \geq -3$ d) $|s+2| < -1$

870. Lahenda võrratus.

a) $|5-x| > 4$ b) $|3x-6| < 5$ c) $|4{,}3 - x| < 3{,}4$
d) $|3x+9| - 5 > 5$ e) $|x+3| - x < 5$ f) $|2x-1| \geq 2x-1$

871. Lahenda võrratus.

a) $\left|\frac{7+3x}{2+5x}\right| > 3$ b) $\left|\frac{x-5}{5-x}\right| < 1$ c) $\left|\frac{5+2x}{6-3x}\right| > 2$
d) $\left|\frac{4-x}{2+3x}\right| \geq 1$ e) $\left|\frac{4-3x}{2x-5}\right| > 2$ f) $\left|\frac{1-2x}{2x-1}\right| > 0$

572. Lahenda võrratus.

a) $|x+1|+|x+2|+|x+3|>3$ b) $|x^2-1|-|x^2-4|\geq 0$

c) $|5x^2-2x+1|<1$ d) $|6x^2-2x+1|\leq 1$

e) $|-2x^2+3x+5|>2$ f) $|x^2+x+10|\leq 3x^2+7x+2$

g) $|2x^2+x+11|>x^2-5x+6$ h) $|4x^2-9x+6|>-x^2+x-3$

573. Lahenda võrratus.

a) $\dfrac{|x-3|}{x^2-5x+6}\geq 2$ b) $\dfrac{x^2-7|x|+10}{x^2-6x+9}<0$

c) $\dfrac{x^2-|x|-12}{x-3}\geq 2$ d) $\left|\dfrac{x^2-3x-1}{x^2+x+1}\right|\leq 3$

e) $\left|\dfrac{x^2-5x+4}{x^2-4}\right|\leq 1$ f) $\left|\dfrac{x^2+4x+5}{x^2+6x+10}\right|\geq 1$

g) $|x|+|x-1|<5$ h) $|2x+1|-|5x-2|\geq 1$

i) $|x-1|+|2-x|>3+x$ j) $||x-1|+x|<3$

4.12. VÕRRATUSESÜSTEEMIDE LAHENDAMINE

Ruudukujuline karjakoppel tuli piirata igast küljest kolmekordse okastraadiga. On teada, et traati kulus üle 600 m, kuid mitte rohkem kui 900 m. Kui suur võib olla karjakopli pindala?

Olgu karjakopli külje pikkus x meetrit. Kopli ümbermõõt on siis $4x$ meetrit. Kuna koppel piiratakse kolmekordse traadiga, siis peavad *üheaegselt* kehtima võrratused

$12x>600$ ja $12x\leq 900$.

Leiame kummagi võrratuse lahendihulga. Kui $12x>600 \Leftrightarrow x>50$.

Kui $12x\leq 900 \Leftrightarrow x\geq 75$. Järelikult võib kopli ühe külje pikkus omada mistahes väärtusi poollõigust] 50; 75]. Kopli pindala on sel juhul $S>2500$, kuid samal ajal $S\leq 5625$ (m^2).

Kopli ühe külje pikkuse võime esitada kujul $50<x\leq 75$

ja pindala $2500<S\leq 5625$.

Kui meil on mitu ühte ja sama muutujat sisaldavat võrratust, mis peavad üheaegselt tõesed olema, siis on tegemist ***võrratusesüsteemiga.***

Süsteemi kuuluvad võrratused kirjutatakse tavaliselt üksteise alla ja nad ühendatakse loogelise suluga.

Näited: $\begin{cases} x^2-5x-9>0 \\ 3{,}65x\leq -12{,}3 \end{cases}$ ja $\begin{cases} \sqrt{3x-4}-x\geq 2\pi \\ (x-1)^2>(x-2)^2. \end{cases}$

Võrratusesüsteemides võib põhimõtteliselt olla kuitahes palju võrratusi. Juhul kui süsteemis on küllalt palju võrratusi, siis selliseid ülesandeid lahendatakse kaasajal tavaliselt elektronarvutite abil. Mõningate majandusülesannete lahendamisel tekivad võrratusesüsteemid, mis sisaldavad kümneid võrratusi. Selliste süsteemide käsitsi lahendamine oleks mõeldamatu. Lisaks tuleb arvestada asjaolu, et sellistes võrratusesüsteemides on muutujaid tavaliselt rohkem kui üks. See komplitseerib veelgi olukorda. Käesolevas paragrahvis piirdume siiski vaid ühe muutujaga võrratusesüsteemide lahendamisega.

Kui tuleb lahendada võrratusesüsteem, mis sisaldab n ühe muutujaga võrratust, siis kogu võrratusesüsteemi lahendihulk leitakse järgmiselt:

1. Lahendatakse ükshaaval kõik süsteemi kuuluvad võrratused.

2. Süsteemi lahendihulgaks on üksikute võrratuste lahendihulkade ühisosa.

Näide Lahendame võrratusesüsteemi $\begin{cases} x^2-5x-6\geq 0 \\ 5x-6>3. \end{cases}$

Ruutvõrratuse $x^2-5x-6\geq 0$ lahendihulga leidmiseks lahendame kõigepealt ruutvõrrandi $x^2-5x-6=0$. Võrrandi lahenditeks saame $x_1=-1$ ja $x_2=6$. Võrratuse lahendihulga leiame joooniselt.

Seega $L_1=]-\infty;-1]\cup[6;\infty[$.

Lineaarvõrratuse $5x-6>3$ lahendihulk on $L_2=]1{,}8;\infty[$. Märgime nüüd mõlema võrratuse lahendihulgad ühele joonisele ja ning leiame lahendihulkade ühisosa.

Võrratusesüsteemi lahendihulk on seega $L=L_1\cap L_2=[6;\infty[$.

Juhul kui mõne süsteemi kuuluva võrratuse lahendihulk on tühi hulk, siis on kogu võrratusesüsteemi lahendihulk tühi hulk.

Näide Lahendame võrratusesüsteemi $\begin{cases} x^2-2x+1<0 \\ 5x+6>0. \end{cases}$

Võrratus $x^2-2x+1<0$ on vastuoluline, sest avaldise $(x-1)^2$ väärtused ei saa olla negatiivsed. Järelikult on esimese võrratuse ja seega kogu võrratusesüsteemi lahendihulk tühi hulk.

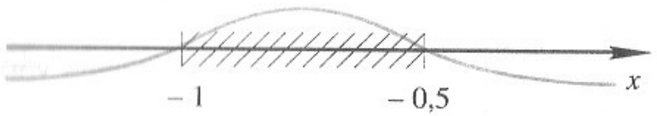
Võrratusesüsteemi võib esitada ka teisiti. Näiteks kirjutis $a<x<b$ sisaldab üheaegselt kahte tingimust: $x>a$ ja $x<b$. Võrratust kujul $a<x<b$ nimetatakse ***ahelvõrratuseks***.

Näide Lahendame ahelvõrratuse $3<\dfrac{2x-1}{2x+1}<4$.

Lahendame kõigepealt võrratuse $\dfrac{2x-1}{2x+1}>3$.

Saame, et $\frac{2x-1}{2x+1} > 3 \Leftrightarrow \frac{2x-1-6x-3}{2x+1} > 0 \Leftrightarrow \frac{-4(x+1)}{2x+1} > 0.$

Saadud võrratuse lahendame intervallide meetodiga. Teeme vastava joonise ja leiame sellelt lahendihulga.



$L_1 =]-1; -0{,}5[$.

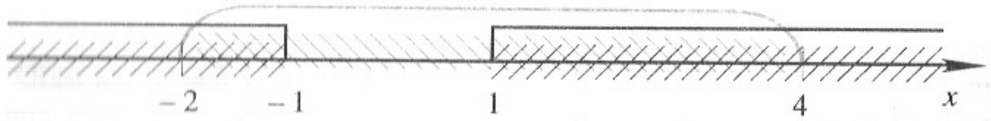
Nüüd lahendame võrratuse $\frac{2x-1}{2x+1} < 4$. Selle võrratuse lahendihulgaks saame

$L_2 = \left]-\infty; -\frac{5}{6}\right[\cup \left]-\frac{1}{2}; \infty\right[$, võrratusesüsteemi lahendihulk on $L_1 \cap L_2 = \left]-1; -\frac{5}{6}\right[$.

Toome ühe näite võrratusesüsteemide kohta, kui mõlemad süsteemis olevad võrratused sisaldavad absoluutväärtust.

Näide: Lahendame võrratusesüsteemi $\begin{cases} |x| \geq 1 \\ |x-1| < 3. \end{cases}$

Esimese võrratuse lahendihulk on ilmselt $L_1 =]-\infty; -1] \cup [1; \infty[$ ja teise võrratuse lahendihulk $L_2 =]-2; 4[$. Kanname mõlemad lahendihulgad arvteljele.



Kahekordselt viirutatud piirkond ongi võrratusesüsteemi lahendihulgaks, seega $L =]-2; -1] \cup [1; 4[$.

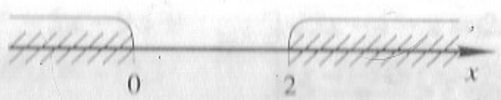
Võrratuste süsteemi lahendihulk võib olla tühi hulk ka siis, kui mitte ühegi süsteemi kuuluva võrratuse lahendihulk pole tühi hulk.

Näide: Lahendame võrratusesüsteemi $\begin{cases} x^2 - 2x > 0 & (1) \\ x - 1 > 1 & (2) \\ 2x - 3 < -3 & (3) \end{cases}$

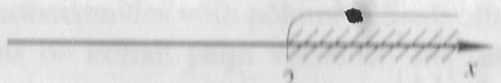
Esimese võrratuse lahendihulk on $L_1 =]-\infty; 0[\cup]2; \infty[$.

Teise võrratuse lahendihulk on $L_2 =]2; \infty[$ ja kolmanda võrratuse lahendihulk on $L_3 =]-\infty; 0[$. Teeme joonise ja veendume, et lahendihulkade L_1; L_2 ja L_3 ühisosa on tühi hulk.

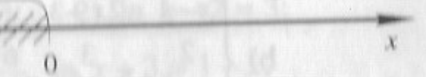
Võrratus (1)



Võrratus (2)



Võrratus (3)



Vastus: Võrratusesüsteemi lahendihulk on tühi hulk.

874. Missugune on võrratusesüsteemi lahendihulk, kui
a) vähemalt ühe võrratuse lahendihulk on tühi hulk?
b) kõikide võrratuste lahendihulk on reaalarvude hulk?

875. Mingi võrratusesüsteem sisaldab võrratusi $x^2 + 2x > 3$ ja $x^2 + 2x > 8$. Kas kogu võrratusesüsteemi lahendhulk muutub, kui antud võrratustest esimene välja jätta? Kuidas saadud tulemust põhjendada?

876. Kontrolli, kas võrratusesüsteemid on samaväärsed.

a) $\begin{cases} 5x - 2 > x \\ x^2 + 3x + 9 > 0 \end{cases}$ ja $\begin{cases} 5x - 2 > x \\ x^2 + 3x + 8 \geq 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3x - 1 > 0 \\ x(x-2) > x \end{cases}$ ja $\begin{cases} 3x - 1 > 0 \\ x - 2 > 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} |x-1| < 3 \\ 0{,}4x - 2 > 9 \end{cases}$ ja $\begin{cases} x - 1 < 3 \\ x - 1 > -3 \\ x - 5 > 22{,}5 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x^2 + 1 < 0 \\ 3x - 1 \leq -8 \end{cases}$ ja $\begin{cases} x^2 \leq 0 \\ 3x - 1 \leq -8 \end{cases}$

877. Lahenda ahelvõrratus.

a) $-12{,}3 < \frac{2}{3}x - 7 \leq 4{,}5$

b) $4{,}45 \leq x - \frac{1}{2} < 7{,}32$

c) $-3 < \frac{2x-1}{2x-3} < 4$

d) $-2 \leq \frac{6-x}{x+6} < 2$

e) $398 < x^3 - 2\pi < 138$

f) $-5 < \frac{x-2}{2-x} < 5$

878. Lahenda võrratusesüsteem.

a) $\begin{cases} \frac{x-6}{11} + \frac{x-3}{7} \leq 0 \\ 4 - \frac{1}{6}x > \frac{1}{4} \end{cases}$

b) $\begin{cases} x - \frac{3x+1}{5} - \frac{7-2x}{2} \geq 5 - \frac{x+6}{2} \\ \frac{5x-4}{2} < \frac{16x+1}{7} \end{cases}$

c) $\begin{cases} 1 - \frac{2x}{6} < \frac{5}{3} - \frac{3-x}{4} \\ \frac{9x+7}{2} - 16 - x \geq \frac{x-2}{7} \end{cases}$

d) $\begin{cases} \frac{x-7}{9} + \frac{x-4}{5} \leq 0 \\ x - \frac{5}{8}x > 0{,}75 \end{cases}$

879. Lahenda võrratusesüsteem.

a) $\begin{cases} 8(3x-2) - 7x - 5(12 - 3x) < 13x \\ 20 < \frac{2}{3}(7x - 10) - \frac{1}{2}(50 - x) \end{cases}$

b) $\begin{cases} \frac{x+3}{2} > \frac{x}{7} + 0{,}4 \\ \frac{x}{2} - 3(2x+3) < 2x - 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 9 + \frac{4x-11}{7} < \frac{x-3}{5} \\ (2+x)^3 + 8x^3 < (3x-1)^3 - 12 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x - \frac{1 - \frac{3x}{2}}{4} - \frac{2 - \frac{x}{4}}{3} > 2 \\ (x+2)^2 - (x+1)^2 > x \end{cases}$

c) $\begin{cases} 1-\dfrac{3x-88}{7} > 5x \\ 4x+5-\dfrac{1}{6}(25x+29{,}5) < 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} \dfrac{x-1}{2} - \dfrac{2x+3}{3} + \dfrac{x}{6} < 2 - \dfrac{x+5}{2} \\ 1-\dfrac{x+5}{8} + \dfrac{4-x}{2} < 3x - \dfrac{x+1}{4} \end{cases}$

580. Lahenda võrratusesüsteem.

a) $\begin{cases} x^2-3x-4 \geqslant 0 \\ 2x-4 < 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x^2-2x-3 < 0 \\ 5x-12 > -\dfrac{1}{3} \end{cases}$

c) $\begin{cases} x^2-3x-4 < 0 \\ x^2-5x-6 \geqslant 0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} -x^2+16x-60 > 0 \\ x(8-x) \geqslant 0 \end{cases}$

e) $\begin{cases} (x-1)(x-2) > 0 \\ (x+1)(x+2) \geqslant 0 \end{cases}$

f) $\begin{cases} (2x-2{,}6)x < 0 \\ (3x-1)(2x-\dfrac{1}{8}) > 0 \end{cases}$

581. Leia võrratusesüsteemi täisarvulised lahendid.

a) $\begin{cases} 5-3x(x-3)+(3x-7)(x+1) \leqslant 8 \\ 3(x-3)^2-(3x-5)(x-1) \leqslant 32 \end{cases}$

b) $\begin{cases} (2x-3)^2-4(x-2)^2 \geqslant 1 \\ x(2x-1)-(2x-1)(x-3) \leqslant 21 \end{cases}$

582. Lahenda võrratusesüsteem.

a) $\begin{cases} \dfrac{x}{3} - \dfrac{4}{x} > \dfrac{4}{3} \\ \dfrac{2x-1}{x+3} \leqslant \dfrac{7x+1}{x+3} \end{cases}$

b) $\begin{cases} x+\dfrac{16}{x} < 10 \\ \dfrac{x+5}{2} - \dfrac{15}{x} > 2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} \dfrac{x+3}{x-2} + \dfrac{3x-15}{x+2} < 8 \\ \dfrac{x+11}{x} + \dfrac{9+4x}{x^2} > 7 \end{cases}$

583. Missuguse parameetri t väärtuste korral on võrrandisüsteemi $\begin{cases} 3x+7y=t \\ 2x+5y=20 \end{cases}$ lahendid positiivsed?

584. Milliste parameetri a väärtuste korral on võrrandi $x^2-2ax+a^2-1=0$ mõlemad lahendid väiksemad arvust 5?

585. Milliste parameetri a väärtuste korral on võrrandi $5(10-a)x^2-10x+6-a=0$ mõlemad lahendid suuremad kui 1?

586. Milliste parameetri a väärtuste korral on võrrandi $(a+5)x^2+(2a-3)x+a-10=0$ mõlemad lahendid negatiivsed?

4.13. KÜSIMUSI JA ÜLESANDEID KORDAMISEKS

587. Mis on võrrand, võrdus, samasus? Too näiteid.

588. Missuguseid võrrandeid nimetatakse samaväärseteks?

589. Kontrolli, kas võrrandid on samaväärsed.

a) $10x-2=4$ ja $5x-1=2$;

b) $(x-2)(x+3)=0$ ja $x-2=0$;

c) $(x+4)(x-2)=4(x+4)$ ja $5x-3=18$;

d) $\frac{1}{6}(5x-3)=3$ ja $5x-3=18$;

e) $(x-2)^2=3(x-2)$ ja $x-2=3$;

f) $\dfrac{x-3}{x+1} = \dfrac{1-x}{x+1}$ ja $x+3=1-x$.

590. Koosta võrrand, millel pole lahendeid.

591. Koosta samasus x-i suhtes.

592. Koosta võrrand, mis on samaväärne võrrandiga $2x+3=9$.

593. Lahenda võrrand $\dfrac{a}{a-c} = \dfrac{b}{b-c}$ a, b ja c suhtes.

594. Heli levimise kiiruse ja õhutemperatuuri vahel on seos $v = 331 + 0{,}6t$.

Avalda t ja leia, missugusel temperatuuril on heli kiirus on $355\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

595. Lahenda võrrandid

a) $\dfrac{x+1}{x+3} - \dfrac{x-2}{x-3} = \dfrac{12}{x^2-9}$;

b) $\dfrac{x+1}{x-2} - \dfrac{x-3}{x+2} = \dfrac{20}{x^2-4}$.

596. Lahenda võrrandid

a) $(x+3)(x-2)+(x+2)^2-3x-10=0$;

b) $(x-5)^2+(3-x)^2-4(x+5)(3-x)-48=(x+1)^2$;

c) $\dfrac{y-2}{y+1} - \dfrac{y-2}{1-y} = \dfrac{4}{y^2-1}$;

d) $\dfrac{4x-1}{x+2} - \dfrac{18}{2-x} = \dfrac{7x^2-28}{x^2-4} + \dfrac{7}{2+x}$;

e) $\dfrac{1}{x+5} - \dfrac{1}{x-2} = \dfrac{1}{x+8} - \dfrac{1}{x+1}$.

597. Lahenda võrrandid

a) $\dfrac{3}{u} + \dfrac{1}{u+1} + \dfrac{4}{u-2} + \dfrac{4}{u-3} + \dfrac{1}{u-4} + \dfrac{3}{u-5} = 0$;

b) $(x^2-4x+5)^2-(x-1)(x-3)=4$;

c) $\dfrac{m^2+2n}{nv+2n+mv+2m} - \dfrac{m}{v+2} - \dfrac{v}{m+n} + \dfrac{v}{v+2} = 0$;

d) $\dfrac{t}{at-3a} - \dfrac{a+3}{az-3a} - \dfrac{1}{bz+3b} - \dfrac{3}{z} = \dfrac{z}{a^2-ab}$;

e) $\dfrac{x}{a^2+ab} - \dfrac{x}{ax+3a} + \dfrac{1}{x+3} = \dfrac{a+3}{ax+3a+bx+3b}$.

598. Kas ratsionaalarvuliste kordajatega ruutvõrrandil võivad olla lahenditeks

a) võrdsed irratsionaalarvud, b) erinevad irratsionaalarvud?

599. Kas ratsionaalarvuliste kordajatega ruutvõrrandil võib üks lahend olla ratsionaalarv, teine lahend aga irratsionaalarv?

600. Koosta ruutvõrrand, mille lahendid on 4 ja -2, 3 ja 0, 2 ja π.

601. Koosta ruutvõrrand, kui üks lahend on $3\sqrt{2}$, $2+\sqrt{3}$, $5-\sqrt{5}$.

602. Lahenda võrrand $x^2-8x+q=0$, kui lahendite ruutude summa on 34.

603. Teades, et võrrandi $x^2 + px + q = 0$ lahendid on x_1 ja x_2, koosta ruutvõrrand, mille lahendid on a) $1 + x_1$ ja $1 + x_2$, b) x_1^2 ja x_2^2,
c) $\frac{2}{x_1} - 1$ ja $\frac{2}{x_2} - 1$, d) $\frac{x_1 - x_2}{x_1 + x_2}$ ja $\frac{x_1 + x_2}{x_1 - x_2}$.

604. Taanda murrud
a) $\frac{a^2 - 3a + 2}{a^2 + 2a - 8}$; b) $\frac{2a^2 - 8a - 90}{3a^2 + 36a + 105}$; c) $\frac{2m^2 - 3mn + n^2}{3mn - m^2 - 2n^2}$.

605. Missuguste c väärtuste korral võrrandi
a) $x^2 + 3x + c = 0$ lahendid on võrdsed;
b) $3x^2 + x - c = 0$ lahendid on mittevõrdsed reaalarvud;
c) $4x^2 + x + 2c = 0$ lahendid on reaalarvulised;
d) $x^2 - 2x + 3c = 0$ lahendid pole reaalarvud?

606. Missuguse alusega arvusüsteemis kümnendsüsteemi arv 307 esitub kujul 616?

607. Arv, mis näitab, mitu korda suurenes söetootmine Venemaal aastatel 1913 kuni 1963, on kahekohaline. Selle arvu üheliste number on 8 võrra suurem kümneliste numbrist. Otsitava arvu korrutis arvuga, mis on kirjutatud samade numbritega, kuid vastupidises järjekorras, on 1729. Mitu korda suurenes söetootmine vaadeldaval perioodil?

608. Ühes majandis saadi tänu eesrindlike meetodite juurutamisele ühelt põllult 680 t kartuleid. Teises majandis, kus neid võtteid ei kasutatud, saadi samuti ühelt põllult 680 t kartuleid. Põld oli teises majandis aga 45 ha suurem kui esimeses. On teada, et esimene majand sai igalt hektarilt 9 t rohkem kartuleid kui teine. Mitu tonni kartuleid saadi kummaski majandis ühelt hektarilt?

609. Kahest erineva kangusega piiritusest tehti 10 ämbrit segu, mille kangus on 79°. Esimese piirituse kangus oli 85°, teise piirituse kangus aga 66 kraadi võrra suurem sellest arvust, mis näitab, mitu ämbritäit seda piiritust võeti segu valmistamiseks. Mitu ämbritäit kumbagi piiritust võeti?

610. Lahenda võrrand.
a) $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$
b) $-x^4 + 6x^2 - 8 = 0$
c) $x^4 + 5x^2 - 36 = 0$
d) $36x^4 - 13x^2 + 1 = 0$
e) $4y^4 + 7y^2 - 2 = 0$
f) $81x^4 - 45x^2 + 4 = 0$

611. Mis on determinant? Sõnasta determinandi omadused.

612. Arvuta.
a) $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$; c) $\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ a & a \end{vmatrix}$; d) $\begin{vmatrix} x-1 & x-2 \\ x+2 & x+1 \end{vmatrix}$

613. Lahenda võrrand.
a) $\begin{vmatrix} 2x & -3x \\ 5 & x-3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2x+1 & -4 \\ 4 & x \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 2x & 1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}$

614. Lahenda lineaarsed võrrandisüsteemid liitmisvõtte abil ja kontrolli saadud lahendeid determinantide abil:
a) $\begin{cases} x - y = 2 \\ 3x - 2y = 9 \end{cases}$; b) $\begin{cases} 2x + y = 11 \\ 3x - y = 9 \end{cases}$; c) $\begin{cases} 3x + y = 2 \\ 6x + 2y = 3 \end{cases}$.

615. Missuguse m väärtuse korral võrrandisüsteemil $\begin{cases} x + my = 4 \\ x - 2y = 3 \end{cases}$ pole lahendeid?

616. Lahenda lineaarvõrrandisüsteemid
a) $\begin{cases} 4x + 3y + 4 = 0 \\ 6x + 5y + 7 = 0 \end{cases}$; b) $\begin{cases} 15x + 23y = -10 \\ 3x + 4y = -2 \end{cases}$;
c) $\begin{cases} (2x + y - 1) : (3x + 2y + 1) = 0{,}5 \\ (8x - 3y + 4) : (6x - 3y + 3) = 0{,}75 \end{cases}$;
d) $\begin{cases} \frac{4}{x} + \frac{6}{y} = 0 \\ \frac{3}{x} - \frac{4}{y} = -\frac{17}{6} \end{cases}$; e) $\begin{cases} \frac{1}{x-3} + \frac{1}{y-2} = 2 \\ \frac{2}{3-x} - \frac{5}{y-2} = -3 \end{cases}$.

617. Leia determinandid
a) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 \\ 5 & 0 & 0 \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} -2 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix}$; c) $\begin{vmatrix} 12 & 24 & -4 \\ 36 & 72 & -12 \\ 99 & 98 & 97 \end{vmatrix}$.

618. Lahenda võrrandisüsteemid
a) $\begin{cases} x + 5y - 2z = 5 \\ 7x - 3y - 4z = -9 \\ 5x - y + 2z = 31 \end{cases}$; b) $\begin{cases} 2x - 3y - 6z = 10 \\ x + y + 2z = 0 \\ 3x + 2y - 4z = -2 \end{cases}$;
c) $\begin{cases} ax + by + cz = k \\ x : y = m : n \\ y : z = p : q \end{cases}$; d) $\begin{cases} x = \frac{y-3}{4} = \frac{z+5}{-2} \\ x + 3y - 4z = -13 \end{cases}$.

619. Tõesta, et biruutvõrrandi $x^4 + px^2 + q = 0$ lahendite summa on null ja lahendite korrutis on q.

620. Lahenda võrratused
a) $x^2 - 5x + 4 > 0$; b) $x^2 + 4x < 0$;
c) $2x^2 - 7x - 15 \geq 0$; d) $12x^2 - 17x - 105 < 0$.

621. Lahenda võrratused
a) $12x^2 - 4x + 3 < 0$; b) $3x^2 + 2x + 1 > 0$;
c) $x^2 + 13x + 36 \leq 0$; d) $x^4 - 4x^2 + 4 \leq 0$;
e) $-2 + x - 3x^2 > 0$; f) $-5 + 4x - 3x^2 < 0$.

622. Lahenda võrratused.

a) $\frac{x-3}{x+2} > 0$ b) $\frac{x-2}{x+2} \geq \frac{2x-3}{4x-1}$ c) $\frac{x^2-2x+3}{x^2-2x-8} < 0$

d) $\frac{x^2-2x+3}{x^2-4x+3} > -3$ e) $\frac{x^2+x+3}{x-3} \leq 0$ f) $2 - \frac{3-x}{3+x} > 2$

623. Lahenda võrrandid.

a) $|x-3| = 3$ b) $|x^2-2x-3| = 5$ c) $|x+3| + 3x = 5$

d) $|x-3| + |2x-5| = 3-x$ e) $|1-x^2| + |x^2-1| = 2$

624. Lahenda võrratused.

a) $|4-x| + |3x-4| < 0{,}5$ b) $|3x-4| - x \geq |2-x|$

c) $|1+x^2| + |1-x^2| < 1+x^2$ d) $|x^2-2x-8| > x-4$

625. Lahenda võrratused.

a) $x^4 - 13x^2 + 36 < 0$ b) $x^4 - 29x^2 + 100 > 0$

c) $20 - 121x^2 - 25x^4 < 0$ d) $x^4 + 10x^3 + 4x^2 - 5x < 0$

626. Lahenda võrratusesüsteemid.

a) $\begin{cases} 4(x-1)+3(2x-1) > 0 \\ 5(x-0{,}3)-2(x-3) < 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x-1 < 0 \\ 6x-2 > 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x^2-2x-3 > 0 \\ x^2-11x+28 \geq 0 \end{cases}$ d) $0 < x^2-3x+2 < 6$

e) $\begin{cases} x^2-14x+45 < 0 \\ x^2-11x+30 > 0 \\ 2x-3 > 0 \end{cases}$ f) $\begin{cases} x^2-x-20 < 0 \\ x^2-2x-8 > 0 \\ 2x^2+x-45 < 0 \end{cases}$

627. Kolmnurga üks külg on 6 cm ja teiste külgede vahe on 2 cm. Leia kolmnurga küljed, kui nende pikkused on täisarvud ja ükski külg pole pikem kui 8 cm.

628. On vaja osta kahte sorti riiet kokku 20 m. Esimese sordi riide meeter maksab 15 \$, teise sordi riide meeter maksab 12 \$. Mitu meetrit riiet kummastki sordist tuleb osta, kui ostusumma ei tohi ületada 276 \$?

629. Selgita võrrandit lahendamata, miks tal ei ole lahendeid.

a) $\sqrt{x-1} + \sqrt{x-2} = 0$ b) $\sqrt{x^2+4} + \sqrt{x-1} = -3$

c) $\sqrt{4-x} + \sqrt{x-4} = 5$ d) $\sqrt{x} - \sqrt{-3-x} = 1$

630. Selgita, miks juurvõrrandi lahendeid tuleb kontrollida.

631. Mida tähendab mõiste *võõrlahend*? Kuidas võivad tekkida võõrlahendid?

632. Lahenda juurvõrrand.

a) $\sqrt{x+5} = 3$ b) $\sqrt{x+3} = \sqrt{2x-1}$ c) $\sqrt{x^2-3x+1} = 3$

633. Lahenda juurvõrrand.

a) $\sqrt{3x+5} - \sqrt{10x+5} = 2$ b) $\sqrt{4x+8} - 2 = \sqrt{3x-2}$

c) $\sqrt{x+8} - \sqrt{7x+9} + 1 = 0$ d) $\sqrt{2z+4} - \sqrt{7-z} = 3$

e) $\sqrt{41-3x} - \sqrt{9-3x} = 2\sqrt{5+x}$ f) $\sqrt{13u-30} - 2\sqrt{u-3} = 3\sqrt{u-2}$

634. Lahenda juurvõrrand.

a) $\sqrt{x^2-2x+1} = x^2-3$ b) $\sqrt{(x-2)^2+(x+1)^2} = \sqrt{(x+2)^2}$

c) $(x-2)^2 - 4(x-2) + \sqrt{x}\left(4-\sqrt{x}\right) = 0$ d) $\frac{x+1}{x} - \sqrt{(x+1):x} = 2$

Lisaks põhikursusele

4.14. JUURVÕRRATUSED

Juurvõrratuseks nimetatakse võrratust, milles muutuja on juuremärgi all.

Näited: Juurvõrratused on $\sqrt{x-1} > 3$, $2\sqrt{k} < 1-k$ jne. Võrratus $\sqrt{2} > x$ ei ole juurvõrratus, sest selles võrratuses ei ole muutuja juuremärgi all.

Vaatleme nüüd, missuguste võtetega juurvõrratusi saab lahendada. Eelkõige huvitab meid küsimus: kas lahendusmeetodid, mis sobisid juurvõrrandi lahendamiseks, on rakendatavad ka juurvõrratuste korral? Toome selle kohta mõned näited.

Näited:

a) lahendame võrratuse $\sqrt{x-1} < -2$. Tõstame võrratuse mõlemad pooled ruutu, saame $x - 1 < 4$ ehk $x < 5$. Ometigi on lihtne veenduda selles, et esialgsel võrratusel pole ühtegi lahendit, sest võrratuse vasaku poole väärtus ei ole mitte ühegi x väärtuse korral negatiivne. Järelikult on esialgne võrratus vastuoluline ja tal puuduvad lahendid;

b) lahendame võrratuse $\sqrt{x-1} < \sqrt{x}$. Tõstes võrratuse mõlemad pooled ruutu, saame võrratuse $x - 1 < x$ ehk $-1 < 0$. See on samaselt tõene arvvõrratus. Kas võime nüüd järeldada, et esialgse võrratuse lahendiks sobib mistahes reaalarv? Kontrollime. Võtame näiteks $x = 5$ ja $x = -1$. Kui $x = 5$, siis esialgne võrratus kehtib. Kui $x = -1$, siis võrratuse vasakul pool oleva avaldise väärtust ei saa arvutada, sest $\sqrt{-2}$ pole reaalarv. Seega $x = -1$ ei ole esialgse võrratuse lahendiks.

Mida me võime sellest järeldada? Kõigepealt, võrratuse poolte astendamisel võime saada üheaegselt nii lahendeid kui ka võõrlahendeid. Võõrlahendite eraldamine saadud lahenditehulgast kontrollimisega proovimise teel on vaevarikas. Üldjuhul kõiki võõrlahendeid niiviisi leida ikkagi ei õnnestu.

Kuidas lahendada juurvõrratusi nii, et me ei saaks võõrlahendeid ning samal ajal ei laseks lahenditel kaotsi minna? Sellele küsimusele annab vastuse teoreem, mille esitame tõestuseta.

TEOREEM: Kui n on naturaalarv, siis võrratuse $\sqrt[2n]{A(x)} > B(x)$ lahendihulk on võrratusesüsteemide

$\begin{cases} A(x) \geq 0 \\ B(x) < 0 \end{cases}$ ja $\begin{cases} B(x) \geq 0 \\ A(x) > [B(x)]^{2n} \end{cases}$ **lahendihulkade ühend.**

Võrratuse $\sqrt[2n]{A(x)} < B(x)$ lahendihulgaks on võrratusesüsteemi

$\begin{cases} A(x) \geq 0 \\ B(x) > 0 \\ A(x) < [B(x)]^{2n} \end{cases}$ **lahendihulk.**

Näide: Lahendame võrratuse $\sqrt{x^2 - 3x + 2} > x + 3$.

Kasutades eespool sõnastatud teoreemi, saame võrratusesüsteemid

$\begin{cases} x^2 - 3x + 2 \geq 0 \\ x + 3 < 0 \end{cases}$ ja $\begin{cases} x + 3 \geq 0 \\ x^2 - 3x + 2 > x^2 + 6x + 9 \end{cases}$.

Esimese võrratusesüsteemi lahendihulk on $L_1 =]-\infty; -3[$ ja teise võrratusesüsteemi lahendihulk on $L_2 = \left[-3; -\frac{7}{9}\right[$. Esialgse võrratusesüsteemi lahendihulk on hulkade L_1 ja L_2 ühend, seega $L = \left]-\infty; -\frac{7}{9}\right[$

Näide: Lahendame võrratuse $\sqrt{x + 18} < 2 - x$.

Antud võrratuse lahendihulgaks on võrratusesüsteemi

$\begin{cases} x + 18 \geq 0 \\ x + 18 < 4 - 4x + x^2 \\ 2 - x > 0 \end{cases}$ lahendihulk.

Esimese võrratuse lahendihulk on $L_1 = [-18; \infty[$, teise võrratuse lahendihulk on $L_2 =]-\infty; -2[\cup]7; \infty[$ ning kolmanda võrratuse lahendihulk on $L_3 =]-\infty; 2[$. Hulkade L_1, L_2 ja L_3 ühisosa on $L = [-18; -2[$. Hulk L on ühtlasi ka esialgse võrratuse lahendihulk.

Kontrolli, kas see on nii. Selleks võta mõned x-i väärtused hulgast L. Missugune tulemuse saad? Missugune on tulemus sel juhul, kui valid mõne hulka L mitte kuuluva x-i väärtuse?

635. Lahenda võrratus.

a) $\sqrt{x} > 3$ b) $\sqrt{t} - 1 < 2$ c) $\sqrt{u} + 2 > 1$

d) $\sqrt{x - 1} > \sqrt{x - 2}$ e) $\sqrt{5 - u} \leq -2$ f) $\sqrt{x^2 - 2x - 3} \geq 0$

636. Lahenda võrratus.

a) $(x - 1)\sqrt{x^2 - x - 2} \geq 0$ b) $(x^2 - 1)\sqrt{x^2 - x - 2} \geq 0$

c) $\sqrt{x + 78} < x + 6$ d) $\sqrt{2x - 1} < x - 2$

e) $\sqrt{9x - 20} < x$ f) $\sqrt{2x - x^2} < 5 - x$

g) $\sqrt{3x - x^2} < 4 - x$ h) $3\sqrt{1 - x^2} < 3 - x$

i) $1 - \sqrt{13 + 3x^2} > 2x$ j) $\sqrt{x^2} < x + 1$

637. Lahenda võrratus.

a) $\sqrt{x^2 - 1} > x$ b) $\sqrt{11 - 5x} > x - 1$

c) $\sqrt{x + 33} > x + 3$ d) $\sqrt{5 - x^2} > x - 1$

e) $\sqrt{x^2 - 2x} > 4 - x$ f) $\sqrt{x^2 + 4x - 5} > x - 3$

g) $\sqrt{x^2 + x - 2} > x$ h) $\sqrt{x^2 + x} > 1 - 2x$

i) $\sqrt{(x + 3)(x + 4)} > 6 - x$ j) $\sqrt{(x + 3)(x - 8)} > x + 2$

Keerulisemate juurvõrratuste korral on kõigepealt otstarbekas leida muutuja lubatavate väärtuste (s.t. selliste mille korral on avaldisel mõte) hulk.

Näide: Lahendame võrratuse $\sqrt{x + 3} + \sqrt{x + 15} < 6$

Esimese juure väärtuse saame arvutada, kui $x \geq 3$, ning teise juure väärtust on võimalik leida, kui $x \geq -15$. Seega on muutuja x lubatavate väärtuste piirkonnaks poolõik $[-3; \infty[$.

Tõstame nüüd võrratuse mõlemad pooled ruutu, saame

$x + 3 + 2\sqrt{(x + 3)(x + 15)} + x + 15 < 36$ ehk $\sqrt{x^2 + 18x + 45} < 9 - x$

Eespool sõnastatud teoreemi järgi on viimase võrratuse lahendihulgaks võrratusesüsteemi $\begin{cases} x^2 + 18x + 45 \geq 0 \\ 9 - x > 0 \\ x^2 + 18x + 45 < 81 - 18x + x^2 \end{cases}$ lahendihulk.

Esimese võrratuse lahendihulk on $L_1 =]-\infty; -15] \cup [-3; \infty[$,
teise võrratuse lahendihulk on $L_2 =]-\infty; 1[$ ja
kolmanda võrratuse lahendihulk on $L_3 =]-\infty; 9[$.
Võrratusesüsteemi lahendihulk on $L =]-\infty; -15] \cup [-3, 1[$.

Ekslik oleks nüüd arvata, et hulk L ongi esialgse võrratuse lahendihulk. Piirkond $]-\infty; -15]$, mis kuulub hulka L, ei kuulu muutuja x lubatavate väärtuste piirkonda. Järelikult on esialgse võrratuse lahendihulk $[-3; 1[$.

638. Lahenda võrratus.

a) $3\sqrt{x} - \sqrt{x + 3} < 1$ b) $3\sqrt{x} - 5\sqrt{5x + 5} > 1$

c) $2 - \sqrt{1 - x^2} < \sqrt{4 - x^2}$ d) $\sqrt{x + 3} - \sqrt{x - 1} > \sqrt{2x - 1}$

e) $\sqrt{x - 6} - \sqrt{10 - x} \geq 1$ f) $\sqrt{1 - x^2} + 1 < \sqrt{3 - x^2}$

g) $\sqrt{x + 3} \leq \sqrt{x - 1} - \sqrt{x - 2}$ h) $\sqrt{3x^2 + 5x + 7} - \sqrt{3x^2 + 5x + 2} > 1$

639. Lahenda võrratused parameetri suhtes.

a) $a\sqrt{x + 1} < 1$ b) $(a + 1)\sqrt{2 - x} < 1$

640. Lahenda võrratus.

a) $\sqrt{-x^2 + x + 2} + 2x + 1 > 0$ b) $\dfrac{|x + 2| - |x|}{\sqrt{4 - x^2}}$

4.15. MITTELINEAARSETE VÕRRANDISÜSTEEMIDE LAHENDAMINE

Eelnevalt oleme õppinud lahendama võrrandisüsteeme, milles kõik võrrandid olid lineaarvõrrandid või üks võrrand oli lineaarvõrrand ning teine ruutvõrrand. Nüüd õpime lahendama selliseid võrrandisüsteeme, kus selliseid piiranguid enam ei ole. Kuna järgnevates võrrandisüsteemides esineb lineaarvõrranditest erinevaid võrrandeid, siis nimetamegi selliseid võrrandisüsteeme *mittelineaarseteks võrrandisüsteemideks*. Kõigepealt meenutame varemõpitut.

641. Kontrolli, kas arv 4 on järgmiste võrrandite lahendiks:
a) $x(x-1)+5-x=0$; b) $x^2-4x-3=-3$; c) $0{,}5x^3-2x^2=0$

642. Missuguste teisenduste korral on esialgne võrrand ja teisendatud võrrand samaväärsed? Too näiteid.

643. Koosta mõni kahe tundmatuga kahest võrrandist koosnev lineaarvõrrandisüsteem, mille lahendid on $x=3$ ja $y=2$; $x=y=0$; lahendeid pole; lahendeid on lõpmata palju.

Vaatleme nüüd, missugused on võrrandisüsteemide lahendamise põhilised võtted. Üksikasjalikumalt peatume neist järgmistel võtetel:

a) võrrandisüsteemi lineaarteisendused; b) asendusvõte ja c) tundmatu asendamine.

A) Võrrandisüsteemi lineaarteisendused.

Varasemast teame, et võrrandisüsteemi lahendihulk ei muutu, kui võrrandeid korrutada (või jagada) nullist erineva arvuga. Samuti võib süsteemi kuuluvate võrrandite vastavaid pooli liita (lahutada).

Näide 1: Lahendame võrrandisüsteemi $\begin{cases} x^2-3xy=-2 \\ x^2+2xy=8. \end{cases}$

Kui liidame kohe võrrandite vastavad pooled, siis me ei saavuta midagi, sest võrrand $2x^2-xy=6$ sisaldab kahte tundmatut. Saadud võrrandist neid leida ei õnnestu (kui, siis ainult proovimise teel). Uurime, kuidas saaks vabaneda korrutisest xy. Ilmselt peame korrutama esimese võrrandi mõlemaid pooli 2-ga ning teise võrrandi mõlemaid pooli 3-ga. Pärast neid teisendusi saame võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} 2x^2-6xy=-4 \\ 3x^2+6xy=24. \end{cases}$$

Liidame nüüd võrrandite vastavad pooled. Saame ruutvõrrandi $5x^2=20$, millest $x^2=4$, ehk $x_1=2$ ja $x_2=-2$.

Asendades leitud x-i väärtused kordamööda ükskõik kumba võrrandisse esialgsest süsteemist, saame tulemuseks $L_1(2;1)$ ja $L_2(-2;-1)$.

Näide 2: Lahendame võrrandisüsteemi $\begin{cases} x^2=13x+4y \\ y^2=4x+13y. \end{cases}$

Lahutades teise võrrandi esimesest võrrandist, saame võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} x^2-y^2=(13x+4y)-(4x+13y) \\ y^2=4x+13y. \end{cases}$$

Teisendame saadud võrrandisüsteemi esimest võrrandit järgmiselt:

$(x-y)(x+y)=9(x-y)$ ehk $(x-y)(x+y-9)=0$.

Teame, et korrutis võrdub nulliga parajasti siis, kui vähemalt üks teguritest on null. Seega tuleb meil lahendada kaks võrrandisüsteemi:

$$\begin{cases} x-y=0 \\ y^2=4x+13y \end{cases} \quad \text{ja} \quad \begin{cases} x+y-9=0 \\ y^2=4x+13y. \end{cases}$$

Esimese võrrandisüsteemi lahendamiseks avaldame esimesest võrrandist x ja saame, et $x=y$. Seetõttu võime teise võrrandi esitada kujul $y^2=17y=0$, millest $y_1=0$ ja $y_2=17$.

Esimese võrrandisüsteemi lahendid on seega $L_1(0;0)$ ja $L_2(17;17)$.

Teise võrrandisüsteemi lahendamiseks avaldame esimesest võrrandist x: $x=9-y$. Saadud tulemuse asendame teise võrrandisse.

Ruutvõrrandi $y^2=4(9-y)+13y$ lahendid on $y_3=12$ ja $y_4=-3$. Seosest $x=9-y$ leiame, et $x_3=-3$ ja $x_4=12$. Seega $L_3=(-3;12)$ ja $L_4=(12;-3)$.

Kokku võttes saime, et esialgsel võrrandisüsteemil on neli lahendit:

$L_1(0;0)$; $L_2(17;17)$; $L_3(-3;12)$ ja $L_4(12;-3)$.

B) Asendusvõte.

Asendusvõttega tutvusime juba siis, kui lahendasime lineaarvõrrandisüsteeme. Ka näidetes 1 ja 2 avaldasime ühest võrrandist mingi tundmatu ja asendasime ta teise võrrandisse. Juhul kui süsteemis on enam kui kaks võrrandit, tuleb avaldatud tundmatu üldjuhul asendada igas võrrandis.

Näide 3: Lahendame võrrandisüsteemi $\begin{cases} x^2+(y+2)^2+(z-1)^2=9 \\ x-y+z=2 \\ 2x+3y+z=1. \end{cases}$

Avaldame teisest võrrandist x-i ja asendame ülejäänud võrranditesse. Saame

$$\begin{cases} (2-y+z)^2+(y+2)^2+(z-1)^2=9 \\ x=2-y+z \\ 2(2-y+z)+3y+z=1 \end{cases}$$

ning pärast esimese ja kolmanda võrrandi lihtsustamist

$$\begin{cases} y^2+z^2+yz-3z=0 \\ x=2-y-z \\ y-z=-3. \end{cases}$$

Moodustame esimesest ja kolmandast võrrandist võrrandisüsteemi. Selle lahendamiseks avaldame kolmandast võrrandist y-i ja asendame esimesse võrrandisse. Saame ruutvõrrandi $z^2-4z+3=0$, mille lahenditeks on $z_1=1$ ja $z_2=3$. Seosest $y=z-3$ leiame, et $y_1=-2$ ja $y_2=0$. Teisest võrrandist leiame nüüd, et $x_1=3$ ja $x_2=-1$. Kokku võttes oleme saanud, et

võrrandisüsteemi lahendid on $L_1(3;-2;1)$ ja $L_2(-1;0;3)$.

Näide 4: Lahendame võrrandisüsteemi $\begin{cases} xy+z^2=2 \\ yz+x^2=2 \\ xz+y^2=2. \end{cases}$

Asendame esimese võrrandi esimese ja teise võrrandi vahega, teise võrrandi asendame teise ja kolmanda võrrandi vahega. Kokku võttes saame võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} xy-yz+z^2-x^2=0 \\ yz-xz+x^2-y^2=0 \\ xz+y^2=2 \end{cases} \text{ ehk } \begin{cases} (z-x)(z+x)-y(z-x)=0 \\ (x-y)(x+y)-z(x-y)=0 \\ xz+y^2=2. \end{cases}$$

Võtame esimesest võrrandist $z-x$ ja teisest võrrandist $x-y$ sulgude ette. Saame võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} (z-x)(z+x-y)=0 \\ (x-y)(x+y-z)=0 \\ xz+y^2=2 \end{cases}$$

Viimase võrrandisüsteemi lahendihulga leidmiseks tuleb lahendada järgmised võrrandisüsteemid:

$$\begin{cases} z-x=0 \\ x-y=0 \\ zx+y^2=2 \end{cases} \quad \begin{cases} z-x=0 \\ x+y-z=0 \\ xz+y^2=2 \end{cases} \quad \begin{cases} z+x-y=0 \\ x-y=0 \\ zx+y^2=2 \end{cases} \quad \begin{cases} z+x-y=0 \\ x+y-z=0 \\ xz+y^2=2. \end{cases}$$

Need võrrandisüsteemid lahendatakse asendusvõttega.

Esimese võrrandisüsteemi lahenditeks saame $L_1(1;1;1)$ ja $L_2(-1;-1;-1)$;
teise võrrandisüsteemi lahendid on $L_3(\sqrt{2};0;\sqrt{2})$ ja $L_4(-\sqrt{2};0;-\sqrt{2})$;
kolmanda võrrandisüsteemi lahendid on $L_5(\sqrt{2};\sqrt{2};0)$ ja $L_6(-\sqrt{2};-\sqrt{2};0)$
ning neljanda võrrandisüsteemi lahendid on $L_7(0;\sqrt{2};\sqrt{2})$ ja $L_8(0;-\sqrt{2};-\sqrt{2})$.
Kontrolli, kas kõik lahendid rahuldavad esialgset võrrandisüsteemi.

Enne, kui asume lahendama võrrandisüsteeme, kus tuleb kasutada tundmatu vahetamise võtet, tutvume ühe olulise mõistega.

1167. Võrrandisüsteemi, mis koosneb kahest kahe tundmatuga võrrandist, nimetatakse *homogeenseks*, kui ta esitub kujul:

$$\begin{cases} a_0x^n+a_1x^{n-1}y+a_2x^{n-2}y^2+\ldots+a_{n-1}xy^{n-1}+a_ny^n=c \\ b_0x^n+b_1x^{n-1}y+b_2x^{n-2}y^2+\ldots+b_{n-1}xy^{n-1}+b_ny^n=d. \end{cases}$$

Selliste võrrandisüsteemide lahendamisel kasutatakse lineaarteisenduste ja uute tundmatute sissetoomise kombineeritud võtet.

Näide 5: Lahendame võrrandisüsteemi $\begin{cases} 3x^2+xy-2y^2=0 \\ 2x^2-3xy+y^2=-1. \end{cases}$

Võrrandisüsteemi esimene võrrand on homogeenne võrrand. Kui võtame $x=0$, siis ka $y=0$. Kuid arvupaar $(0;0)$ ei sobi teise võrrandi lahendiks. Nüüd, kartmata lahendite kaotsiminekut, võime esimese võrrandi mõlemad pooled jagada x^2-ga, saame võrrandi

$$\frac{3x^2}{x^2}+\frac{xy}{x^2}-\frac{2y^2}{x^2}=\frac{0}{x^2} \quad \text{ehk} \quad 3\left(\frac{x}{y}\right)^2+\frac{x}{y}-2=0.$$

Tähistame nüüd $\frac{x}{y}=t$, siis viimane võrrand esitub kujul $3t^2+t-2=0$. Selle võrrandi lahendid on $t_1=-1$ ja $t_2=\frac{2}{3}$. Seega $\frac{x}{y}=-1$ või $\frac{x}{y}=\frac{2}{3}$. Järelikult tuleb meil lahendada kaks võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} x=-y \\ 2x^2-3xy+y^2=-1 \end{cases} \text{ ja } \begin{cases} x=\frac{2}{3}y \\ 2x^2-3xy+y^2=-1. \end{cases}$$

Esimesel võrrandisüsteemil lahendeid ei ole (veendu selles), teisel võrrandisüsteemil on kaks lahendit: $L_1(2;3)$ ja $L_2(-2;-3)$.

Näide 6: Lahendame võrrandisüsteemi $\begin{cases} 3x^2-8xy+4y^2=0 \\ 5x^2-7xy-6y^2=0. \end{cases}$

Lihtne on veenduda, et arvupaar $(0;0)$ rahuldab selle võrrandisüsteemi mõlemat võrrandit. Olgu nüüd $y\neq 0$. Jagades võrrandite mõlemad pooled y^2-ga, saame võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} 3\left(\frac{x}{y}\right)^2-8\left(\frac{x}{y}\right)+4=0 \\ 5\left(\frac{x}{y}\right)^2-7\left(\frac{x}{y}\right)-6=0. \end{cases}$$

Selleks, et viimast võrrandisüsteemi oleks lihtsam lahendada, teeme tundmatu vahetuse $\frac{x}{y}=t$.

Lahendame võrrandisüsteemi $\begin{cases} 3t^2-8t+4=0 \\ 5t^2-7t-6=0. \end{cases}$

Esimese võrrandi lahendid on $t_1 = 2$ ja $t_2 = \frac{2}{3}$, teise võrrandi lahendid on $t_3 = 2$ ja $t_4 = -0{,}6$. Järelikult $t = 2$. Kuna $t = \frac{x}{y}$, siis saame, et esialgse võrrandisüsteemi lahendid esituvad kujul $L(2t; t)$, kus $t \in \mathbb{R}$.

C) Tundmatute vahetamise võte.

Uute tundmatute kasutuselevõtmine on otstarbekas, kui võrrandisüsteemi võrrandid on tundmatute suhtes sümmeetrilised. Viimane tähendab seda, et tundmatuid x ja y sisaldav võrrand jääb samaks, kui tundmatu x asendada y-ga, ja vastupidi.

Näide 7: Sümmeetrilised võrrandid on näiteks

$x^2 + y^2 = 13$; $x + y = 8$; $x^2 + 3xy + y^2 = 0$.

Kuid võrrand $x^2 + 3xy^2 + y^2 = 0$ pole sümmeetriline võrrand.

Põhilisteks kahe tundmatuga sümmeetrilisteks hulkliikmeteks loetakse $x + y$ ja $x \cdot y$. Kõik muud kahe tundmatuga sümmeetrilised hulkliikmed on nende kaudu avaldatavad. Lühiduse mõttes tähistame $x + y = u$ ja $x \cdot y = v$, siis näiteks

$x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy = u^2 - 2v$;

$x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2) = u(u^2 - 3v)$;

$x^4 + y^4 = (x^2 + y^2)^2 - 2x^2y^2 = (u^2 - 2v)^2 - 2v^2 = u^4 - 4u^2v + 2v^2$;

$x^2 + xy + y^2 = (x^2 + 2xy + y^2) - xy = u^2 - v$.

Võrrandisüsteeme, mis sisaldavad sümmeetrilisi võrrandeid, nimetatakse sümmeetrilisteks.

Näide 8: Lahendame võrrandisüsteemi $\begin{cases} x^3 + x^3y^3 + y^3 = 17 \\ x + xy + y = 5. \end{cases}$

Tähistame $x + y = u$ ja $x \cdot y = v$, siis esialgne võrrandisüsteem esitub kujul

$$\begin{cases} u^3 - 3uv + v^3 = 17 \\ u + v = 5. \end{cases}$$

Avaldame viimasest võrrandist $u = 5 - v$ ja asendame esimesse võrrandisse. Lahenditeks saame $u_1 = 3$, $v_1 = 2$ või $u_2 = 2$, $v_2 = 3$. Järelikult peame lahendama võrrandisüsteemid

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ xy = 2 \end{cases} \quad \text{ja} \quad \begin{cases} x + y = 2 \\ xy = 3. \end{cases}$$

Esimese võrrandisüsteemi lahendid on $L_1(1; 2)$ ja $L_2(2; 1)$. Teisel võrrandisüsteemil lahendeid ei ole.

Näide 9: Lahendame võrrandisüsteemi $\begin{cases} x^4 + x^2y^2 + y^4 = 91 \\ x^2 - xy + y^2 = 7 \end{cases}$.

Võrrandisüsteem on sümmeetriline, seega on otstarbekas kasutada selle lahendamisel samasugust tundmatute vahetust nagu eelmises näites. Saame võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} ((u^2 - 2v)^2 - 2v^2) + v^2 = 91 \\ (u^2 - 2v) - v = 7, \end{cases}$$

ehk

$$\begin{cases} (u^2 - 2v)^2 - v^2 = 91 \\ u^2 - 3v = 7. \end{cases}$$

Teisest võrrandist leiame, et $u^2 = 3v + 7$. Asendame viimase tulemuse esimesse võrrandisse, saame võrrandi

$(3v + 7 - 2v)^2 - v^2 = 91$, millest leiame, et $v = 3$.

Võrrandist $u^2 = 3v + 7$ saame, et $u_1 = -4$ ja $u_2 = 4$.

Esialgse võrrandisüsteemi lahendite leidmiseks lahendame võrrandisüsteemid

$$\begin{cases} x + y = 4 \\ x \cdot y = 3 \end{cases} \quad \text{ja} \quad \begin{cases} x + y = -4 \\ x \cdot y = 3. \end{cases}$$

Lahendades need võrrandisüsteemid, saame esialgse võrrandisüsteemi lahendiks $L_1(3; 1)$, $L_2(1; 3)$, $L_3(-3; -1)$ ja $L_4(-1; -3)$.

Viimases näites toodud võrrandisüsteemi on võimalik teisendada homogeenseks võrrandisüsteemiks. Kuid sellisel juhul on lahenduskäik pikem kui viimatitoodud näites.

Enne võrrandisüsteemi lahendamist tuleb võimaluse korral uurida, kas antud võrrandisüsteemil saab üldse lahendeid olla. Näiteks võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} 3x + 3y = 7 \\ 4x + 6y = 9 \\ x^3 + y = 15 \end{cases}$$

lahendihulk on tühi hulk, sest esimene ja teine võrrand on omavahel vastuolus.

844. Selgita, miks võrrandisüsteemil lahendid puuduvad, kui

$$\begin{cases} x + 3y = 7 \\ 3x - y = 1 \\ x^3 + 2y^3 = 15. \end{cases}$$

845. Selgita, kas võrrandisüsteemil on lahendeid, kui

$$\begin{cases} x + 3y = 7 \\ 3x - y = 1 \\ x^3 + 2y^3 = 17. \end{cases}$$

846. Selgita, kas võrrandisüsteemil on täisarvulisi lahendeid, kui

$$\begin{cases} x^4 + y^4 + z^4 = 12 \\ 3x^3 + 4y^3 + 8z = -7 \\ x + y + z = 3. \end{cases}$$

647. Leia K ja M sellised väärtused, mille korral järgmistel võrrandisüsteemidel oleksid lahendid.

a) $\begin{cases} 6x - y = 7 \\ x + 3y = 17 \\ x^2 - y^2 = K, \end{cases}$ b) $\begin{cases} Mx + 2y = 1 \\ x + y = 5 \\ x^2 + y^2 = 17. \end{cases}$

648. Lisa antud võrrandisüsteemile kaks võrrandit nii, et a) võrrandisüsteemil puuduvad lahendid, b) lahendeid on lõplik arv. $\begin{cases} x + y = 6 \\ 2x + y = 1. \end{cases}$

649. Lahenda võrrandisüsteem.

a) $\begin{cases} x - y = 1 \\ x^2 + y^2 = 41 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x - y = 2 \\ x^3 - y^3 = 8 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 9x^2 + y^2 = 13 \\ xy = 12 \end{cases}$

650. Lahenda võrrandisüsteem.

a) $\begin{cases} 2x^2 - 3y = 23 \\ 3y^2 - 8x = 59 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 5x^2 + 14y = 19 \\ 7y^2 + 10x = 17 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x^2(x + y) = 80 \\ x^2(2x - 3y) = 80 \end{cases}$

651. Lahenda võrrandisüsteem.

a) $\begin{cases} x + yz = 2 \\ y + xz = 2 \\ z + xy = 2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x - y = 0{,}25xy \\ x^2 + y^2 = 2{,}5xy \end{cases}$ c) $\begin{cases} \dfrac{1}{x+y} + \dfrac{1}{x-y} = 2 \\ \dfrac{3}{x+y} + \dfrac{4}{x-y} = 7 \end{cases}$

652. Lahenda võrrandisüsteem.

a) $\begin{cases} (x + y)^2 + 2x = 35 - 2y \\ (x - y)^2 - 2y = 3 - 2x \end{cases}$ b) $\begin{cases} 12(x + y)^2 + x = 2{,}5 - y \\ 6(x - y)^2 + x = 0{,}125 + y \end{cases}$

653. Lahenda võrrandisüsteem.

a) $\begin{cases} 56x^2 - xy - y^2 = 0 \\ 14x^2 - 19xy - 3y^2 = 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 4x^2 - 3xy - y^2 = 0 \\ 32x^2 - 36xy + 9y^2 = 6 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 15x^2 + xy - 2y^2 = 0 \\ 7x^2 - 4xy - 3y^2 = -32 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x^2 + xy + 4y^2 = 6 \\ 3x^2 + 8y^2 = 14 \end{cases}$ e) $\begin{cases} x^3 + y^3 = 35 \\ x^2y + xy^2 = 30 \end{cases}$ f) $\begin{cases} x^4 - y^4 = 15 \\ x^3y - xy^3 = 6 \end{cases}$

654. Lahenda võrrandisüsteem.

a) $\begin{cases} xy(x + y) = 20 \\ x^{-1} + y^{-1} = 1{,}25 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 7 + yx \\ x^3 + y^3 = 6xy - 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + y = 5 \\ x^4 + y^4 = 97 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x^5 + y^5 = 33 \\ x + y = 3 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 7 \\ y^2 + yz + z^2 = 3 \\ z^2 + zx + x^2 = 1 \end{cases}$

f) $\begin{cases} 2x^2 + y^2 + z^2 = 9 + yz \\ x^2 + 2y^2 + z^2 = 6 + zx \\ x^2 + y^2 + 2z^2 = 3 + xy \end{cases}$

g) $\begin{cases} x - y + z = 6 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 14 \\ x^3 - y^3 + z^3 = 36 \end{cases}$

h) $\begin{cases} xy^{-1} + yz^{-1} + zx^{-1} = 3 \\ yx^{-1} + zy^{-1} + xz^{-1} = 3 \\ x + y + z = 3 \end{cases}$

i) $\begin{cases} 3xy = 2(x + y) \\ 4xz = 3(x + z) \\ 5yz = 6(y + z) \end{cases}$

j) $\begin{cases} x + y = xyz \\ x + z = xyz \\ y + z = xyz \end{cases}$

k) $\begin{cases} x + y = 3z \\ x^2 + y^2 = 5z \\ x^3 + y^3 = 9z \end{cases}$

l) $\begin{cases} x - z = y^2 \\ x^2 - z^2 = 3y^4 \\ y^3 + 3y + x + z = 26. \end{cases}$

4.10. VÕRRATUSTE TÕESTAMINE

Varasemas koolikursuses oleme õppinud võrratusi lahendama. Mõned neist kehtivad muutuja teatavate väärtuste korral (näiteks võrratus $x^2 - 4 > 0 \Rightarrow |x| > 2$), mõnel võrratusel puuduvad lahendid hoopiski (näiteks $x^2 < 0$). Leidub ka võrratusi, mis kehtivad mistahes muutuja(te) väärtuste korral.

Selles punktis vaatleme, kuidas tõestada, et mingi võrratus kehtib (või ei kehti) muutuja mistahes väärtuse korral.

Võrratuste tõestamisel tuleb näidata, kas antud võrratus on tõene või väär. Võrratuste tõestamisel kasutatakse mitmeid erinevaid võtteid.

Üheks võtteks oleks antud võrratuse teisendamine nii, et sellest saadakse ilmselt tõene võrratus. Teiseks võimaluseks oleks lähtuda ilmselt tõesest võrratusest ja tuletada tõestatav võrratus.

Milliseid võrratusi võib lugeda ilmselt tõesteks võrratusteks? Näiteks võrratust $a^2 \geq 0$; võrratust $(b - c)^4 \geq 0$; kui $a > 0$ ja $b^2 - 4ac < 0$, siis ka võrratust $ax^2 + bx + c > 0$ jne.

Näide 1. Tõestame, et kui $a \geq 0$ ja $b \geq 0$, siis

$$\frac{a + b}{2} \geq \sqrt{ab} \quad \text{(Cauchy võrratus)}^1.$$

Korrutame võrratuse mõlemad pooled kahega, saame

$$a + b \geq 2\sqrt{ab}.$$

Viime $2\sqrt{ab}$ teisele poole võrdusmärki, saame

$$a - 2\sqrt{ab} + b \geq 0.$$

Kasutame valge ruudu valemit, saame

$$(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0.$$

Saadud võrratus on alati tõene, sest

1) kui $a \neq b$, siis on vasakul pool nullist erinev arv ja kehtib range võrratus;
2) kui $a = b$, siis kehtib võrdus.

[1] Prantsuse matemaatiku Augustin Louis Cauchy (1789 – 1857) järgi.

Et neid teisendusi võib teha ka vastupidises suunas: lähtuda tõesest võrratusest $\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2 \geq 0$ ja jõuda sealt võrratuseni $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$, siis võib võrratuse $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ lugeda tõeseks, kui $a \geq 0$ ja $b \geq 0$. ■

Tõestatud võrratus $\left(\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}\right)$ on kasulik meelde jätta, sest seda läheb vaja paljudes erinevates valdkondades. Nimelt on see võrratus sõnastatav järgmiselt: ***Kahe mittenegatiivse arvu aritmeetiline keskmine ei ole väiksem nende arvude geomeetrilisest keskmisest.***

Et mõisted ***aritmeetiline keskmine*** ja ***geomeetriline keskmine*** vajavad ilmselt pikemat selgitust, siis käsitleks siinkohal veidi põhjalikumalt erinevaid keskmisi.

Mitme arvu keskmine on niisugune arv, mis ei ole suurem kõige suuremast ega väiksem kõige väiksemast arvust. Koolikursuses kasutatakse põhiliselt kolme erinevat keskmist: *aritmeetilist, geomeetrilist ja harmoonilist* keskmist. Statistikas kasutatakse ka *ruutkeskmist*.

Kui meil on kaks arvu a ja b (näiteks 6 ja 12), siis nende kahe arvu aritmeetiline keskmine on

$$\frac{a+b}{2}=\frac{6+12}{2}=9;$$

geomeetriline keskmine on

$$\sqrt{ab}=\sqrt{6\cdot 12}=\sqrt{72}\approx 8{,}5;$$

harmooniline keskmine on

$$\frac{1}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}=\frac{2ab}{a+b}=\frac{2\cdot 6\cdot 12}{6+12}=8$$

ja ruutkeskmine on

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}=\sqrt{\frac{6^2+12^2}{2}}=\sqrt{\frac{36+144}{2}}=\sqrt{90}\approx 9{,}5.$$

Nagu näeme, on keskmistest kõige väiksem harmooniline keskmine ja kõige suurem ruutkeskmine. Geomeetriline keskmine on aritmeetilise keskmise ja harmoonilise keskmise vahel ja on nendega võrdelises sõltuvuses:

$$\frac{2ab}{a+b}:\sqrt{ab}=\sqrt{ab}:\frac{a+b}{2}, \quad (*)$$

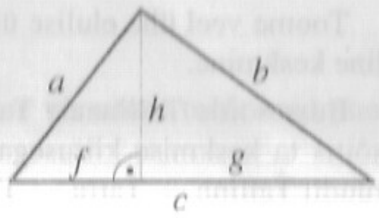
näiteks: $8:\sqrt{72}=\sqrt{72}:9$.

Tõesta, et võrdus (*) kehtib alati. Tõestamisel kasuta seda, et *võrde välisliikmete korrutis on võrdne siseliikmete korrutisega*.

Et aritmeetilist keskmist oleme senises elus küllalt palju kasutanud, siis seda siin põhjalikumalt ei käsitleks. Kus läheb vaja geomeetrilist ja harmoonilist keskmist?

Geomeetrilist keskmist kasutatakse kahes tuntud teoreemis — Eukleidese teoreemis ja teoreemis täisnurkse kolmnurga hüpotenuusile joonestatud kõrgusest.

Olgu täisnurkse kolmnurga kaatetid a ja b ning hüpotenuus c. Hüpotenuusile joonestatud kõrgus h jaotab hüpotenuusi kaheks osaks f ja g. Neid osi f ja g nimetatakse ka *kaatetite a ja b projektsioonideks hüpotenuusil*: f on kaateti a projektsioon ja g on kaateti b projektsioon.



Eukleidese teoreem: *Täisnurkse kolmnurga kaatet on selle kaateti projektsiooni ja hüpotenuusi geomeetriline keskmine.*

$a=\sqrt{fc}$ ja $b=\sqrt{gc}$.

Teoreem kõrgusest: *Täisnurkse kolmnurga hüpotenuusile joonestatud kõrgus on kaatetite projektsioonide geomeetriline keskmine.*

$h=\sqrt{fg}$.

Toome ühe näite ka füüsikast. Olgu vaja määrata kangkaaludega mingi eseme mass m. Paraku on aga kaalud ebatäpsed — kaalukangi õlad l_1 ja l_2 ei ole ühepikkused. Ei mõõtmisvahendid ja töötlemisvahendid on ebatäpsed, siis on see tõsine tüüpiline olukord.

Ebatäpsete kaaludega tuleb teha kaks kaalumist. Ühel juhul on kaalutav ese tasakaalukaalukausil ja tasakaalustamiseks on vaja kaaluvihte m_1 grammi jagu; teisel juhul on kaalutav ese paremal kaalukausil ja tasakaalustamiseks on vaja kaaluvihte m_2 grammi jagu.

Õige kaal ei ole leitud kaalude aritmeetiline keskmine, vaid on nende geomeetriline keskmine. Põhjendame.

Esimese kaalumise puhul

$$\frac{m}{m_1}=\frac{l_1}{l_2}$$

Teise kaalumise puhul

$$\frac{m_2}{m}=\frac{l_1}{l_2}$$

Järelikult

$$\frac{m}{m_1}=\frac{m_2}{m}$$

ja $m^2=m_1m_2$, ehk $m=\sqrt{m_1m_2}$.

Harmoonilise keskmise mõiste võttis kasutusele Pythagoras. Ta uuris muusikariistade keelte võnkumisel tekkivaid kooskõlasid. Ta võttis neli ühesuguse jämeduse ja pingega keelt, mille pikkused olid erinevad. Keeled pikkusega 12 ühikut ja 6 ühikut andsid intervalliks oktaavi, 12 ja 9 ühikut kvardi, 12 ja 8 ühikut kvindi. 9 on arvude 12 ja 6 aritmeetiline keskmine, 8 aga nendesamade arvude harmooniline[1] keskmine.

[1] *harmonia* — kreeka keeles kooskõla, vastavus, sobivus.

Toome veel ühe elulise ülesande, mille lahendiks on antud arvude harmooniline keskmine.

Buss sõitis Tallinnast Tartusse keskmise kiirusega $v_1 = 90$ km/h; tagasiteel sõitis ta keskmise kiirusega $v_2 = 60$ km/h. Leida bussi keskmine kiirus marsruudil Tallinn — Tartu — Tallinn.

Esimesel pilgul näib, et keskmine kiirus võrdub kiiruste aritmeetiliste keskmisega $v = \frac{v_1 + v_2}{2} = \frac{90+60}{2} = 75$ (km/h).

Nii see siiski ei ole. Põhjendame: olgu Tallinna ja Tartu vahemaa a km. Siis t_1 on aeg, mis kulub Tallinnast Tartusse sõiduks; $t_1 = \frac{a}{v_1}$. Tartust Tallinnasse sõiduks kuluv aeg on t_2; $t_2 = \frac{a}{v_2}$.

Kokku kulub mõlemas suunas sõiduks aega $t = t_1 + t_2 = \frac{a}{v_1} + \frac{a}{v_2}$ ja keskmine kiirus edasi-tagasi sõidul on

$$v = \frac{2a}{t} = \frac{2a}{\frac{a}{v_1} + \frac{a}{v_2}} = \frac{2}{\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2}} = \frac{2v_1v_2}{v_1 + v_2} = \frac{2 \cdot 90 \cdot 60}{60+90} = 72 \text{ (km/h)}.$$

Nagu näeme, on keskmine kiirus antud kiiruste harmooniline, mitte aga aritmeetiline keskmine.

Sarnaselt kahe arvu keskmistega saab leida ka kolme arvu, nelja arvu jne. keskmisi. Olgu meil n positiivset arvu $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

Nende arvude aritmeetiliseks keskmiseks on arv

$$m = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}.$$

Samade arvude geomeetriliseks keskmiseks on n-es juur arvude korrutisest

$$g = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n}.$$

Nende arvude harmooniliseks keskmiseks on arv

$$h = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}}.$$

Nende arvude ruutkeskmine on arv

$$d = \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2}{n}}.$$

Saab näidata, et suvaliste positiivsete arvude $a_1, a_2, \ldots, a_n$ korral need keskmised rahuldavad võrratust

$$h \leq g \leq m \leq d$$

Võrdus leiab aset juhul, kui $a_1 = a_2 = a_3 = \ldots = a_n$.

Näide 3. Näitame, et kui $ab > 0$, siis $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$.

Viime vasaku poole ühisele nimetajale ja korrutame võrratuse mõlemaid pooli ab-ga:

$$\frac{a^2 + b^2}{ab} \geq 2 \quad \text{ehk} \quad a^2 + b^2 \geq 2ab$$

Viime $2ab$ vasakule poole ja kasutame vahe ruudu valemit

$$a^2 - 2ab + b^2 \geq 0$$
$$(a-b)^2 \geq 0$$

Et neid võrratusi saab teha ka vastupidi — lähtuda tõesest võrratusest $(a-b)^2 \geq 0$ ja jõuda võrratuseni $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$, siis võib väita, et võrratus kehtib alati, kui $ab > 0$. ■

Märkus. Ilmselt tõesteks võrratusteks võime lugeda ka neid võrratusi, mida me juba oleme tõestanud. Näiteks peale Cauchy võrratuse tõestamist võime seda võrratust lugeda juba ilmselt tõeseks võrratuseks. Kui meil õnnestub tõestatav võrratus taandada mõnele ilmselt tõesele võrratusele (näiteks Cauchy võrratusele), siis võime olla kindlad ka selle võrratuse tõesuses.

Näide 4. Tõestame, et kui $a \geq 0$, $b \geq 0$, $c \geq 0$ ja $d \geq 0$, siis

$$\frac{a+b+c+d}{4} \geq \sqrt[4]{abcd}.$$

Esitame võrratuse vasaku poole $\frac{a+b+c+d}{4}$ kujul $\frac{\frac{a+b}{2} + \frac{c+d}{2}}{2}$.

Kasutades Cauchy võrratust arvudega $\frac{a+b}{2}$ ja $\frac{c+d}{2}$, saame

$$\frac{\frac{a+b}{2} + \frac{c+d}{2}}{2} \geq \sqrt{\frac{a+b}{2} \cdot \frac{c+d}{2}}.$$

Et $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ ja $\frac{c+d}{2} \geq \sqrt{cd}$, siis $\sqrt{\frac{a+b}{2} \cdot \frac{c+d}{2}} \geq \sqrt{\sqrt{ab} \cdot \sqrt{cd}} = \sqrt[4]{abcd}$. ■

Näide 4. Tõestame, et $\left(\frac{n+1}{2}\right)^n \geq n!$, kus $n \in \mathbb{N}$ ja $n > 1$[1].

Kirjutame välja järgmised Cauchy võrratused:

$$\frac{n+1}{2} \geq \sqrt{n \cdot 1}; \quad \frac{(n-1)+2}{2} \geq \sqrt{(n-1) \cdot 2}; \quad \frac{(n-2)+3}{2} \geq \sqrt{(n-2) \cdot 3}; \quad \ldots;$$
$$\frac{2+(n-1)}{2} \geq \sqrt{2 \cdot (n-1)}; \ldots \frac{1+n}{2} \geq \sqrt{1 \cdot n}.$$

Korrutades nende võrratuste vastavad pooled, saame

[1] Sümbolit $n!$ nimetatakse arvu n *faktoriaaliks* ja sellega tähistatakse n esimese arvu korrutist, st $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n$. Näiteks arvu 5 faktoriaal on $5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$.

$$\left(\frac{n+1}{2}\right)^n \geq \sqrt{(n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot2\cdot1)(1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot(n-1)\cdot n)} = \sqrt{n!n!} = \sqrt{(n!)^2} = n! \ \blacksquare$$

Näide 5. Tõestame, et iga a ja b korral

$$\frac{a+b}{2} \leqslant \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}.$$

Et $a^2+b^2 \geqslant 2ab$, siis $2a^2+2b^2 \geqslant a^2+2ab+b^2$ ehk $\frac{a^2+b^2}{2} \geqslant \frac{(a+b)^2}{4}$.

Võttes viimase võrratuse mõlemalt poolelt ruutjuure ja vahetades võrratuse pooled, saame $\frac{a+b}{2} \leqslant \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$. ■

Näide 6. Tõestame, et kui $a>0$, $b>0$ ja $c>0$, siis

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \geqslant 9.$$

Tõestuses kasutame järgmisi ilmselt tõeseid võrratusi:

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a} \geqslant 2, \quad \frac{a}{c}+\frac{c}{a} \geqslant 2; \quad \frac{b}{c}+\frac{c}{b} \geqslant 2.$$

Liites need võrratused, saame $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+\frac{a}{c}+\frac{c}{a}+\frac{b}{c}+\frac{c}{b} \geqslant 6$ ehk

$$\frac{b+c}{a}+\frac{a+c}{b}+\frac{a+b}{c} \geqslant 6.$$

Liidame viimase võrratuse mõlemale poolele 3 ja teisendame avaldist:

$$\left(1+\frac{b+c}{a}\right)+\left(1+\frac{a+c}{b}\right)+\left(1+\frac{a+b}{c}\right) \geqslant 9,$$

$$\frac{a+b+c}{a}+\frac{a+b+c}{b}+\frac{a+b+c}{c} \geqslant 9.$$

Tuues $a+b+c$ sulgude ette, saame:

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \geqslant 9. \ \blacksquare$$

Näide 7. Tõestame, et kehtib võrratus $\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}} \geqslant \sqrt{n}$.

Kirjutame välja tõesed võrratused $\frac{1}{\sqrt{1}} \geqslant \frac{1}{\sqrt{n}}$, $\frac{1}{\sqrt{2}} \geqslant \frac{1}{\sqrt{n}}$, $\frac{1}{\sqrt{3}} \geqslant \frac{1}{\sqrt{n}}$, ...

$\frac{1}{\sqrt{n}} \geqslant \frac{1}{\sqrt{n}}$. Liites nende võrratuste vasakud pooled ja paremad pooled, saame

$$\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}} \geqslant \frac{n}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}. \ \blacksquare$$

Näide 8. Kasutades Cauchy võrratust, näitame, et naturaalarvude $n>0$ ja $x>0$ korral kehtib võrratus $1+\frac{x}{n} \geqslant \sqrt[n]{1+x}$ [1].

[1] Seda võrratust nimetatakse ka Bernoulli võrratuseks.

Võttes Cauchy võrratuses n arvu korral $a_1 = a_2 = \ldots = a_{n-1} = 1$ ja $a_n = 1+x$, saame $\frac{1+1+\ldots+1+1+x}{n} \geqslant \sqrt{1\cdot(1+x)}$ ehk $1+\frac{x}{n} \geqslant \sqrt[n]{1+x}$. ■

Vahel tõestatakse võrratusi ka *vastuväiteliselt* — s.t. eeldatakse, et antud võrratus on väär.

Näide 9. Tõestame, et kui $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$, $c \geqslant 0$, siis $\frac{a+b+c}{3} \leqslant \sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}}$.

Tõestame, et mingite a, b, c väärtuste korral on see võrratus väär, seega tõene on võrratus $\frac{a+b+c}{3} > \sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}}$.

Tõestame mõlemad pooled ruutu ja seejärel korrutame 9-ga:

$$\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^2 > \frac{a^2+b^2+c^2}{3},$$

$$(a+b+c)^2 > 3(a^2+b^2+c^2).$$

Teisendades saadud võrratust, saame

$$3(a^2+b^2+c^2) - (a+b+c)^2 < 0,$$

$$3(a^2+b^2+c^2) - (a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc) < 0,$$

$$2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2ac-2bc < 0,$$

$$(a-b)^2+(b-c)^2+(a-c)^2 < 0.$$

Ei ruutude summa ei saa olla negatiivne arv, siis oleme jõudnud vastuoluni. Seega on tõene siiski esialgne võrratus $\frac{a+b+c}{3} \leqslant \sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}}$.

888. Tõesta võrratused

a) $a^3+b^3 \geqslant 2ab$ b) $m^6-m^5+m^4+m^2-m+1>0$

889. Tõesta, et $m+\frac{1}{m} \geqslant 2$, kui $m>0$.

890. Tõesta, et $ab+bc+ac \leqslant 3abc$, kui $a, b, c \in \mathbb{N}$.

891. Tõesta, et kui $m>0$ ja $n>0$, siis $\frac{1}{m}+\frac{1}{n} \geqslant \frac{4}{m+n}$.

892. Tõesta, et kui $ab>0$, siis $\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} \leqslant \sqrt{ab}$.

893. Tõesta, et kui kahe positiivse arvu korrutis on suurem nende arvude summast, siis see summa on suurem 4-st.

894. Tõesta, et kui $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$, $c \geqslant 0$ ja $d \geqslant 0$, siis $\sqrt{(a+c)(b+d)} \geqslant \sqrt{ab}+\sqrt{cd}$.

895. Tõesta, et kui $a>0$ ja $b>0$, siis $a^3+b^3 \geqslant a^2b+ab^2$.

896. Tõesta, et kui $a>0$ ja $b>0$, siis $\frac{a^3+b^3}{2} \geqslant \left(\frac{a+b}{2}\right)^3$.

897. Tõesta, et $a^4+b^4 \geqslant a^3b+ab^3$.

898. Tõesta, et kui $a>0$ ja $b>0$, siis $\frac{a+b}{2} \cdot \frac{a^3+b^3}{2} \leqslant \frac{a^4+b^4}{2}$.

666. Tõesta, et $\frac{a^2+b^2}{2}\cdot\frac{a^4+b^4}{2}\leqslant\frac{a^6+b^6}{2}$.

667. Tõesta, et kui $a\geqslant 0$, $b\geqslant 0$ ja $c\geqslant 0$, siis $a+b+c\geqslant\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ac}$.

668. Tõesta, et $a^2+b^2+c^2\geqslant ab+ac+bc$.

669. Tõesta, et kui $a+b+c\geqslant 0$, siis $a^3+b^3+c^3\geqslant 3abc$.

670. Tõesta, et $\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^2\geqslant\frac{ab+ac+bc}{3}$.

671. Tõesta, et kui $a\geqslant 0$, $b\geqslant 0$ ja $c\geqslant 0$, siis $\frac{a+b+c}{3}\geqslant\sqrt[3]{abc}$.

672. Tõesta, et $\sqrt{a^2+b^2}\geqslant\sqrt[3]{a^3+b^3}$.

673. Tõesta, et kui $a\geqslant 0$, $b\geqslant 0$ ja $c\geqslant 0$, siis $(a+b)(b+c)(a+c)\geqslant 8abc$.

674. Tõesta, et kui $abc>0$, siis $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\leqslant\frac{a^8+b^8+c^8}{a^3b^3c^3}$.

675. Tõesta, et kui $a\geqslant 0$, $b\geqslant 0$, $c\geqslant 0$ ja $d\geqslant 0$, siis $a^4+b^4+c^4+d^4\geqslant 4abcd$.

676. Tõesta, et kui $a>0$, $b>0$, $c>0$ ja $d>0$, siis $\frac{4}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}}\leqslant\sqrt[4]{abcd}$.

677. Tõesta, et $\frac{a+b+c+d}{4}\leqslant\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2+d^2}{4}}$.

678. Olgu $a+b\geqslant 1$. Tõesta, et $a^4+b^4\geqslant\frac{1}{8}$.

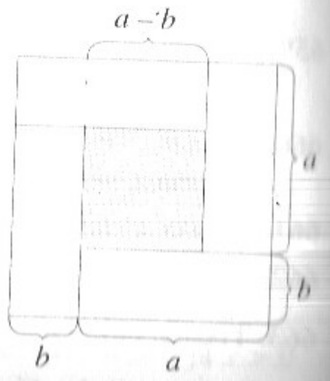
679. Teades, et $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geqslant 2$, kui $a>0$ ja $b>0$, näita, et kui $x_1, x_2, \ldots, x_n$ on positiivsed, siis $x_1+x_2+\ldots+x_n+\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\ldots+\frac{1}{x_n}\geqslant 2n$.

680. Tõesta, et $3^{\frac{1}{1994}}+3^{-\frac{1}{1994}}\geqslant 2$.

681. Tõesta, et kui $n\geqslant 2$, siis $2\sqrt{n}>1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}$.

682. Tõesta, et kui $n\geqslant 2$, $\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{25}+\ldots+\frac{1}{n^2}<1$.

683. Olgu $a>0$, $b>0$ ja $a>b$. Kas kõrvalolevat joonist saab kasutada Cauchy võrratuse tõestamiseks?



684. Tõesta, et täisnurkses kolmnurgas on hüpotenuusi kuup suurem kaatetite kuupide summast.

685. Kaks sõpra, väljunud trammist, hakkasid minema kooli. Üks neist läbis esimese poole teest kiirusega a km/h, teise poole aga kiirusega b km/h. Teine liikus pool aega kiirusega a km/h, teise poole aga kiirusega b km/h. Kumb neist jõudis varem kooli?

V peatükk. TRIGONOMEETRIA

5.1. KORDAMINE

Teame, et kolmnurga mõnede antud elementide järgi saab leida teisi elemente. Näiteks, kui on teada kaks nurka, siis saab leida kolmanda nurga; täisnurkse kolmnurga kaatetite ja hüpotenuusi järgi saab leida nende vahelise nurga jne.

Trigonomeetria on õpetus, mis tegeleb seoste leidmisega kolmnurga külgede ja nurkade vahel. Need teadmised võimaldavad kolmnurga antud elementide (külgede ja nurkade) kaudu leida puuduvaid elemente — lahendada kolmnurki.

Sõna *trigonomeetria* tuleneb kreeka keelest, sõnadest τριγωνον (trigonon) — kolmnurk ja μετρεο (metreo) — mõõdan.

Vajaduse osata lahendada kolmnurka tingisid astronoomia, merenavigatsioon ja maamõõtmine. Esimesed trigonomeetriaalased ülesanded arvatakse pärinevat III aastatuhandest e. Kr.

Lõikude suhteid kolmnurgas ja ringis (on ju näiteks täisnurkse kolmnurga teravnurga siinus *vastaskaateti ja hüpotenuusi suhe*) kasutasid kreeka matemaatikud Eukleides, Archimedes, Apollonius, Ptolemaios jt. Kreeklased ei kasutanud siinuse, koosinuse ega tangensi mõistet. Astronoomidel oli vaja osata leida kõõlu pikkust kaare suuruse järgi. Kaart mõõtsid kreeklased babüloonlastelt laenatud kuuekümnendsüsteemis kraadides, minutites ja sekundites.

Esimesed trigonomeetrilised tabelid koostas II saj. e. Kr. kreeka astronoom Hipparchos (u. 190 — 125 e. Kr.). Ka olevat ta osanud lahendada kolmnurki, mis paiknevad kera pinnal.

II saj. p. Kr. koostas astronoom Ptolemaios (u. 100 — u. 178 p. Kr.) kõõlude tabeli teravnurkade jaoks. Sisuliselt oli tegemist siinuste tabeliga, kusjuures täpsus oli küllaltki suur.

Trigonomeetria jaguneb *tasandiliseks trigonomeetriaks* ja *sfääriliseks trigonomeetriaks*. Esimene tegeleb tasandiliste kolmnurkadega, teine sfääriliste (kera pinnal asuvate) kolmnurkadega.

Trigonomeetria arengule on olnud suur mõju järgmistel matemaatikutel ja astronoomidel: Bhaskaral (1114 — 1178), Muhammed Nasireddin Tusil (1201 — 1274), Regiomontanusel (1436 — 1476), Mikolai Kopernikul (1473 — 1543), Tycho Brahel (1546 — 1601), François Viète'il (1540 — 1603), J. Kepleril (1571 — 1630) ja I. Newtonil (1643 — 1727) jt.

Šveitsi matemaatik Leonhard Euler (1707 — 1783) võttis trigonomeetrias kasutusele tänapäevase tähistusviisi. Ta käsitles suurusi sin x, cos x ja tan x kui muutuja x funktsioone. Muutuja x võis seejuures omada kõikvõimalikke reaalarvulisi ja isegi kompleksarvulisi[1] väärtusi.

Tuletame meelde põhikoolis õpitut.

Nurga üheks mõõtühikuks on **nurgakraad** ehk lihtsalt **kraad. Nurgakraad on $\frac{1}{360}$ täispöördest.**

Üks kraad jaguneb 60 **minutiks** ja üks minut jaguneb omakorda 60 **sekundiks**.

Kui nurga suurus on 65 kraadi 43 minutit ja 21 sekundit, siis seda märgitakse nii: 65°43′21″. Vahel on vaja esitada nurki ilma minutite ja sekunditeta, kirjutades kraadide arvu kümnendmurruna. Näiteks 46°30′ = 46,5°. Seda kirjaviisi kasutatakse paljudes taskuarvutites.

Näide 1. Esitame 64°9′18″ kraadides kümnendmurruna.

Et $1' = \frac{1^\circ}{60}$ ja $1'' = \frac{1^\circ}{3600}$, siis

$$64^\circ 9' 18'' = 64^\circ + \frac{9^\circ}{60} + \frac{18^\circ}{3600} = (64 + 0{,}15 + 0{,}005)^\circ = 65{,}155^\circ.$$

Näide 2. Esitame 53,721° kraadides, minutites ja sekundites.

$$53{,}721^\circ = 53^\circ + 0{,}721^\circ = 53^\circ + 0{,}721 \cdot 60' = 53^\circ + 43{,}26' = 53^\circ 43' + 0{,}26' =$$
$$= 53^\circ 43' + 0{,}26 \cdot 60'' = 53^\circ 43' + 15{,}6'' \approx 53^\circ 43' 16''.$$

686. Esita nurk kraadides, minutites ja sekundites.

a) 35,75° b) 12,25° c) 14,6° d) 19,9° e)48,125°

687. Esita nurk kraadides täpsusega 0,01.

a) 7°35′40″ b) 8°47′2″ c) 46°29′17″ d) 48°52′

Nurki liites ja lahutades tuleb meeles pidada, et ühes kraadis on 60′ ja ühes minutis 60″.

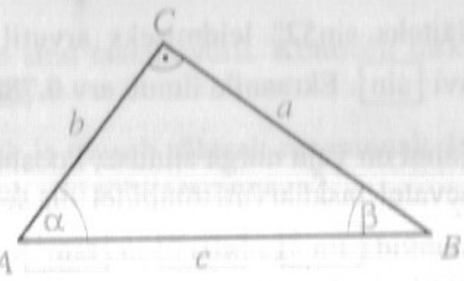
Näiteks:
$$\begin{array}{r} 38^\circ 53' 21'' \\ +\ 70^\circ 22' 49'' \\ \hline 108^\circ 75' 70'' = 109^\circ 16' 10'' \end{array} \qquad \begin{array}{r} 119^\circ 01' 14'' \\ -\ 72^\circ 36' 26'' \\ \hline 46^\circ 24' 48'' \end{array}$$

Märkus: Lahutamise korral tuleb „laenuks võetav" kraad teha 60 minutiks ja minut 60 sekundiks!

688. Arvuta.

1) 28°31′ + 41°12′ – 58°22′ + 50′ + 10°34′ – 8°7′
2) 90° – 46°45′ + 13°15′ + 9°9′ – 40°58′ + 26°
3) 5 · 18°24′42″
4) 47°16′27″ : 3

[1] Kompleksarvudega tutvute 12. klassis.



Vaatleme täisnurkset kolmnurka ABC, mille küljed on a, b ja c ning nurgad on α, β ja γ ($\gamma = 90^\circ$). Defineerime teravnurga siinuse, koosinuse, tangensi:

1) **Teravnurga siinuseks** nimetatakse vastaskaateti ja hüpotenuusi suhet.

$\sin\alpha = \frac{a}{c}$; $\sin\beta = \frac{b}{c}$.

2) **Teravnurga koosinuseks** nimetatakse lähiskaateti ja hüpotenuusi suhet.

$\cos\alpha = \frac{b}{c}$; $\cos\beta = \frac{a}{c}$.

3) **Teravnurga tangensiks** nimetatakse vastaskaateti ja lähiskaateti suhet.

$\tan\alpha = \frac{a}{b}$; $\tan\beta = \frac{b}{a}$.

Analoogiliselt tangensiga on võimalik defineerida ka kootangens:

4) **Teravnurga kootangensiks** nimetatakse lähiskaateti ja vastaskaateti suhet.

$\cot\alpha = \frac{b}{a}$; $\cot\beta = \frac{a}{b}$.

Mõiste siinus (*sinus* — lad. k.) võeti kasutusele 12. saj. kui ladinakeelne termin, mis tähendas kõõlu. Mõiste koosinus (*cosinus* — lad. k.) võeti kasutusele 17. saj. kui lühend kahest sõnast *complementi sinus* — täienduse siinus. Tuletame meelde, et nurga koosinus võrdub tema täiendusnurga siinusega. Mõiste tangens (lad. k. *tangens* — puutuja) võttis kasutusel taani matemaatik Finke 1583. a. Mõiste kootangens tuleneb analoogiliselt koosinusega kahest ladinakeelsest sõnast — *complementi tangens*.

Nurga siinus, koosinus, tangens ja kootangens on *nurga trigonomeetrilised funktsioonid*.

Taskuarvutil on nurga siinuse, koosinuse ja tangensi leidmiseks klahvid [sin], [cos] ja [tan] (mõnel vene päritolu kalkulaatoril on viimase klahvi asemel klahv [tg]). Taskuarvutit kasutades peab jälgima, et arvuti oleks kraadirežiimis. Vajalikuks kraadirežiimi on mõnel arvutil spetsiaalne klahv, mille peale on kirjutatud [DRG] või [DEG] või [MODE]. Mõnel arvutil (näiteks MK-71) on selline klahvi asemel lüliti. Paljudel taskuarvutitel on see, millises režiimis arvuti töötab, näha ka tabloo pealt. Näiteks arvutil MK-71 on kraadimõõdu tähiseks D täht, paljudel välismaistel taskuarvutitel kiri DEG.

Näiteks sin52° leidmiseks arvutil MK-71 sisestame arvu 52 ja vajutame klahvi $\boxed{\sin}$. Ekraanile ilmub arv **0.788010753**.

Vahel on vaja nurga siinuse, koosinuse või tangensi järgi leida nurga suurust. Erinevatel taskuarvuti tüüpidel on selleks erinevad võimalused: Mõnel arvutil on klahvid $\boxed{\sin^{-1}}$, $\boxed{\cos^{-1}}$ ja $\boxed{\tan^{-1}}$. Neid klahve saab tavaliselt kasutada peale eelnevat nn. funktsiooniklahvi vajutust.

Näiteks, kui $\sin\alpha = 0{,}087$, siis arvutil MK-71 toimitakse nurga suuruse leidmiseks järgmiselt: kõigepealt sisestatakse arv 0,087, seejärel vajutatakse klahve $\boxed{F}$ ja $\boxed{\sin^{-1}}$. Tulemuseks saadakse **4.9910426°**.

Mõnel arvutil on klahv $\boxed{INV}$, mõnel aga klahv $\boxed{ARC}$. Neid klahve kasutatakse koos klahvidega $\boxed{\sin}$, $\boxed{\cos}$ ja $\boxed{\tan}$.

Näiteks, kui $\sin\alpha = 0{,}087$, siis selleks, et leida nurga suurust, sisestatakse arv 0.087 ja vajutatakse seejärel klahve $\boxed{INV}$ ja $\boxed{\sin}$ (Mõnel mudelil vastavalt $\boxed{ARC}$ ja $\boxed{\sin}$). Tulemus on sama, s.o. ligikaudu 5°.

Taskuarvutitel ei ole tavaliselt klahvi $\boxed{\cot}$. Et $\tan\alpha$ ja $\cot\alpha$ on teineteise pöördfunktsioonid, siis saadakse kootangens klahvide $\boxed{\tan}$ ja $\boxed{1/x}$ abil.

Paljudel taskuarvutitel on võimalus teisendada nurki kraadimõõdu kümnendsüsteemist kraadideks, minutiteks ja sekunditeks ja kraade, minuteid ning sekundeid kraadimõõdu kümnendsüsteemi.

Näiteks arvutitel MK-51 ja MK-71 on kraadide, minutite ja sekundite teisendamiseks kraadimõõdu kümnendsüsteemi klahv $\boxed{\circ\,'\,''}$. Selle kasutamine käib järgmiselt.

Olgu vaja teisendada kraadimõõdu kümnendsüsteemi 14°25′36″. Sisestame 14 $\boxed{\circ\,'\,''}$ 25 $\boxed{\circ\,'\,''}$ 36 $\boxed{\circ\,'\,''}$. Arvutil MK-71 saame tulemuseks **14.42666667**.

Mõnel välismaisel kalkulaatoril on klahvi $\boxed{\circ\,'\,''}$ asemel klahv $\boxed{\rightarrow DMS}$.

Selleks, et teisendada nurka kraadimõõdu kümnendsüsteemist kraadideks, minutiteks ja sekunditeks, on arvutil MK-71 klahv $\boxed{\circ\,'\,''\leftarrow}$. Seda klahvi saab kasutada pärast funktsiooniklahvi vajutamist.

12.3456° teisendatakse kraadideks, minutiteks ja sekunditeks nii: sisestame 12.3456 ja vajutame klahve $\boxed{F}$ ja $\boxed{\circ\,'\,''\leftarrow}$. Tulemuseks saame 12°20′44.16″. Mõnedel välismaistel arvutitel on klahvi $\boxed{\circ\,'\,''\leftarrow}$ asemel klahv $\boxed{\rightarrow DEG}$.

689. Tee kindlaks, millised võimalused on sinu taskuarvutil. Kontrolli taskuarvuti abil ülesannete 686 – 688 tulemusi.

690. Kuivatusrehte viiv sild on 16,5 m pikk ja tõuseb rõhtsalt maapinnalt 4,1 m kõrgusele. Missuguse nurga moodustab sild rõhttasapinnaga?

691. Lohenöör on 152 m pikk ja moodustab rõhtsa maapinnaga nurga 54°. Kui kõrgel on lohe maapinnast?

692. Raadiomasti hoiavad püsti terastrossid, mis on kinnitatud masti külge 16,4 m kõrgusel ja moodustavad rõhttasapinnaga 62°-sed nurgad. Arvuta trosside pikkus.

693. Pisa torn on 54 m kõrge. Vajumise tõttu on torni tipp nihkunud oma algasendist kõrvale 4,5 meetri võrra. Leia nurk, mille torn moodustab rõhttasapinnaga.

694. 4,6 m pikkune redel toetub ülemise otsaga seinakarniisile, mille kõrgus maapinnast on 3,4 m. Kui suure nurga moodustab redel seinaga?

695. Mere sügavuse mõõtmiseks lastakse laevalt merre nööri otsas tükk tina, mis laeva sõites libiseb mööda merepõhja. Merre lastud nööri pikkus on 50 m ja nöör moodustab püstsihiga nurga 28°. Kui sügav on meri laeva kohal?

696. Trepi astmed on 21 cm laiad ja 13 cm kõrged. Missuguse nurga moodustab trepi käsipuu rõhttasapinnaga?

697. Paikese kõrgus horisondist on 36°. Lipuvarras heidab varju, mille pikkus on 8,6 m. Kui kõrge on lipuvarras?

698. Tuletorni tipus vilkuv tuli asetseb 84 m kõrgusel maapinnast. Paadist paistab tuli 8° üle silmapiiri. Kui kaugel on paat tuletornist?

699. Joonesta nurk, mille

a) siinus on 0,5 b) koosinus on $\frac{3}{5}$ c) tangens on 3

d) siinus on 0,8 e) koosinus on $\frac{1}{2}$ f) tangens on 1.

700. Kas leidub täisnurkne kolmnurk teravnurkadega α ja β, kus

a) $\sin\alpha = 1$ b) $\sin\alpha = 0$ c) $\cos\alpha = 1{,}2$ d) $\tan\alpha = -1$

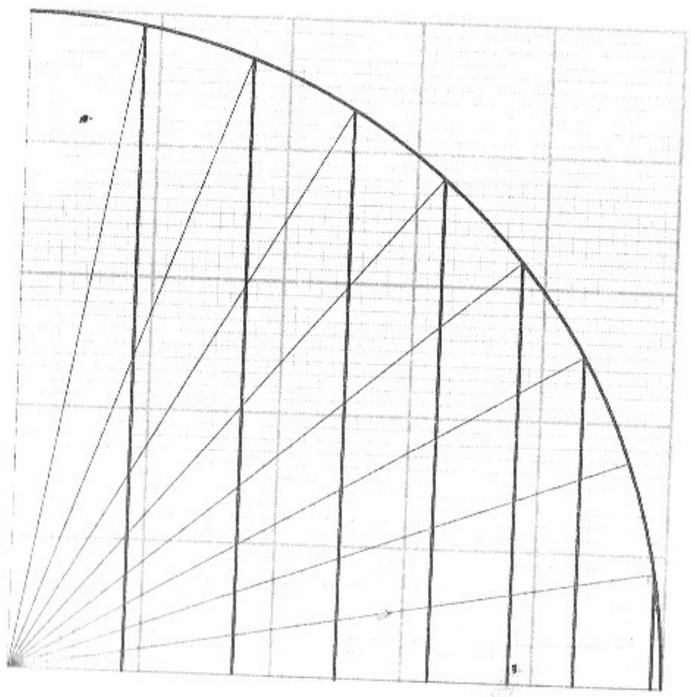
e) $\sin\alpha = 0{,}25$ f) $\cos\alpha = -1$ g) $\tan\alpha = 100$ $\sin\alpha + \cos\beta > 2$?

Kui leidub, siis leia nurkade väärtused.

701. Praktiline töö. Joonesta millimeetripaberile 90° kaar raadiusega 100 mm. Jaota see kaar malliga 9 võrdseks osaks. Jaotised järgnevad siis üksteisele iga 10° tagant. Saadud jaotuspunktide ühendamisel ringjoone keskpunktiga saame nurgad 10°, 20°, . . . , 80°.

Joonesta jaotuspunktidast lõigud x-teljele. Tekivad täisnurksed kolmnurgad. Mõõda nendes kolmnurkades lõikude pikkused ja täida nende abil järgmine tabel.

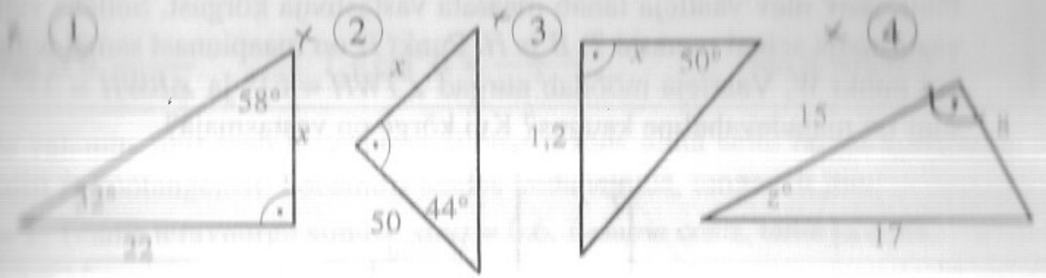
	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°
vastas-kaatet								
lähis-kaatet								
sin α								
cos α								
tan α								
cot α								

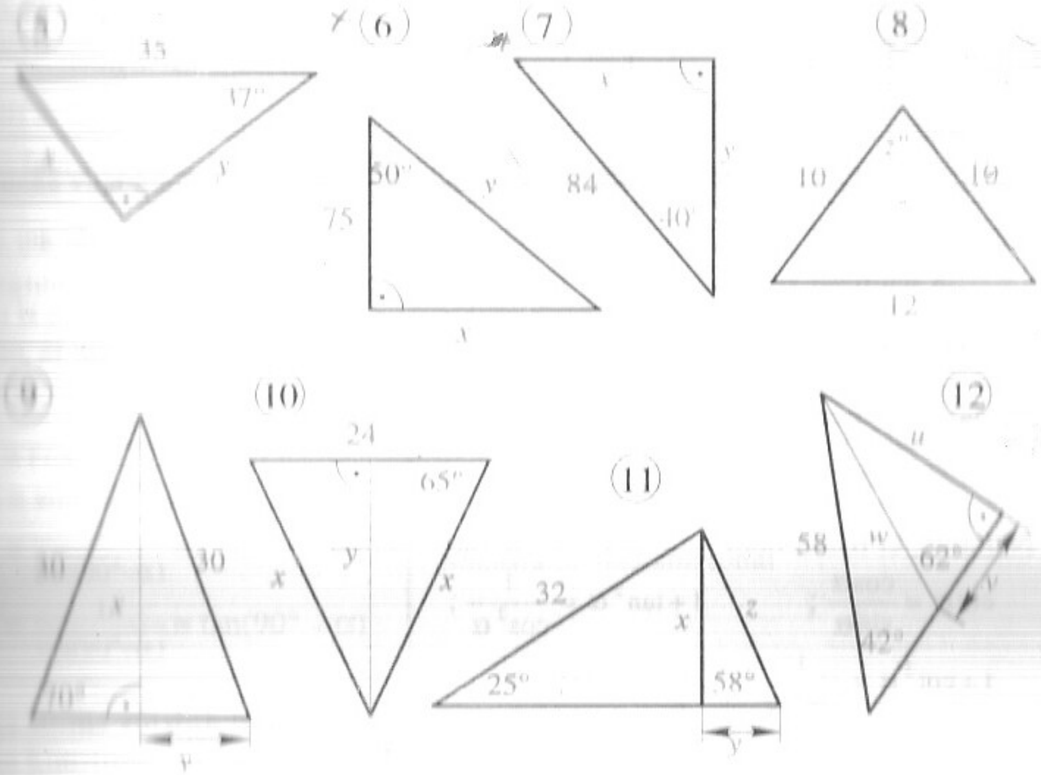


702. Trapetsi kolm külge on 2,8 cm pikkused, neljas külg on 4,2 cm. Leia trapetsi nurgad.

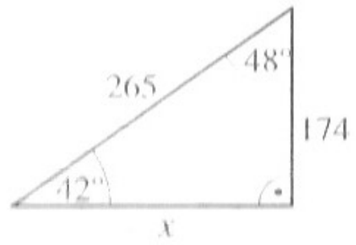
703. Seina najale on asetatud 6 m pikkune redel, nii et seina ja redeli vaheline nurk on 25°. Kui palju kõrgemale ulatuks redel siis, kui seina ja redeli vaheline nurk oleks 15°?

704. Leia tundmatu väärtused:





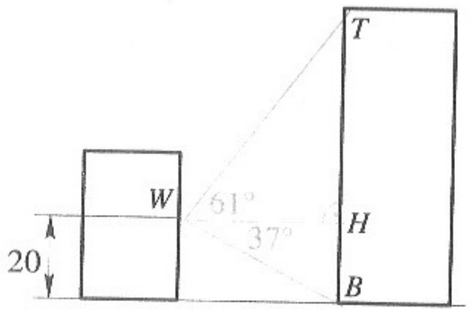
705. Leia x neljal erineval viisil:

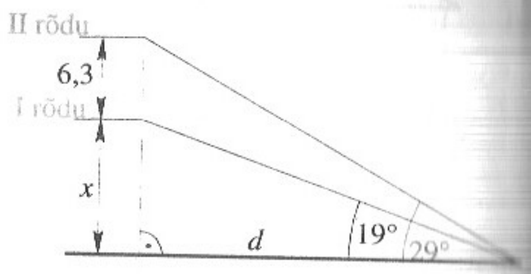


706. Tõesta, et kui meil on kolmnurk teravnurkadega α ja β ning külgedega a, b ja c (hüpotenuus), siis kehtib valem:

$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}$. Juhis: joonesta hüpotenuusile kõrgus.

707. Maja aknast (W) 20 m kõrguselt paistab teisel pool teed olev vastasmaja. Punktis W olev vaatleja tahab määrata vastasmaja kõrgust. Selleks valib ta vastasmaja seinal punktid T, B ja H. Punkt H on maapinnast samal kõrgusel kui punkt W. Vaatleja mõõdab nurgad $\angle TWH = 61°$ ja $\angle BWH = 37°$. Kui suur on majadevaheline kaugus? Kui kõrge on vastasmaja?





708. Lava eesäärelt paistab esimese rõdu äär 19° nurga all, teise rõdu äär, mis on esimese rõdu ääre kohal ja 6,3 m kõrgemal, paistab aga 29° nurga all horisontaaltasandiga. Leia joonisel märgitud suurused d ja x.

Põhikoolist teame, et täisnurkses kolmnurgas kehtivad seosed:

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ ja $\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$.

Näitame, et lisaks neile valemitele kehtivad valemid:

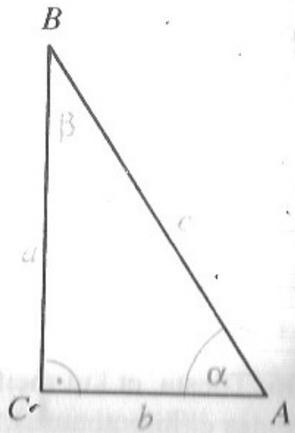
$\cot\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$; $\quad 1 + \tan^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$;

$1 + \cot^2\alpha = \dfrac{1}{\sin^2\alpha}$; $\quad \tan\alpha \cdot \cot\alpha = 1$.

Asendades $\sin\alpha = \dfrac{a}{c}$, $\cos\alpha = \dfrac{b}{c}$, $\tan\alpha = \dfrac{a}{b}$ ja $\cot\alpha = \dfrac{b}{c}$, saame:

$$\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\frac{b}{c}}{\frac{a}{c}} = \frac{b}{a} = \cot\alpha.$$

$$1 + \tan^2\alpha = 1 + \frac{a^2}{b^2} = \frac{b^2 + a^2}{b^2} = \frac{c^2}{b^2} = \frac{1}{\frac{b^2}{c^2}} = \frac{1}{\cos^2\alpha}.$$



Neid valemeid nimetatakse trigonomeetriliste funktsioonide vahelisteks seosteks. Jäta need meelde!

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ $\quad \tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ $\quad \cot\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$

$1 + \tan^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$ $\quad 1 + \cot^2\alpha = \dfrac{1}{\sin^2\alpha}$ $\quad \tan\alpha \cdot \cot\alpha = 1$.

Nende valemite abil saab teravnurga siinust teades leida selle nurga koosinust, tangensit ja kootangensit; koosinust teades leida siinust, tangensit jne.

Näide 1. Teame teravnurga siinust, $\sin\alpha = 0{,}6$. Leiame $\cos\alpha$, $\tan\alpha$ ja $\cot\alpha$.

$\cos\alpha = \sqrt{1 - \sin^2\alpha} = \sqrt{1 - 0{,}36} = \sqrt{0{,}64} = 0{,}8$.

$\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{0{,}6}{0{,}8} = 0{,}75$.

$\cot\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \dfrac{0{,}8}{0{,}6} = \dfrac{4}{3}$.

Kui oleks vaja leida ainult $\cot\alpha$, siis saab rakendada valemit

$1 + \cot^2\alpha = \dfrac{1}{\sin^2\alpha}$. Siit $\cot\alpha = \sqrt{\dfrac{1}{\sin^2\alpha} - 1} = \sqrt{\dfrac{1}{0{,}36} - 1} = \dfrac{4}{3}$.

Nurgad α ja β nimetatakse teineteise ***täiendusnurkadeks*** (90°-ni), kui $\alpha + \beta = 90°$. Teame, et täisnurkse kolmnurga teravnurgad on teineteise täiendusnurkadeks. Et $\beta = 90° - \alpha$, siis kehtivad valemid:

$\sin\alpha = \cos(90° - \alpha)$

$\cos\alpha = \sin(90° - \alpha)$

$\tan\alpha = \dfrac{1}{\tan(90° - \alpha)} = \cot(90° - \alpha)$

$\cot\alpha = \dfrac{1}{\cot(90° - \alpha)} = \tan(90° - \alpha)$

Neid valemeid (osa neist on tuttav juba põhikoolist) nimetatakse **täiendusnurga valemiteks.**
Sõnastame nad siinkohal:

nurga siinus võrdub selle nurga täiendusnurga koosinusega;
nurga koosinus võrdub selle nurga täiendusnurga siinusega;
nurga tangens võrdub selle nurga täiendusnurga kootangensiga;
nurga kootangens võrdub selle nurga täiendusnurga tangensiga.

887. α on teravnurk. Täida tabel.

α	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\tan\alpha$	$\cot\alpha$
30°				
		0,6		
			1,0	
	0,9			
		0,5		

710. Lihtsusta avaldis.

a) $\sin^2 14° + \sin^2 76°$ $\quad$ b) $\sin^2 30° + \cos^2 60°$

c) $\tan 16° \cdot \cot 16°$ $\quad$ d) $\sin 62° \cdot \tan 28°$

e) $\dfrac{1}{\tan^2 60° \cdot (1 + \tan^2 30°)}$ $\quad$ f) $\dfrac{\sin^2 57° - \cos^2 33°}{1 + \tan 78°}$

g) $\tan 20^\circ \dfrac{\sin 70^\circ}{\sin 20^\circ} - \sin 60^\circ \cos 30^\circ$

h) $\cos^2\alpha\,(1+\tan^2\alpha)$

i) $\dfrac{1-\sin^2\alpha}{1-\cos^2\alpha}$

j) $\dfrac{\cos^4\alpha-\sin^4\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}$

k) $\sin^2\alpha\,(1+\tan^2\alpha)$

l) $\dfrac{\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha}$

Mõnede nurkade siinuse, koosinuse ja tangensi väärtusi tuleb teada peast. Püüa leida võte, mis aitaks seda tabelit paremini meelde jätta!

	0°	30°	45°	60°	90°
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	puudub
$\cot\alpha$	puudub	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

Näide 2. Lahenda täisnurkne kolmnurk, kui kaatet $a = 30{,}0$ ja nurk $\beta = 24^\circ 30'$.

$$\cos\beta = \frac{a}{c} \Rightarrow c = \frac{a}{\cos\beta} = \frac{30{,}0}{\cos 24^\circ 30'} = 32{,}968 \approx 33{,}0$$

$$\tan\beta = \frac{b}{a} \Rightarrow b = a\cdot\tan\beta = 30{,}0 \cdot \tan 24^\circ 30' = 13{,}672 \approx 13{,}7$$

$\alpha = 90^\circ - \beta = 65^\circ 30'$.

711. Lahenda järgmised täisnurksed kolmnurgad.

	a	b	c	α	β	S
1.			12		42°	
2.			10	25°		
3.	20				66°	
4.	70			32°		
5.	32		40			
6.		10	26			
7.	6	9				
8.	7	24				
9.				78°		100
10.		15				125
11.				24°	36°	
12.			5			6
13.				86°		50

712. Vihmapiisad langevad vertikaalselt kiirusega 12 m/s ja paistavad trammiga sõitvale reisijale langevat 50° nurga all horisondiga. Leia, kui kiiresti sõidab tramm.

713. Kuidas leida geograafilisele laiusele φ vastava paralleeli pikkust? Arvuta Tallinna läbiva paralleeli pikkus ($\varphi = 59^\circ 30'$).

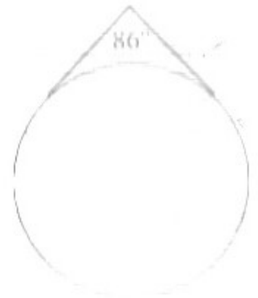
714. Kui palju aega kulub lennukil DC-10, et lennata ümber maakera polaarjoone kohal? Lennuki kiiruseks on 900 km/h, lennu kõrguseks 10 km ja polaarjoone laiuskraadiks on 66°30′.

715. Lagedal tasasel maal on kirik. Kirikutorni vari on 36 m pikk. Päikesekiired moodustavad maapinnaga nurga 42°. Kui kõrge on kirikutorn? Kui kaugele see kirikutorn võib paista?

716. Satelliidilt, mis on põhjanaba kohal, paistab maakera 86° nurga all

a) Määra satelliidi kaugus maapinnast;

b) millise laiuskraadini on näha maapinda satelliidilt?

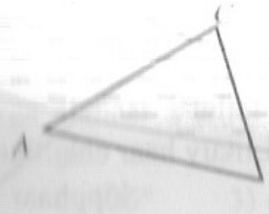


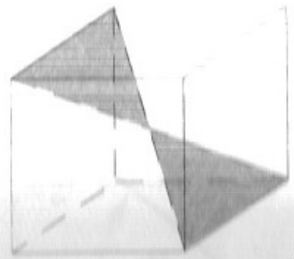
717. Võrdhaarse täisnurkse kolmnurga sisse on joonestatud maksimaalse suurusega ringjoon. Kolmnurga kaatetid on 10 cm. Leia ringjoone raadius ja ringi ning kolmnurga pindalade suhe.

718. Mida teeb järgmine arvutiprogramm? Millist teoreemi siin kasutatakse?

```
10 INPUT"Vaatleja kõrgus tasasest maapinnast",H
20 L=SQR((6380000+H)^2-6380000^2)
30 PRINT"Horisondi kaugus on ";L/100;"km."
40 END
```

719. Maamõõtja tahab leida kaugust punktidest A ja B ligipääsmatusse punkti C. Selleks mõõdab ta punktide A ja B vahelise kauguse ja kolmnurga ABC nurgad $\angle A$ ja $\angle B$. Leia AC ja BC, kui $AB = 142$ m, $\angle A = 53^\circ$ ja $\angle\beta = 61^\circ$.



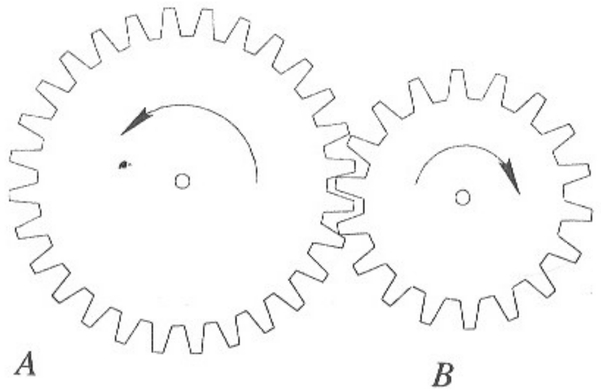


720. Leia nurk, mille all kuubi kaks diagonaali lõikuvad.

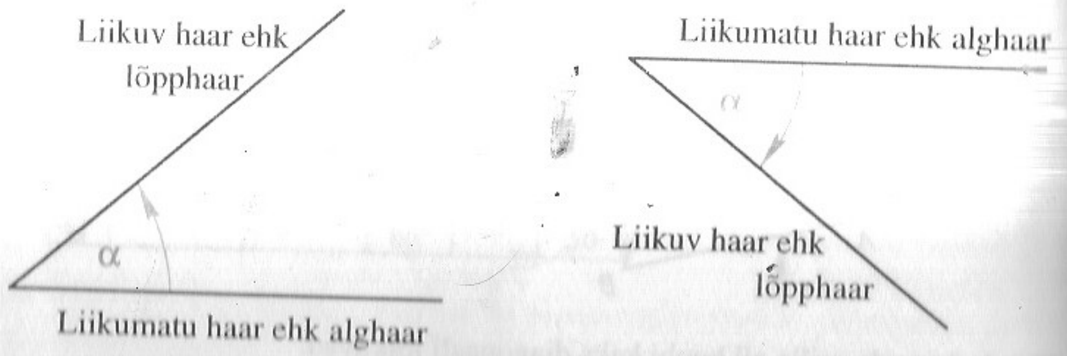
5.2. NURGA MÕISTE ÜLDISTAMINE. NURKADE LIIGITUS

Pöörlev liikumine võib toimuda ühes kahest vastupidisest suunast. Et inimeste vaheline infovahetus oleks üheselt mõistetav, on vaja kokku leppida, kuidas nimetada neid pöörlemissuundi. Tavaliselt võrreldakse meid huvitavat pöörlemise suunda mõne hästituntud pöörlemissuunaga (Päikese näiva liikumise suunaga põhjapoolkera taevavõlvil või kellaosutite liikumise suunaga). Kui pöörlemine toimub samas suunas Päikese liikumise suunaga taevavõlvil, siis öeldakse, et pöörlemine toimub päripäeva, vastupidisel juhul öeldakse, et pöörlemine toimub vastupäeva.

Matemaatikas nimetatakse vastupäeva (kellaosutile vastupidist) pöörlemise suunda **positiivseks pöörlemissuunaks** ning päripäeva (kellaosutite suunalist) pöörlemise suunda **negatiivseks pöörlemissuunaks**. Näiteks joonisel olev hammasratas *A* pöörleb positiivses, hammasratas *B* negatiivses suunas.



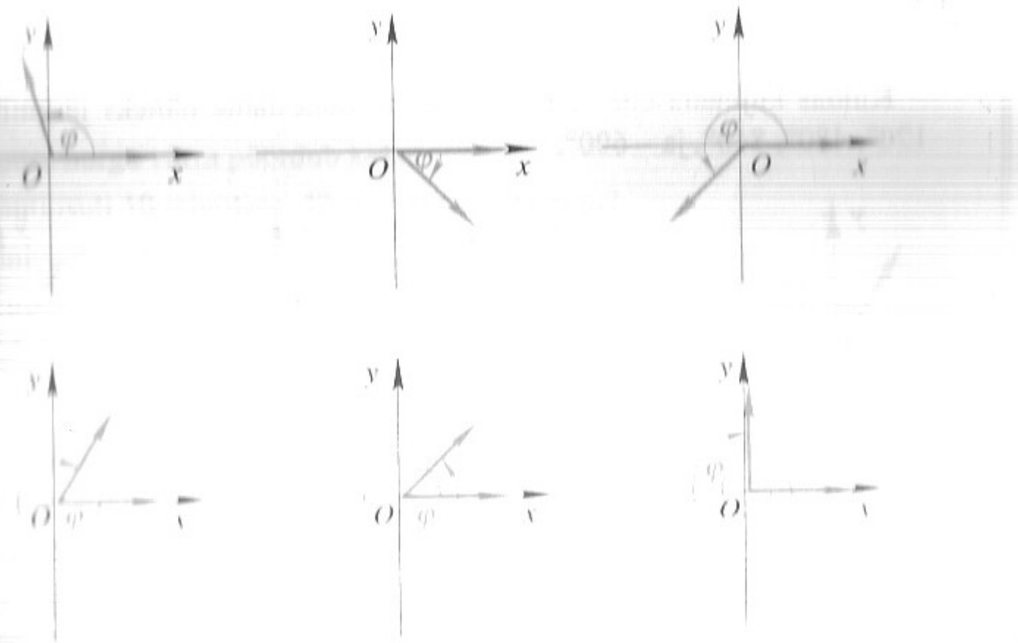
Edaspidi vaatleme nurka kujundina, mis on tekkinud kiire (haara) pöörlemisel ümber oma alguspunkti. Kiire asendit, millest algab pöörlemine, nimetatakse nurga **alghaaraks** ehk **liikumatuks haaraks**, ning kiire lõppasendit, kus lõppeb kiire pöörlemine, nimetatakse nurga **lõpphaaraks** ehk **liikuvaks haaraks**.



Positiivne nurk tekib kiire pöörlemisel positiivses suunas, **negatiivne nurk** kiire pöörlemisel negatiivses suunas. Kui on vaja eristada positiivseid ja negatiivseid nurki, siis märgitakse nurgale kaarekese ja noole abil pöörlemise suund. Negatiivse nurga korral kirjutatakse nurga suurust väljendava arvu ette miinusmärk. Nurkade märkimisel joonisel võetakse ja tähistatakse tavaliselt nurga algharr *x*-telje positiivsel suunal.

741. Millises suunas
1) tuleb pöörata kraani, et vesi jooksma hakkaks;
2) pöörleb Maa, vaadatuna põhjapoolkera kohalt;
3) jooksevad jooksjad staadionil;
4) tuleb pöörata puukruvi, et see puu sisse läheks;
5) liiguvad autod ringliiklusega väljakul;
6) tuleb pöörata auto käivitamiseks vänta;
7) näeb vaatleja pöörlevat paremalt vasakule mööduva sõiduki rattaid;
8) on nummerdatud tasandil oleva koordinaatteljestiku veerandid?

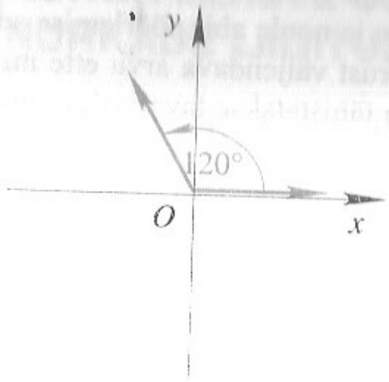
743. Leia nurga suurus silma järgi ja malliga mõõdetuna. Leia tekkinud absoluutne ja relatiivne viga.

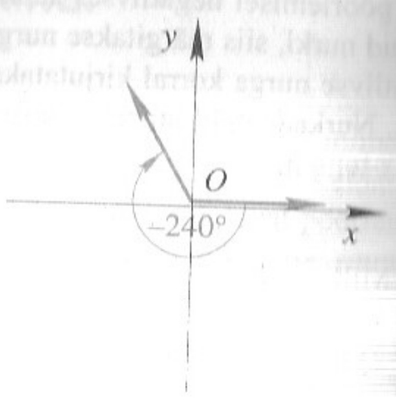


744. Võta nurga alghaar *x*-teljel ja joonesta nurgad silma järgi. Kontrolli töö õigsust malliga.

1) 45° 2) 135° 3) – 135° 4) 315° 5) – 30° 6) 225°
7) – 60° 8) 270° 9) – 120° 10) 360° 11) – 180° 12) 22,5°

Vaatleme näiteks kahte nurka, neist üks olgu + 120°, teine – 240°:





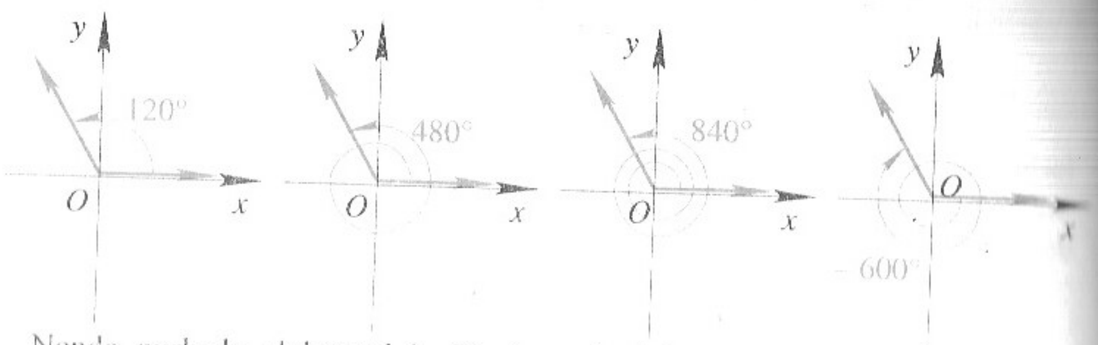
Kuigi märgime neid nurki erinevalt, on neil ühine alghaar ja ühine lõpphaar. Juhul kui pöörlemissuund ei ole meie jaoks tähtis, võime need nurgad samastada.

Seni vaatlesime nurki α, mille korral

$-360° \leqslant \alpha \leqslant 360°$.

Pöörlemise juures, aga ka paljude muude küsimuste lahendamisel tuleb puutuda kokku nurkadega, mis on suuremad kui 360° (või väiksemad kui – 360°). Näiteks korrapärase n-nurga sisenurkade summa on suurem kui 360°, niipea kui $n \geqslant 5$[1].

Kuidas kujutada ette selliseid nurki? Joonestame näiteks järgmised nurgad: 120°, 480°, 840°, ja – 600°.



Nende nurkade alghaarad ja lõpphaarad ühtivad ja kõik need nurgad on esitatavad kujul $120° + n \cdot 360°$, kus $n \in \mathbb{Z}$.

$120° = 120° + 0 \cdot 360°$
$480° = 120° + 1 \cdot 360°$
$840° = 120° + 2 \cdot 360°$
$-600° = 120° + (-2) \cdot 360°$

[1] Seda summat arvutatakse valemiga $(n-2) \cdot 180°$.

Üldiselt, **iga nurka x saab esitada kujul $x = \alpha + n \cdot 360°$, kus $0° \leqslant \alpha < 360°$ ja $n \in \mathbb{Z}$.**

Kuidas teisendada nurka, mille väärtus ületab täispöörde, niisugusele kujule? Vaatame näiteks positiivse nurga 2370° ja negatiivse nurga – 820°.

a) $2370 : 360 = 6$, jääk 210, siis

$2370° = 210° + 6 \cdot 360°$.

b) $-820 : 360 = -2$, jääk -100, siis

$-820° = -100° + (-2) \cdot 360°$.

Viimase võrduse paremale poolele liidame ja lahutame 360°. Saame

$-820° = (-100° + 360°) + [(-2) \cdot 360° - 360°] = 260° + (-3) \cdot 360°$.

734. Konstrueeri nurk.

1) 420° 2) – 420° 3) 855° 4) – 495° 5) 1800°
6) 690° 7) 780° 8) – 2000° 9) – 675° 10) 540°

735. Väljenda nurk kujul $\alpha = n \cdot 360°$, kus $n \in \mathbb{Z}$ ja $0° \leqslant \alpha < 360°$.

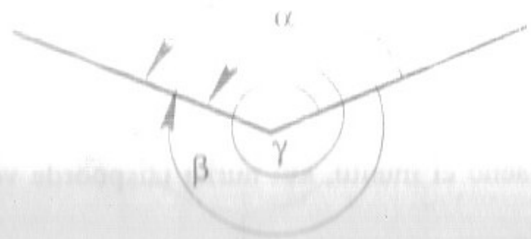
1) 1994° 2) 189° 3) – 111° 4) 1200° 5) 3820°
6) – 858° 7) – 1000° 8) – 2520° 9) – 360° 10) 357°

736. Kui suure nurga võrra pöördub kella

a) minutiosuti 10 minutiga, 42 minutiga, 3 tunniga?
b) tunniosuti 9 tunniga, 24 tunniga, 7 tunniga?
c) sekundiosuti 59 sekundiga, 1 tunniga, 1 ööpäevaga?

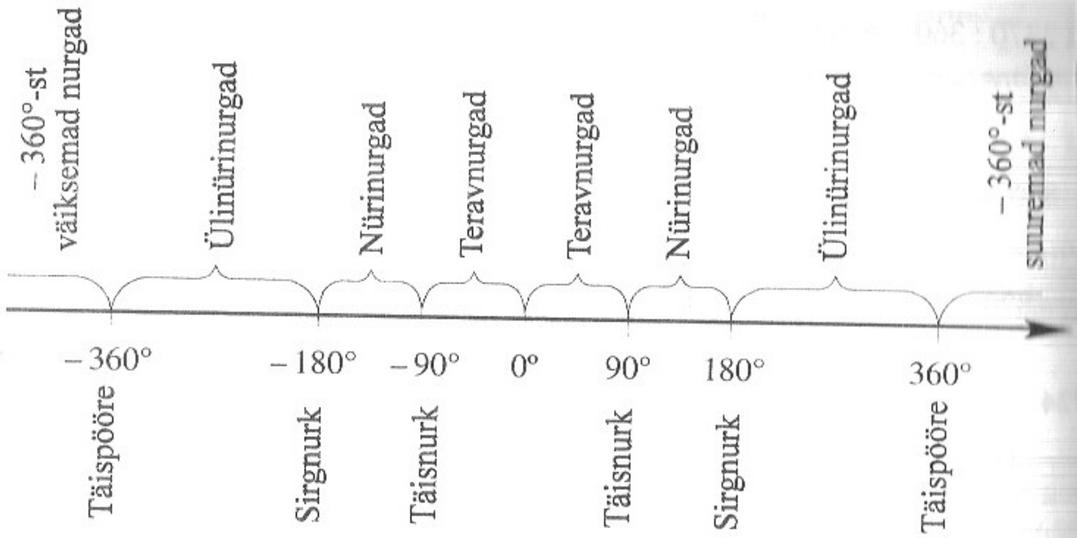
737. Leia kumera viisnurga, kuusnurga, kaheksanurga ja kaksteistnurga sisenurkade summa.

738. Leia joonisel esitatud nurgad β ja γ, kui $\alpha = 146°$.



Nurki saab liigitada mitmel viisil. Tulemus sõltub sellest, milline tunnus või omadus on võetud liigituse aluseks.

1. Kui me võrdleme antud nurka nurkadega ± 90°, ±180°, ±360° (s.o. võrdleme antud nurka täisnurgaga, sirgnurgaga ja täispöördega), siis võib liigituse tulemused esitada nii, nagu on tehtud alloleval joonisel:



2. Kui paigutada nurk koordinaattasandile nii, et nurga tipp oleks koordinaatide alguspunktis ja alghaar oleks x-telje positiivse osa peal, siis võib liigitada nurki selle järgi, kus paikneb lõpphaar. Lõpphaar võib asuda mõnel poolteljel või ühes neljast veerandist. Olenevalt sellest, millises veerandis asub nurga lõpphaar, nimetatakse nurka esimese, teise, kolmanda või neljanda veerandi nurgaks. Selline liigitus peab paika nii positiivsete kui ka negatiivsete nurkade korral. Näiteks on nurgad 120° ja – 210° mõlemad II veerandi nurgad. (vt. joonist).

Et nurga lõpphaara asend ei muutu, kui nurka täispöörde võrra suurendada või vähendada, siis

nurk $\alpha + n \cdot 360°$ ($n \in \mathbb{Z}$) on sama veerandi nurk, mis nurk α.

Järeldub, nurk $x = \alpha + n \cdot 360°$, kus $n \in \mathbb{Z}$, on
I veerandi nurk, kui $0° < \alpha < 90°$;
II veerandi nurk, kui $90° < \alpha < 180°$;
III veerandi nurk, kui $180° < \alpha < 270°$;
IV veerandi nurk, kui $270° < \alpha < 360°$.

Näide 1. Millise veerandi nurk 1676°? – 2130°?

Et $1676° = 236° + 4 \cdot 360°$ ja nurk 236° on III veerandi nurk ($180° < 236° < 270°$), siis ka nurk 1676° on III veerandi nurk.

Et $-2135° = 25° - 6 \cdot 360°$ ja nurk 25° on I veerandi nurk ($0° < 25° < 90°$), siis ka nurk $-2135°$ on I veerandi nurk.

1. Nurki võib jaotada pöörlemissuuna järgi. Nii jagunevad nurgad positiivseteks, negatiivseteks ja nullkraadilisteks.

2. Leia iga nurga korral, mitmenda veerandi nurk ta on.

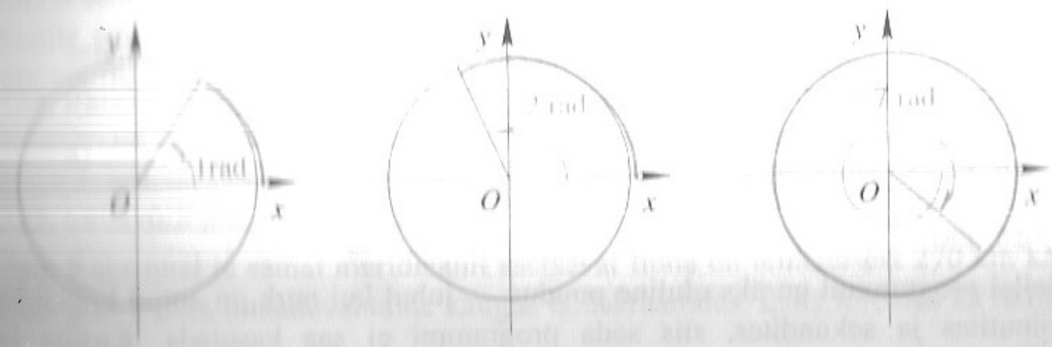
1) 300° 2) 440° 3) 140° 4) 205° 5) 265° 6) 315°
7) 825° 8) 2500° 9) 1732° 10) 1654° 11) 1978° 12) 3000°
13) – 120° 14) – 1500° 15) – 275° 16) – 843° 17) – 2748° 18) – 435°

8.3. NURGA KRAADI- JA RADIAANMÕÕT

Elementaargeomeetrias ja geodeesias kasutatakse nurga mõõtühikuna kraadi. Kõrgemas matemaatika osades ja mehaanikas ei ole kraadimõõdu kasutamine otstarbekas. Seal kasutatakse nurkade mõõtmisel radiaanmõõtu. Radiaanmõõdu ühikut nimetatakse **radiaaniks**.

Radiaan on kesknurk, mis toetub raadiuse pikkusele kaarele.

Radiaani tähistatakse sümboliga 1 rad; vahel jäetakse ka radiaani ühik märkimata.



Kaar on raadiuse pikkune

Kaare pikkus on kaks raadiust

Kaare pikkus on seitse raadiust

Et ringi ümbermõõt on $2\pi r$, siis täispöördes on $\frac{2\pi r}{r} = 2\pi$ rad $\approx 6{,}28$ rad. Et täispöördes on 360°, siis $360° = 2\pi$ rad.

Viimase võrduse jagamisel kahega saame:

$$180° = \pi \text{ rad}$$

Seda valemit nimetatakse seoseks kraadi- ja radiaanmõõdu vahel. Avaldades sealt

$$1° = \frac{\pi}{180°} \text{ rad} \approx 0{,}017453 \text{ rad},$$

$$1 \text{ rad} = \frac{180°}{\pi} \approx 57°17'44{,}8''.$$

Näide 1. Avaldame nurga 84° radiaanides ja nurga 2,8 rad kraadides.

Et $1° = \frac{\pi}{180°}$ rad, siis $84° = 84 \cdot \frac{\pi}{180°}$ rad $\approx 1{,}467$ rad.

Et 1 rad $= \frac{180°}{\pi}$, siis $2{,}8 \text{ rad} = 2{,}8 \cdot \frac{180°}{\pi} \approx 160{,}43° \approx 160°26'$.

Esitame järgnevalt tabeli, milles on mõned esimese täispöörde tähtsamad nurgad antud nii kraadides kui ka radiaanides.

Kraadimõõdus	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
Radiaanmõõdus	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π

Jäta see tabel meelde!

Taskuarvuti kasutamine ei erine radiaanmõõdu korral oluliselt taskuarvuti kasutamisest kraadimõõdu korral. Tuleb ainult jälgida, et arvutused toimuksid radiaani režiimis. Sinna üleminekuks on paljudel kalkulaatoritel klahv või lüliti kirjaga RAD.

Paljudel arvutitel on siis, kui me arvutame radiaanmõõdus, vastav kiri (RAD) ka arvuti tablool nähtav.

Personaalarvutid kasutavad trigonomeetriliste funktsioonide väärtuste leidmisel radiaanmõõtu. Seetõttu on vaja kraadimõõdus antud nurgad enne siinuse, koosinuse ja tangensi leidmist teisendada radiaanmõõtu. Järgmine programmilõik teebki seda:

```
10 INPUT"Sisesta nurga suurus kraadimõõdus";K
20 R=(K/180)*3.141593
30 PRINT "See nurk on"radiaanmõõdus ";R;" radiaani."
40 END
```

Sellel programmil on üks oluline puudus — juhul kui nurk on antud kraadides, minutites ja sekundites, siis seda programmi ei saa kasutada. Kirjuta ise programmilõik, mis võimaldaks teisendada nurka radiaanmõõtu, kui see on antud kraadides, minutites ja sekundites.

730. Joonesta koordinaatteljestik. Märgi selles järgmised nurgad ja leia nende suurused radiaanides.
a) 0°, 45°, 90°, 135°, 180°, 225°, 270°, 315°;
b) 30°, 60°, 90°, 120°, 150°, . . . , 360°.

731. Esita nurk kraadimõõdus (1′ täpsusega).
1) π rad 2) $\frac{5}{3}\pi$ rad 3) $\frac{3}{4}\pi$ rad 4) $\frac{7}{6}\pi$ rad 5) $\frac{2}{3}\pi$ rad
6) $\frac{3}{5}\pi$ rad 7) $-\frac{8}{5}\pi$ rad 8) $\frac{34}{15}\pi$ rad 9) $-\frac{37}{18}\pi$ rad 10) $-\frac{5}{18}\pi$ rad
11) 2 rad 12) 1,4 rad 13) 0,75 rad 14) 20 rad 15) 0,16 rad
16) 3,14 rad 17) $-\frac{2}{7}\pi$ rad 18) $4{,}6\pi$ rad 19) 6,28 rad 20) 1,27 rad

732. Avalda nurk radiaanides π abil.
1) 90° 2) 120° 3) 150° 4) 315° 5) 72° 6) 80° 7) −75°
8) −25° 9) 435° 10) 380° 11) 110° 12) −840° 13) 720° 14) 540°

733. Avalda radiaanides.
1) 128° 2) 57°17′ 3) 121°40′ 4) 25°15′ 5) −1°
6) 67°30′ 7) −310°15′ 8) 250°10′ 9) 76°30′ 10) 44,4°

734. Laevakompassi ringjoon jaotatakse 32 võrdseks osaks — rumbiks. Leia ühe rumbi suurus kraadides ja radiaanides.

735. Leia kolmnurga nurgad radiaanides, kui nad suhtuvad nagu 2 : 3: 4.

736. Kumb on suurem, kas
1) sin 1 või cos 1 2) sin 1 või 1 3) sin 1 või sin 1°
4) tan 1 või 1 5) cos 1 või tan 1 6) tan 5 või tan 5°
7) sin 1 või sin 2 8) cot 3 või cot 2 9) cos 0 või cos 0°
Põhjenda.

737. Tuntud füüsikamõiste *nurkkiirus* defineeritakse kui pöördenurga ja pöördeks kulunud aja suhe: $\omega = \frac{\varphi}{t}$. Et nurka mõõdetakse radiaanides ja aega sekundites, siis nurkkiiruse ühikuks on $\frac{\text{rad}}{\text{s}}$. Leia kella tunni-, minuti- ja sekundiosuti nurkkiirus.

738. Ratas teeb minutis 48 pööret. Leia ratta pöörlemise nurkkiirus
a) $\frac{\text{rad}}{\text{min}}$, b) $\frac{\text{rad}}{\text{s}}$.

739. Leia võlli pöörlemise nurkkiirus, kui võll teeb 25 pööret sekundis.

740. Kaks ühel ja samal meridiaanil asetsevat linna on teineteisest 270 km kaugusel. Leia linnadevaheline kaugus laiuskraadides. Esita tulemus ka radiaanides.

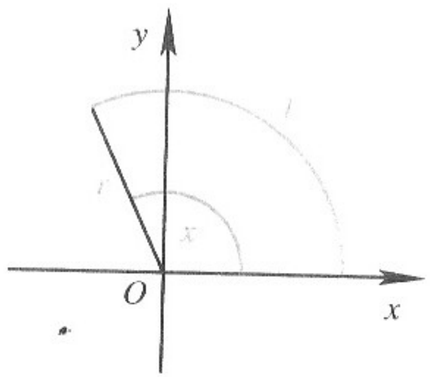
741. Kella minutiosuti on 12 mm pikk. Kui pika tee läbib osuti tipp 20 minuti jooksul?

742. Leia Maa purkkiirus ja joonkiirus tiirlemisel ümber Päikese. Maa orbiidi raadiuseks võta $1{,}5 \cdot 10^8$ km.

743. Autoratta läbimõõt koos rehviga on 56 cm. Leia, mitu pööret teeb ratas ühes sekundis, kui auto sõidab kiirusega 80 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$.

5.4. RINGJOONE KAARE PIKKUS JA SEKTORI PINDALA

Vaatleme ringi sektorit, mille kesknurk on x radiaani. Ringi raadius olgu r.



Lähtudes radiaanmõõdu määratlusest saame, et sellele ringi sektorile vastava kaare pikkus on rx, s.t.

$$l = rx$$

kus l on ringjoone kaare pikkus.

Kaare pikkus võrdub kaare raadiuse ja radiaanides mõõdetud kesknurga suuruse korrutisega.

Et selle sektori pindala on $\frac{l}{2\pi r}$ kogu ringi pindalast, siis

$$S = \frac{l}{2\pi r} \cdot \pi r^2 = \frac{1}{2} rl = \frac{1}{2} xr^2.$$

$$S = \frac{1}{2} xr^2$$

Sektori pindala võrdub tema radiaanides mõõdetud nurga suuruse ja raadiuse ruudu poole korrutisega.

Näide. Olgu kesknurk 2,5 rad ja ringi raadius 3,6 m. Leiame sellele kesknurgale vastava kaare pikkuse ja sektori pindala.

$l = rx = 3{,}6 \cdot 2{,}5 = 9{,}0$ m.

$S = \frac{1}{2} xr^2 = \frac{1}{2} \cdot 2{,}5 \cdot 3{,}6^2 = 16{,}2$ m^2.

Olgu kesknurk antud kraadides, näiteks $\angle x = n^\circ$.

Kasutame võrdust $1^\circ = \frac{\pi}{180}$ rad ning saame $n^\circ = \frac{\pi \cdot n}{180}$ rad.

Asendades selle väärtuse varem saadud kaarepikkuse ja sektori pindala valemitesse, saame

$l = rx = \frac{\pi \cdot n \cdot r}{180}$ ja

$S = \frac{1}{2} xr^2 = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot n}{360}$.

Näide. Ringi raadius on 3,6 cm. Kesknurga suurus on 25°. Leiame sellele kesknurgale vastava kaare pikkuse ja sektori pindala.

$l = \frac{\pi \cdot n \cdot r}{180} = \frac{\pi \cdot 25 \cdot 3{,}6}{180} = \frac{\pi}{2}$ cm $\approx 1{,}57$ cm.

$S = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot n}{360} = \frac{\pi \cdot 3{,}6^2 \cdot 25}{360} = \frac{9\pi}{10}$ cm $\approx 2{,}83$ cm.

744. Arvuta raadiuse ja kesknurga järgi kaare pikkus ja sektori pindala.

1) $r = 18{,}1$ dm	$\alpha = 240^\circ$	2) $r = 5{,}2$ cm	$\alpha = 324^\circ$
3) $r = 1$ m	$\alpha = 57^\circ 17' 45''$	4) $r = 36{,}4$ cm	$\alpha = 136^\circ 18'$
5) $r = 0{,}81$ dm	$\alpha = 67^\circ 05'$	6) $r = 1{,}2$ m	$\alpha = 60^\circ$
7) $r = 18$ m	$\alpha = \frac{5}{6}\pi$	8) $r = 1$ m	$\alpha = \frac{3\pi}{4}$
9) $r = 10$ dm	$\alpha = \frac{3\pi}{2}$	10) $r = \pi$ cm	$\alpha = 4$
11) $r = \sqrt{3}$ m	$\alpha = 2$	12) $r = \sqrt{3}$ dm	$\alpha = 1{,}2$

745. Leia selline kesknurk, millele vastav kaar võrdub

a) kahekordse raadiusega
b) kolmekordse raadiusega
c) 2π kordse raadiusega
d) π kordse raadiusega.

746. Täida tabel.

	r	l	S
240°	4		
	8	3,84	
18°			31,4
1,2			15
48°	12		
0,32		2,6	

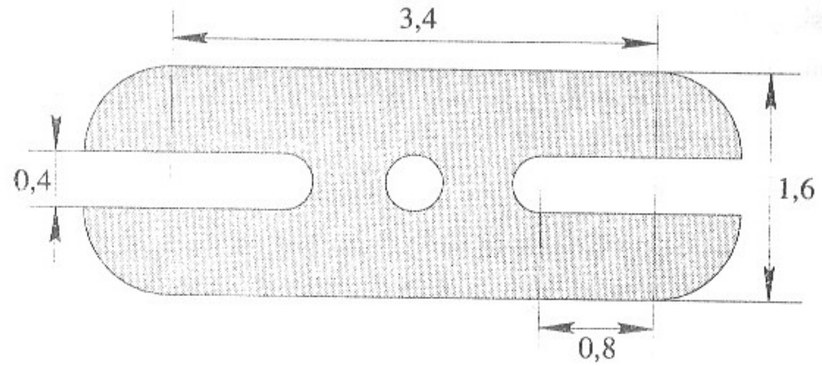
747. Avalda sektori pindala sektori kaare pikkuse ja raadiuse abil. Võrdle tulemust kolmnurga pindala valemiga.

748. Hammasratta diameeter on 6,6 dm. Ratta kahe hamba keskkohtade vahe mööda kaart on 34,5 mm. Mitu hammast on hammasrattal?

749. Ringjoone raadius on 32,6 cm. Arvuta kaare pikkus, kui sellele kaarele toetub 56 cm pikkune kõõl.

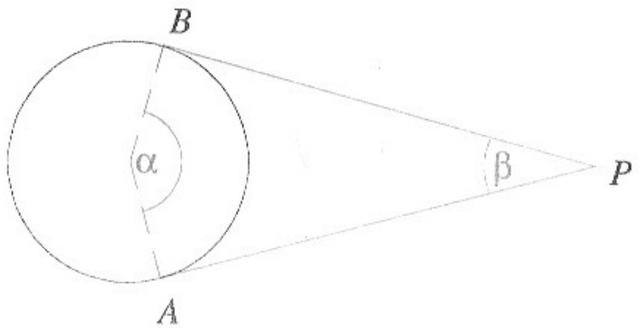
750. Raudtee kurvi kõverusraadius on 456 m. Leia, kui pikk on kurv, kui vastav kesknurk on 1,31 rad.

751. Leia joonisel kujutatud tihendi pindala (kõik mõõtmed on antud millimeetrites).

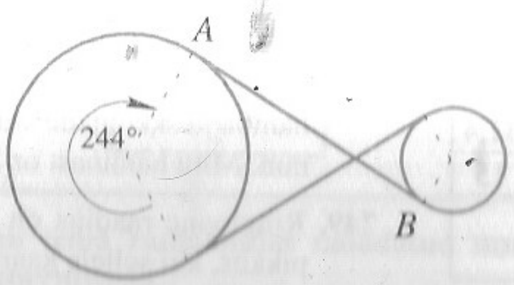


752. Vedur liigub ringjoone kaare kujulises kurvis kiirusega 24,14 km/h ja muudab 15 sekundi jooksul oma liikumissuunda 24° võrra. Leia kurvi raadius.

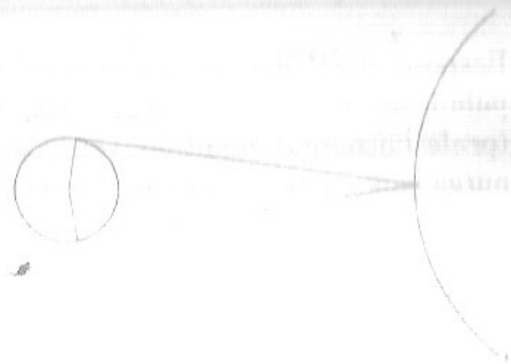
753. Ringjoon paistab punktist P nurga β all. Nurk α on kesknurk, mis toetub punktide A ja B vahelisele kaarele. (vt. joonist). Kuidas on seotud omavahel nurgad α ja β?



754. Leia veorihma pikkus, kui rihmaseibide diameetrid on vastavalt 48 cm ja 18 cm, rihm hõlmab seibi 244° nurga all ja kahe seibi vahelise rihmaosa AB pikkus on 1,4 m.(vt. joonist).

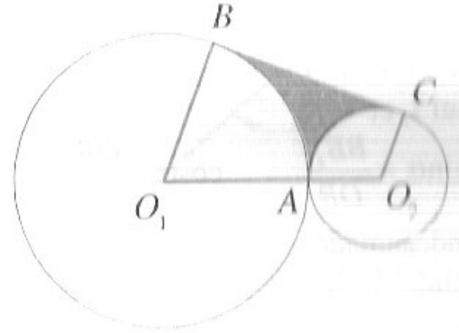


755. Kuu, mis on Maast $3{,}86 \cdot 10^8$ m kaugusel, paistab Maalt nurga all $9 \cdot 10^{-3}$ radiaani. Määra ligikaudselt Kuu diameeter.

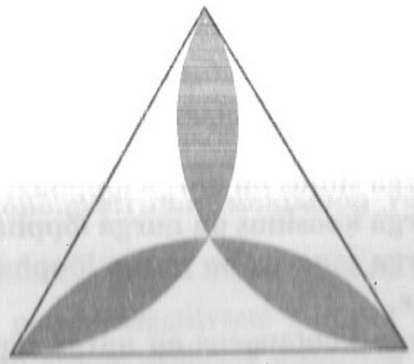


756. Maa raadius on 6370 km. Tallinna laiuskraad on 59,4°. Kui kiiresti liigub Tallinn Maa pöörlemisel ümber oma telje?

757. Kaks ringjoont raadiustega 3 cm ja 1 cm puutuvad väliselt punktis A. Neile on tõmmatud ühine puutuja BC. Leia puutuja ja ringjoonte vahele jääva kujundi ABC pindala.

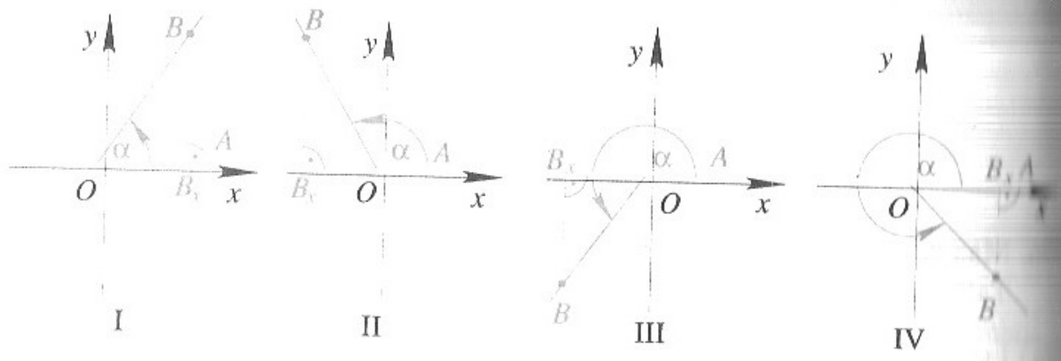


758. Võrdkülgse kolmnurga sisse on ringjoonte kaarte abil joonestatud rosett. Kolmnurga külg on a. Leia roseti pindala.



5.5. MISTAHES NURGA TRIGONOMEETRILISED FUNKTSIOONID

Eespool antud nurgafunktsioonide definitsioonid kehtivad ainult teravnurk puhul, sest täisnurkses kolmnurgas, mille abil need definitsioonid anti, esine (peale täisnurga) ainult teravnurgad. Et defineerida nurgafunktsioone mista nurga jaoks, selleks toimime järgmiselt:



Joonestame teljestikku mistahes positiivse nurga $\angle AOB$ (vt. ülalolevaid jo niseid I, II, III ja IV), nii, et alghaar OA oleks x-telje positiivsel osal, lõpphaa kuuluks ühte neljast veerandist. Punkti B valime lõpphaaral vabalt. Punktist B ehitame ristlõigu BB_x x-teljele.

Varem antud trigonomeetriliste funktsioonide definitsioonide kohaselt saame juhul I, et

$$\sin\alpha = \frac{BB_x}{OB} \qquad \cos\alpha = \frac{OB_x}{OB} \qquad \tan\alpha = \frac{BB_x}{OB_x} \qquad \cot\alpha = \frac{OB_x}{BB_x}.$$

Nendesamade võrdustega defineerime trigonomeetrilised funktsioonid ka juhtudel II, III ja IV.

Sirglõigud BB_x ja OB_x on juhul I nurga α vastaskaatetiks ja lähiskaatetiks, ei ole seda aga juhtudel II, III ja IV. Kuidas siis neid lõike nimetada?

Lõik BB_x on kõigil neljal juhtumil ***nurga lõpphaara punkti B y-koordinaat ehk ordinaat***, lõik OB_x ***nurga lõpphaara punkti B x-koordinaat ehk abstsiss***. Lõik OB kujutab endast punkti B kaugust koordinaatide alguspunktist. Lühiduse mõttes nimetame seda lõiku edaspidi ka *raadiuseks*.

Kasutades neid nimetusi saame järgmised üldised trigonomeetriliste funktsioonide definitsioonid:

Nurga siinus on nurga lõpphaara punkti y-koordinaadi ja raadiuse suhe.
Nurga koosinus on nurga lõpphaara punkti x-koordinaadi ja raadiuse suhe.
Nurga tangens on nurga lõpphaara punkti y-koordinaadi ja x-koordinaadi suhe.
Nurga kootangens on nurga lõpphaara punkti x-koordinaadi ja y-koordinaadi suhe.

Tähistades lõigu OB pikkuse tähega r, lõpphaara punkti x-koordinaadi tähega x ja y-koordinaadi tähega y, võime kirjutada:

$$\sin\alpha = \frac{y}{r} \qquad \cos\alpha = \frac{x}{r} \qquad \tan\alpha = \frac{y}{x} \qquad \cot\alpha = \frac{x}{y}$$

Kui punkti B valisime nurga lõpphaaral vabalt, siis nende funktsioonide väärtused ei sõltu lõigu OB pikkusest.

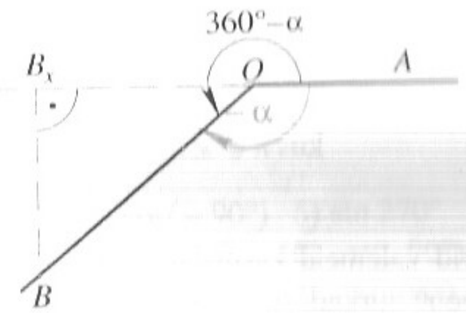
Kui $x = 0$, siis puudub $\tan\alpha$ väärtus. Lõpphaara punkt B on siis y-telje peal. Siis nurk $\alpha = (2k + 1)\frac{\pi}{2}$, kus $k \in \mathbb{Z}$.

Kui $y = 0$, siis puudub $\cot\alpha$ väärtus. Sel juhul on lõpphaara punkt B x-telje peal. Siis nurk $\alpha = k \cdot \pi$, kus $k \in \mathbb{Z}$.

$\tan\alpha$ väärtus puudub, kui $\alpha = (2k + 1)\frac{\pi}{2}$, kus $k \in \mathbb{Z}$.

$\cot\alpha$ väärtus puudub, kui $\alpha = k \cdot \pi$, kus $k \in \mathbb{Z}$.

Kui vaadeldav nurk on negatiivne, siis kasutatakse selle nurga funktsioone täpselt samuti nagu positiivse nurga puhul. (vt. joonist).



$$\sin(-\alpha) = \frac{BB_x}{OB} \qquad \cos(-\alpha) = \frac{OB_x}{OB} \qquad \tan(-\alpha) = \frac{BB_x}{OB_x} \qquad \cot(-\alpha) = \frac{OB_x}{BB_x}$$

Samad jagatised on aga ühtlasi positiivse nurga $360° - \alpha$ funktsioonid, järelikult

$$\sin(-\alpha) = \sin(360° - \alpha)$$
$$\cos(-\alpha) = \cos(360° - \alpha)$$
$$\tan(-\alpha) = \tan(360° - \alpha)$$
$$\cot(-\alpha) = \cot(360° - \alpha)$$

Seega, nurga $-\alpha$ mistahes nurga trigonomeetriline funktsioon võrdub nurga $360° - \alpha$ sellesama funktsiooniga.

Selle seose tõttu ei ole meil vaja eraldi uurida negatiivsete nurkade funktsioone, sest iga negatiivse nurga funktsiooni saame avaldada positiivse nurga funktsioonina.

Näited.

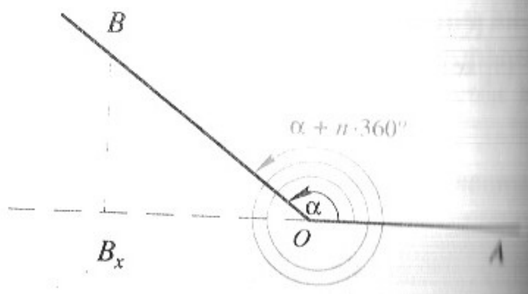
$\tan(-218°) = \tan(360° - 218°) = \tan 142°$
$\cos(-314°) = \cos(360° - 314°) = \cos 46°$

Ka siis, kui nurk ületab 360°, jäävad kehtima funktsioonide $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\tan\alpha$ ja $\cot\alpha$ eeltoodud definitsioonid. Seejuures saab kõikide nende nurkade funktsioone avaldada 360°-st väiksemate nurkade funktsioonide abil. Kui meil on mingi positiivne või negatiivne nurk $\angle AOB$, mille absoluutväärtus on 360°-st suurem, siis liites või lahutades sellest nurgast sobiv arv korda 360°, saame sellise esimese täispöörde nurga, mille lõpphaar langeb kokku nurga $\angle AOB$ lõpphaaraga. Et definitsioonides on juttu ainult lõpphaara x-koordinaadist ja y-koordinaadist, siis võib öelda, et

nurga trigonomeetrilise funktsiooni väärtus ei muutu nurga kasvamisel või kahanemisel 360° või selle kordse võrra.

Seda tõsiasja võib esitada järgmiselt:

$\sin(\alpha + n\cdot 360°) = \sin\alpha$
$\cos(\alpha + n\cdot 360°) = \cos\alpha$
$\tan(\alpha + n\cdot 360°) = \tan\alpha$
$\cot(\alpha + n\cdot 360°) = \cot\alpha$
kus $n \in \mathbb{Z}$.



Neid valemeid kasutatakse siis, kui meil on vaja leida trigonomeetrilisi funktsioone nurkadest, mis on absoluutväärtuselt üle 360°.

Näited.

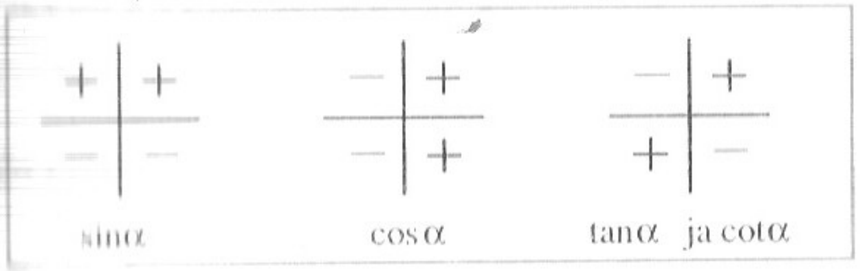
$\cos(1714°) = \cos(4\cdot 360° + 274°) = \cos 274°$
$\tan(-2548°) = \tan(-8\cdot 360° + 332°) = \tan 332°$.

Trigonomeetrilised funktsioonid nurkadest, mis on üle 360°, taandatakse esimese täispöörde nurkade trigonomeetrilisteks funktsioonideks. Edaspidi piirdume peamiselt 360°-st väiksemate positiivsete nurkade funktsioonide uurimisega.

Vaatleme, mis märgiga on trigonomeetrilised funktsioonid I, II, III ja IV veerandi nurkade korral. Selleks vaatame veel kord selle teema alguses toodud jooniseid. On ilmne, et kaugus r on kõigil juhtudel positiivne. Seega sõltub siinuse, koosinuse, tangensi ja kootangensi märk sellest, millise märgiga on punkti B x- ja y-koordinaadid erinevates veerandites.

I ja II veerandis on $y > 0$, III ja IV veerandis on $y < 0$.
I ja IV veerandis on $x > 0$, II ja III veerandis on $x < 0$.

Sellest järeldub, et
I ja II veerandi nurkade korral on $\sin\alpha > 0$,
III ja IV veerandi nurkade korral on $\sin\alpha < 0$.
I ja IV veerandi nurkade korral on $\cos\alpha > 0$,
II ja III veerandi nurkade korral on $\cos\alpha < 0$.
I ja III veerandi nurkade korral on $\tan\alpha > 0$ ja $\cot\alpha > 0$,
II ja IV veerandi nurkade korral on $\tan\alpha < 0$ ja $\cot\alpha < 0$.
Need tulemused võib meelde jätta järgmiste skeemide kujul:



758. Taandada järgmised funktsioonid positiivsete nurkade funktsioonideks.
1) $\sin(-20°)$ 2) $\cos(-100°)$ 3) $\tan(-180°)$ 4) $\cot(-250°)$
5) $\sin(-73°)$ 6) $\cos(-219°)$ 7) $\tan(-324°)$ 8) $\cot(-47°)$

759. Taandada funktsioonid 360°-st väiksemate nurkade funktsioonideks.
1) $\sin 750°$ 2) $\cos 1100°$ 3) $\tan 1560°$ 4) $\cot 2342°$
5) $\sin(-800°)$ 6) $\cos(-935°)$ 7) $\tan(-3240°)$ 8) $\cot 1650°$

760. Kasutades definitsioone, leia
1) $\cos 180°$ 2) $\cos 90°$ 3) $\sin 360°$ 4) $\cos(-90°)$ 5) $\sin 270°$
6) $\sin(-270°)$ 7) $\tan 270°$ 8) $\tan 135°$ 9) $\sin 180°$ 10) $\cot(-90°)$
11) $\tan(-180°)$ 12) $\cot 0°$ 13) $\cos 270°$ 14) $\cos 315°$ 15) $\sin(405°)$
16) $\tan\frac{3\pi}{2}$ 17) $\sin\frac{13\pi}{6}$ 18) $\cos\frac{5\pi}{3}$ 19) $\tan 8{,}25\pi$ 20) $\sin 9\pi$.

761. Mis märgiga on
1) $\sin 183°$ 2) $\sin 105°$ 3) $\sin 310°$ 4) $\cos 500°$
5) $\cos(-110°)$ 6) $\tan(-220°)$ 7) $\cot(-100°)$ 8) $\tan(-1000°)$
9) $\sin\frac{2\pi}{3}$ 10) $\cos 4\pi$ 11) $\tan\frac{7\pi}{8}$ 12) $\sin\frac{8\pi}{5}$
13) $\sin 4$ 14) $\cos 5$ 15) $\tan 6$ 16) $\sin 3{,}14?$

762. Missuguse veerandi nurk on α, kui
1) $\sin\alpha < 0$ ja $\cos\alpha < 0$ 2) $\sin\alpha >$ ja $\tan\alpha < 0$ 3) $\cos\alpha > 0$ ja $\tan\alpha > 0$
4) $\tan\alpha > 0$ ja $\sin\alpha < 0$ 5) $\sin\alpha > 0$ ja $\cos\alpha < 0$ 6) $\tan\alpha < 0$ ja $\cos\alpha < 0$?

763. Kas $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$ ja $\cot x$ väärtused võivad olla negatiivsed, kui x on kolmnurga nurk?

Trigonomeetriliste funktsioonide definitsioonidest lähtudes saab leida $\sin 90°$, $\cos 180°$, $\tan 270°$, $\cot 180°$ jne., nii nagu me tegime seda mõnes eelmises ülesan-

andes. Aga aja kokkuhoiu huvides on kasulik teada neid nurgafunktsioonide väärtusi peast. Jäta järgmine tabel meelde.

α	$0° = 0$ rad	$90° = \frac{\pi}{2}$ rad	$180° = \pi$ rad	$270° = \frac{3\pi}{2}$ rad	$360° = 2\pi$ rad
$\sin\alpha$	0	1	0	-1	0
$\cos\alpha$	1	0	-1	0	1
$\tan\alpha$	0	—	0	—	0
$\cot\alpha$	—	0	—	0	—

765. Lihtsusta

1) $5\sin 90° + 2\cos 0° - 3\sin 270° + 10\cos 180°$

2) $2\sin\pi + 3\cos\pi + 4\tan\pi$

3) $\cos 90°\cos 270° - \sin 90°\sin 270°$

4) $\cos\frac{\pi}{2} - 2\cos\pi + 2\sin\frac{3\pi}{2} + \tan\pi$

5) $a\cdot\cos^2 0\cdot\sin\frac{\pi}{2} + 2b\cdot\cos\pi\cdot\cot\frac{3\pi}{2}$

6) $\frac{x^2}{\sin^2 90°} - \frac{2xy}{\cos^2\pi} + \frac{y^2}{\sin^2 270°}$

766. Joonesta millimeetripaberile teljestik ja ringjoon, mille keskpunkt on (0; 0). Raadius on 100 mm. Konstrueeri ringjoone sisse nurgad 30°, 45°, 60°, 90°, 120°, 135°, 150°, 180°, 210°, 225°, 240°, 270°, 300°, 315°, 330°. Joonesta nende nurkade ja ringjoone lõikepunktidest ristlõigud x-teljele. Mõõda pikkused. Täida järgmine tabel:

α	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$
x															
y															
$\sin\alpha$															
$\cos\alpha$															
$\tan\alpha$															

5.6. SEOSED ÜHE JA SAMA NURGA TRIGONOMEETRILISTE FUNKTSIOONIDE VAHEL

Täisnurkse kolmnurga teravnurga α puhul kehtisid järgmised kuus valemit:

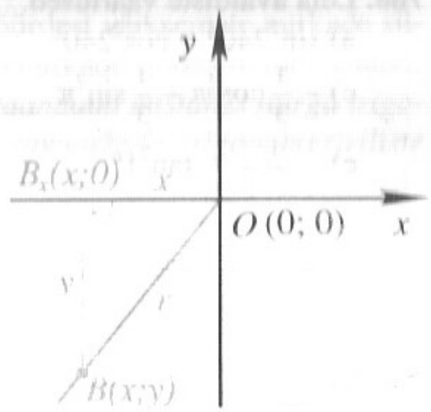
$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ $\qquad \tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ $\qquad \cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$

$1 + \tan^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$ $\qquad 1 + \cot^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}$ $\qquad \tan\alpha\cdot\cot\alpha = 1$

Neid valemeid nimetatakse ***seosteks ühe ja sama nurga trigonomeetriliste funktsioonide vahel***. Veendume, et need valemid kehtivad mistahes nurga α korral!

Olgu nurga alghaar x-telje positiivsel suunal, lõpphaaral olgu punkt $B(x; y)$. Olgu OB pikkus olgu r. Siis

$\sin\alpha = \frac{y}{r}$ $\quad \cos\alpha = \frac{x}{r}$ $\quad \tan\alpha = \frac{y}{x}$ $\quad \cot\alpha = \frac{x}{y}$.



Tõestame kolme valemi kehtivust:

a) $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ $\qquad$ b) $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

c) $1 + \tan^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$

a) $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = \frac{y^2}{r^2} + \frac{x^2}{r^2} = \frac{y^2 + x^2}{r^2} = \frac{r^2}{r^2} = 1$

Pythagorase teoreemi põhjal kolmnurgast OBB_x

b) $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{y}{r}}{\frac{x}{r}} = \frac{y}{x} = \tan\alpha$

c) $1 + \tan^2\alpha = 1 + \frac{y^2}{x^2} = \frac{x^2 + y^2}{x^2} = \frac{r^2}{x^2} = \frac{1}{\frac{x^2}{r^2}} = \frac{1}{\cos^2\alpha}$

Tõesta iseseisvalt ülejäänud kolme valemi kehtivust mistahes nurga α korral.

Näide. Leiame $\cos\alpha$ väärtuse, kui $\tan\alpha = \frac{7}{24}$ ja α on III veerandi nurk.

Valemist $1 + \tan^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$ avaldades $\cos^2\alpha$, saame: $\cos^2\alpha = \frac{1}{1 + \tan^2\alpha}$.

Et kolmanda veerandi koosinus on negatiivne, siis $\cos\alpha = -\frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2\alpha}}$.

Seega, $\cos\alpha = -\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{49}{576}}} = -\frac{1}{\frac{25}{24}} = -\frac{24}{25}$.

767. Leia nurga α ülejäänud trigonomeetriliste funktsioonide väärtused.

a) $\sin\alpha = \frac{4}{5}$ ja $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ $\qquad$ b) $\cos\alpha = \frac{5}{13}$ ja $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$

c) $\sin\alpha = -\frac{40}{41}$ ja $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ $\qquad$ d) $\sin\alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ ja $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$

e) $\tan\alpha = -3$ ja $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ $\qquad$ f) $\cot\alpha = -\frac{8}{15}$ ja $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$

[1] Siiski peame arvestama $\tan\alpha$ ja $\cot\alpha$ korral, et $\tan\alpha$ on defineeritud, kui $\alpha \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$, kus $k \in \mathbb{Z}$, ja $\cot\alpha$ on defineeritud, kui $\alpha \neq k\pi$, kus $k \in \mathbb{Z}$.

g) $\cot\alpha = \sqrt{2}$ ja $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$

h) $\tan\alpha = \frac{5}{6}$ ja $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$

i) $\cos\alpha = -0{,}6$ ja $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$

j) $\sin\alpha = -0{,}5$ ja $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$

768. Leia avaldiste väärtused.

a) $\sin^2 240° + \cos^2 240°$

b) $-15\cos^2\beta - 15\sin^2\beta$

c) $-\frac{1}{3}\cos^2\pi - \frac{1}{3}\sin^2\pi$

d) $5\tan 57° \cdot \frac{7}{5}\cot 57°$

e) $\frac{1}{\cos^2 1°} - \tan^2 1°$

f) $-1 - 5\sin^2 3 - 5\cos^2 3$

g) $\frac{\sin 46°}{\sqrt{1-\cos^2 46°}}$

h) $\frac{3\cos 67°}{\sqrt{1-\sin^2 67°}}$

i) $\sqrt{2\tan 50° \cdot 8\cot 50°}$

j) $(1-\cos^2 70°)(1+\cot^2 70°)$

k) $\frac{5}{\tan^2 40°} - \frac{5}{\sin^2 40°}$

l) $\left(1-\frac{1}{\sin^2 10°}\right)\left(1-\frac{1}{\cos^2 10°}\right)$

769. Lihtsusta avaldised

a) $1 - \sin\alpha\cos\alpha\cot\alpha$

b) $\cos\alpha\tan\alpha - \sin\alpha$

c) $\sin^2\alpha + \cot^2\alpha + \cos^2\alpha$

d) $(\sin\alpha + 1)(1 - \sin\alpha)$

e) $\sin\alpha \cdot \cot\alpha + \cos\alpha$

f) $\frac{\sin\alpha}{\tan\alpha} + \cos\alpha$

g) $\frac{\sin^2\varphi - 1}{\cos^2\varphi}$

h) $\frac{\cos^2\varphi - 1}{\sin^2\varphi}$

i) $\sqrt{\frac{1}{\cos^2\alpha} - 1}$

j) $\frac{\tan\alpha}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}$

k) $\sin^4\alpha + 2\sin^2\alpha\cos^2\alpha + \cos^4\alpha$

l) $\sin^2\alpha(1 + \tan^2\alpha) + 1$

m) $1 - \frac{\cos^2\alpha}{1+\sin\alpha}$

n) $\frac{1+\cos^2\alpha - \sin^2\alpha}{\cos\alpha}$

o) $\sin\alpha\cos\alpha(\tan\alpha + \cot\alpha)$

p) $\sin^4\alpha - \cos^4\alpha - \sin^2\alpha + \cos^2\alpha$

q) $\left(\frac{1}{\cos^2\alpha} - 1\right)\left(\frac{1}{\sin^2\alpha} - 1\right)$

r) $\left(\frac{1}{\cos\alpha} + \tan\alpha\right)\left(\frac{1}{\cos\alpha} - \tan\alpha\right)$

770. Tõesta samasus.

a) $(1 + \cot^2\alpha)\cdot\sin^2\alpha = 1$

b) $\cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$

c) $\cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$

d) $(1 - \sin^2\alpha)(1 + \tan^2\alpha) = 1$

e) $\frac{1}{\tan\alpha + \cot\alpha} = \sin\alpha\cdot\cos\alpha$

f) $\frac{1}{\sin^2\alpha} - \frac{1}{\tan^2\alpha} = 1$

g) $\tan^2\alpha - \sin^2\alpha = \tan^2\alpha\cdot\sin^2\alpha$

h) $\cot^2\alpha - \cos^2\alpha = \cot^2\alpha\cdot\cos^2\alpha$

i) $\frac{1}{\tan\alpha + \cot\alpha} = \sin\alpha\cdot\cos\alpha$

j) $\frac{\cot\alpha - \cos\alpha}{\cot\alpha} = 1 - \sin\alpha$

771. Ühe ja sama nurga trigonomeetriliste funktsioonide vahelistest seostest tõestasime õpikus kolm seost. Vali neist kolmest valemist suvalised kaks ja tuleta neist kolmas.

8.7. TAANDAMISVALEMID

Teame, et negatiivse nurga ja täispöördest suurema positiivse nurga trigonomeetrilisi funktsioone saab avaldada 360°-st väiksemate positiivsete nurkade funktsioonide kaudu. Näitame nüüd, kuidas täispöördest väiksemate nurkade siinuseid, koosinusi ja tangenseid saab avaldada teravnurkade funktsioonide kaudu. Tulemuseks saame valemid, mis võimaldavad *taandada mistahes nurga trigonomeetriliste funktsioonide väärtuste leidmise teravnurkade trigonomeetriliste funktsioonide leidmisele*. Taandamisvalemid tuletame iga veerandi nurkade jaoks eraldi.

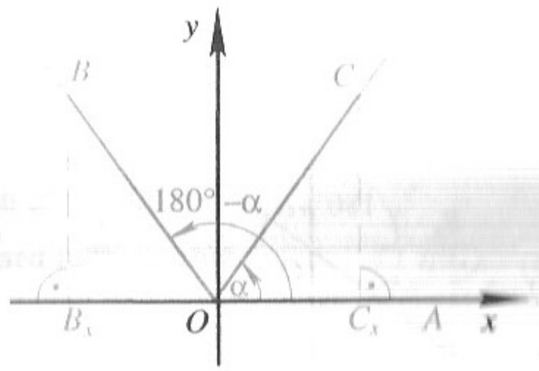
Tähelepanu: II veerandi nurgad esitame kujul $180° - \alpha$, kus $\alpha < 90°$;

III veerandi nurgad esitame kujul $180° + \alpha$, kus $\alpha < 90°$;

IV veerandi nurgad esitame kujul $360° - \alpha$, kus $\alpha < 90°$.

Taandamisvalemid II veerandi nurkade korral.

Tähistame II veerandi nurga β. Nurga alghaar olgu x-telje positiivsel suunal. Nurga lõpphaaral valime vabalt punkti $B(x_1; y_1)$. Kauguse OB tähistame r-ga. Kuna nurga β saab esitada kujul $\beta = 180° - \alpha$, kus nurk α on positiivne teravnurk,



tähistame nurga α esimesse veerandisse, nii et selle alghaar oleks ka OA. Saadud nurga lõpphaaral võtame punkti $C(x_2; y_2)$, nii et $OC = OB = r$. Punktidest B ja C tõmbame ristlõigud BB_x ja CC_x x-teljele. Tekivad kolmnurgad OBB_x ja OCC_x. Need kolmnurgad on võrdsed, sest

1) $OC = OB$, 2) nad on täisnurksed, 3) $\angle BOB_x = \angle C_xOC$.

Kolmnurkade OBB_x ja OCC_x võrdsusest järeldub, et $x_1 = -x_2$ ja $y_1 = y_2$. Nurgafunktsioonide definitsiooni põhjal saame, et

$$\sin\beta = \sin(180° - \alpha) = \frac{y_1}{r} = \frac{y_2}{r} = \sin\alpha$$

$$\cos\beta = \cos(180° - \alpha) = \frac{x_1}{r} = -\frac{x_2}{r} = -\cos\alpha$$

$$\tan\beta = \tan(180° - \alpha) = \frac{y_1}{x_1} = -\frac{y_2}{x_2} = -\tan\alpha$$

$$\cot\beta = \cot(180° - \alpha) = \frac{x_1}{y_1} = -\frac{x_2}{y_2} = -\cot\alpha.$$

Saadud tulemused esitame järgmiselt:

$$\begin{aligned}
&\sin(180^\circ - \alpha) = \sin\alpha\\
&\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos\alpha\\
&\tan(180^\circ - \alpha) = -\tan\alpha\\
&\cot(180^\circ - \alpha) = -\cot\alpha
\end{aligned}$$

Need on taandamisvalemid II veerandi nurkade jaoks.

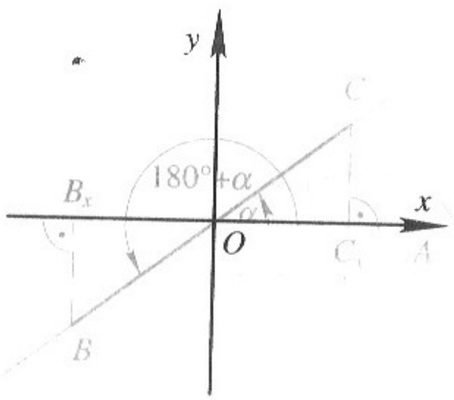
Näide 1. Leiame $\sin 144^\circ$, $\cos 144^\circ$ ja $\tan 144^\circ$.

Kasutades II veerandi nurkade taandamisvalemeid, saame

$\sin 144^\circ = \sin(180^\circ - 36^\circ) = \sin 36^\circ \approx 0{,}5878,$
$\cos 144^\circ = \cos(180^\circ - 36^\circ) = -\cos 36^\circ \approx -0{,}8090,$
$\tan 144^\circ = \tan(180^\circ - 36^\circ) = -\tan 36^\circ \approx -0{,}7265.$

Taandamisvalemid III veerandi nurkade korral.

Analoogiliselt ülaltooduga (vt. allolevat joonist) saame tõestada, et kolmanda veerandi nurkade korral kehtivad järgmised taandamisvalemid:



$$\begin{aligned}
&\sin(180^\circ + \alpha) = -\sin\alpha\\
&\cos(180^\circ + \alpha) = -\cos\alpha\\
&\tan(180^\circ + \alpha) = \tan\alpha\\
&\cot(180^\circ + \alpha) = \cot\alpha
\end{aligned}$$

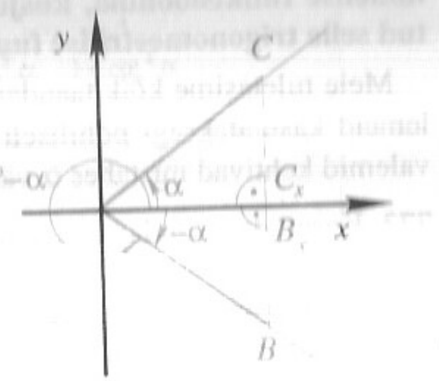
Näide 2. Leiame $\sin 210^\circ$, $\cos 258^\circ$ ja $\cot 225^\circ$.

Kasutades III veerandi nurkade taandamisvalemeid, saame

$\sin 210^\circ = \sin(180^\circ + 30^\circ) = -\sin 30^\circ = -0{,}5,$
$\cos 258^\circ = \cos(180^\circ + 78^\circ) = -\cos 78^\circ \approx -0{,}2079,$
$\cot 225^\circ = \cot(180^\circ + 45^\circ) = \cot 45^\circ = 1.$

Taandamisvalemid IV veerandi nurkade korral.

Kasutades järgmist joonist saame näidata, et neljanda veerandi nurkade korral kehtivad valemid:



$$\begin{aligned}
&\sin(360^\circ - \alpha) = -\sin\alpha\\
&\cos(360^\circ - \alpha) = \cos\alpha\\
&\tan(360^\circ - \alpha) = -\tan\alpha\\
&\cot(360^\circ - \alpha) = -\cot\alpha
\end{aligned}$$

Näide 3. Leiame $\sin 300^\circ$, $\cos 280^\circ$ ja $\tan 335^\circ$.

Kasutades IV veerandi nurkade taandamisvalemeid, saame

$\sin 300^\circ = \sin(360^\circ - 60^\circ) = -\sin 60^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2},$
$\cos 280^\circ = \cos(360^\circ - 80^\circ) = \cos 80^\circ \approx 0{,}1736,$
$\tan 335^\circ = \tan(360^\circ - 25^\circ) = -\tan 25^\circ \approx -0{,}4663.$

Negatiivse nurga trigonomeetrilised funktsioonid.

Varem nägime, et nurga $-\alpha$ funktsioonid on samased nurga $360^\circ - \alpha$ funktsioonidega. Kasutades nüüd viimaseid taandamisvalemeid, saame

$$\begin{aligned}
&\sin(-\alpha) = -\sin\alpha\\
&\cos(-\alpha) = \cos\alpha\\
&\tan(-\alpha) = -\tan\alpha\\
&\cot(-\alpha) = -\cot\alpha
\end{aligned}$$

Kokkuvõte: Taandamisvalemeiks nimetatakse järgmisi valemeid:

$$\begin{aligned}
&\sin(-\alpha) = -\sin\alpha && \sin(\alpha + n\cdot 360^\circ) = \sin\alpha\\
&\cos(-\alpha) = \cos\alpha && \cos(\alpha + n\cdot 360^\circ) = \cos\alpha\\
&\tan(-\alpha) = -\tan\alpha && \tan(\alpha + n\cdot 360^\circ) = \tan\alpha \qquad \text{kus } n \in \mathbb{Z}.\\
&\cot(-\alpha) = -\cot\alpha && \cot(\alpha + n\cdot 360^\circ) = \cot\alpha
\end{aligned}$$

$\sin(180^\circ - \alpha) = \sin\alpha$	$\sin(180^\circ + \alpha) = -\sin\alpha$	$\sin(360^\circ - \alpha) = -\sin\alpha$
$\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos\alpha$	$\cos(180^\circ + \alpha) = -\cos\alpha$	$\cos(360^\circ - \alpha) = \cos\alpha$
$\tan(180^\circ - \alpha) = -\tan\alpha$	$\tan(180^\circ + \alpha) = \tan\alpha$	$\tan(360^\circ - \alpha) = -\tan\alpha$
$\cot(180^\circ - \alpha) = -\cot\alpha$	$\cot(180^\circ + \alpha) = \cot\alpha$	$\cot(360^\circ - \alpha) = -\cot\alpha$

Taandamisvalemite meelespidamiseks paneme tähele, et

iga nurga $180° - \alpha$, $180° + \alpha$ ja $360° - \alpha$ funktsioon avaldub nurga α samanimelise funktsioonina, kusjuures selle nurgafunktsiooni märk on määratud selle trigonomeetrilise funktsiooni märgiga antud veerandis.

Meie tuletasime kõik taandamisvalemid eeldusel, et α on teravnurk. Neid valemeid kasutataksegi põhiliselt teravnurga α korral. Saab aga näidata, et need valemid kehtivad mistahes α väärtuste korral.

772. Kasutades taandamisvalemeid, arvuta

1) $\sin 150°$ 2) $\sin 315°$ 3) $\sin 240°$ 4) $\cos 120°$
5) $\tan 690°$ 6) $\tan 1110°$ 7) $\cot 315°$ 8) $\tan 1395°$
9) $\cos(-135°)$ 10) $\cot(-45°)$ 11) $\tan(-225°)$ 12) $\sin(-120°)$
13) $\cos\frac{5\pi}{3}$ 14) $\cot\frac{4\pi}{3}$ 15) $\tan\frac{5\pi}{2}$ 16) $\sin 2{,}5\pi$
17) $\sin\left(-\frac{7}{6}\pi\right)$ 18) $\cos\left(\frac{11\pi}{6}\right)$ 19) $\sin\frac{5\pi}{4}$ 20) $\cos\frac{4\pi}{3}$.

773. Leia tabelite abil.

1) $\sin 171°12'$ 2) $\cos 91°$ 3) $\tan 175°6'$ 4) $\sin 203°47'$
5) $\cos 203°28'$ 6) $\sin 236°4'$ 7) $\cos 258°7'$ 8) $\tan 264°54'$
9) $\tan 325{,}5°$ 10) $\tan 284°38'$ 11) $\sin 397°14'$ 12) $\cos 270°55'$
13) $\sin(-12°14')$ 14) $\cos(-10°36')$ 15) $\tan(-59{,}5°)$ 16) $\sin(-80°)$
17) $\sin 404°30'$ 18) $\cos 420°$ 19) $\tan 500°50'$ 20) $\tan 540°$.

774. Leia piirkonnas $0 \leqslant \alpha \leqslant 2\pi$ olevad nurgad α, mille korral

1) $\sin\alpha = 0$ 2) $\cos\alpha = 0$ 3) $\sin\alpha = 1$ 4) $\cos\alpha = 1$
5) $\sin\alpha = -1$ 6) $\cos\alpha = -1$ 7) $\tan\alpha = 1$ 8) $\tan\alpha = -1$

775. Rombi teravnurga tangens on $\frac{1}{5}$. Leia nürinurga tangens.

776. Nurgad α, β ja γ on ühe kolmnurga nurgad. Tõesta, et

1) $\sin(\alpha + \beta) = \sin\gamma$ 2) $\cos(\alpha + \beta) = -\cos\gamma$.

777. Arvuta ilma taskuarvuti ja tabeliteta.

1) $\tan 135° + \sin 90°$ 2) $\tan 315° - \cos 240°$
3) $\sin 210° + \cos 300°$ 4) $\cos 420° - \sin^2 60°$
5) $4\sin 150°\cos 300°\tan 240°$ 6) $10\cot 135°\sin 210°\cos 225°$
7) $2\sin^2 225° - \cot 330°\tan 405°$ 8) $8\sin\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{3}\tan\frac{4\pi}{3}\cot\frac{7\pi}{6}$
9) $\frac{\tan(-150°)\cos 210°\cos(-60°)}{\cot 240°\cdot\sin 330°}$ 10) $\frac{2\sin 660° - \sin 630°}{3\cot 1020° + 2\cos(-660°)}$
11) $\sin 135°\cos 45° - \tan 120°\cos 150°$
12) $\sin 360°\tan 160° + \cos 180°\sin 150° + \sin 120°\cos 150°$
13) $\sin 855° + \cos 1125° - \tan 1575° + \cot 990°$
14) $\sin 870° + \cos 1230° + \cos(-630°) - \sin(-540°)$

778. Lihtsusta avaldised. Missugused väärtused ei ole α jaoks lubatavad?

1) $\frac{\sin^2\alpha - 1}{1 - \cos^2\alpha}$ 2) $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha + \cot^2\alpha$
3) $(1 - \sin\alpha)\tan^2\alpha(1 + \sin\alpha)$ 4) $\frac{1}{1+\tan^2\alpha} + \frac{1}{1+\cot^2\alpha}$

779. Lihtsusta.

1) $\cos(\pi - \alpha)\tan(\pi - \alpha) - \sin\alpha$
2) $\sin^2(\pi - \alpha) + \cos^2\alpha + \tan^2(180° - \alpha)$
3) $\tan\alpha : \tan(\pi - \alpha) + \tan(180° - \alpha)\tan(90° - \alpha)$
4) $\frac{\tan(\pi+\alpha)\cos(\pi-\alpha) - \sin(\pi+\alpha)}{\sin(\pi+\alpha)\cos(\pi+\alpha) + \tan(\pi-\alpha)}$
5) $\sin(2\pi - \alpha)\sin(\pi - \alpha) + \cos(\pi + \alpha)\cos(2\pi - \alpha)$
6) $\tan(360° - \alpha)\sin(360° - \alpha) - \cos(\pi - \alpha)$
7) $\tan(\pi - \alpha)\tan(2\pi - \alpha) + \sin(2\pi - \alpha)\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$
8) $\sin(\beta) + \cos(-\beta) + \sin(\beta - 180°) + \cos(\beta - 180°)$

780. Leia nurgad $0°$ ja $360°$ vahelt, mis rahuldavad järgmisi võrrandeid.

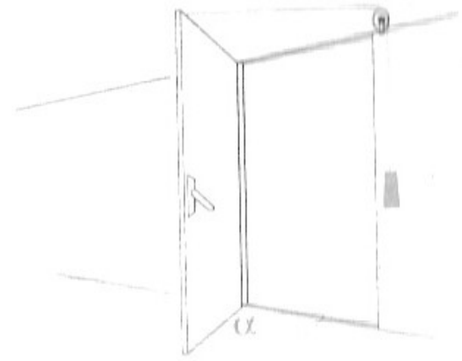
1) $4\sin^2\alpha = 3$ 2) $\cot\beta = \tan\beta$
3) $2(1 + \sin\gamma) = 3(1 - \sin\gamma)$ 4) $2\sin^2\delta + 3\cos\delta = 0$

781. Tõesta samasus.

1) $\cos 120° + \tan 40°\tan 50° = 0{,}5$ 2) $\sin^2\left(\frac{\pi}{6} + \alpha\right) + \sin^2\left(\frac{2\pi}{3} - \alpha\right)$
3) $\sin(45° + \alpha) = \cos(45° - \alpha)$ 4) $\tan(120° - 2\alpha) + \tan(240° + 2\alpha)$
5) $\sin(\alpha - 30°) + \sin(\alpha + 150°) = 0$ 6) $\cos(\alpha + 100°) = -\sin(170° - \alpha)$

782. Kell näitab 12.30. Kui suur on nurk osutite vahel?

783. Joonisel on kujutatud lihtne ukse automaatsulgeja. Ukse laius on 1 m. Kui kõrgele tõuseb sulgeja kaalupomm, kui uks avatakse nurga α võrra? Nurga $56°$ võrra?



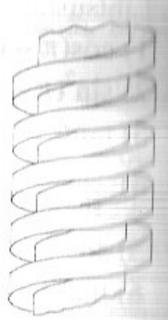
784. Selleks, et lumi libiseks maha viilkatuselt, peab katuse kaldenurk olema vähemalt $60°$. Maja laius on 9 m. Kui kõrgele üle viimase aampalgi tuleb ehitada katuse hari?

785. Punkt M asub $60°$-se nurga seest, kusjuures punkti M kaugused nurga haaradest on 2 ja 11. Leia punkti M kaugus nurga tipust.

786. Määra Päikese diameeter, kui Päike paistab Maalt nurga 31′ all. Maa ja Päikese vahekauguseks võta $1{,}49 \cdot 10^6$ km.

787. Kui kaevuvänta pöörata 5 korda, tõuseb ämber 2 m. Kui palju tuleb pöörata kaevuvänta, et ämber a) tõuseks 1,5 m, b) langeks a m?

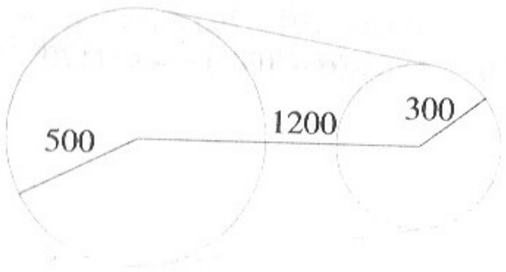
788. Vindi välimine diameeter on 38,3 mm, sisemine diameeter on 33,1 mm. Leia vindi samm, kui tõusunurk on 5°30′.

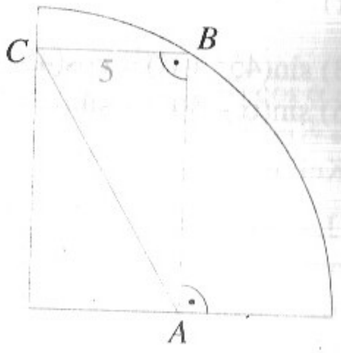


789. Leia järgmiste avaldiste kõik väärtused naturaalarvulise n korral.

1) $\sin\frac{n\pi}{4}$ 2) $\cos\frac{3n\pi}{2}$ 3) $\sin(2n+1)\frac{\pi}{2}$ 4) $\tan\frac{n-2}{3}\pi$

790. Leia veorihma pikkus, kui rihmaseibide raadiused on 500 mm ja 300 mm ja rihmarataste keskpunktide vaheline kaugus on 1200 mm.





791. Veerandringjoone (raadius on 10) sisse on joonestatud täisnurkne kolmnurk ABC, nii nagu näha joonisel. Leia hüpotenuus AC, kui külg $BC = 5$.

III ERANDEID KORDAMISEKS

793. Täisnurkse kolmnurga kaatetid on 7 ja 24. Leia kolmnurga väiksema teravnurga siinus, koosinus ja tangens.

794. Võrdhaarse kolmnurga alus on 8,0 cm ja alusnurk on 48°. Leia kolmnurga pindala 0,5 cm^2 täpsusega.

795. Lahenda täisnurkne kolmnurk, kasutades antud elemente:

1) $c = 18{,}2$; $\alpha = 32°20′$ 2) $a = 102$; $\alpha = 54°40′$
3) $c = 27{,}5$; $a = 22{,}6$ 4) $a = 32{,}4$; $b = 43{,}5$

796. Grammofoniplaat pöörleb kiirusega 45 pööret minutis. Kui suure nurga võrra pöördub see plaat sekundis? Esita see nurk kraadimõõdus ja radiaanmõõdus.

797. Avalda nurk radiaanides.

a) 210° b) 225° c) 15° d) 108° e) 168° f) 157°30′.

798. Avalda nurk kraadides.

a) $\frac{11}{12}\pi$ rad b) $\frac{3}{8}\pi$ rad c) 1,57 rad d) $\frac{5}{6}\pi$ rad e) 2 rad

799. Avalda nurk kraadides ja minutites.

a) $\frac{7}{8}\pi$ rad b) $\frac{11}{40}\pi$ rad c) $\frac{13}{16}\pi$ rad d) 2,6 π rad.

800. Leia maakera pöörlemise nurkkiirus järgmistes ühikutes:

$\frac{\text{radiaan}}{\text{tunnis}}$; $\frac{\text{radiaan}}{\text{minutis}}$; $\frac{\text{radiaan}}{\text{sekundis}}$.

Kui pika tee läbib ekvaatoril olev punkt ühe tunni jooksul?

801. Leia järgmiste avaldiste väärtused:

1) $5\sin 90° + 2\cos 0° - 2\sin 270° + 10\cos 180°$;
2) $3\tan 0° + 2\cos 90° + 3\tan(-45°) - 3\cot 135°$;
3) $2\sin\frac{\pi}{4} + 3\cos 2\pi - 5\tan 2\pi$;
4) $2\sin\frac{\pi}{6} - \tan\frac{\pi}{4} + 2\cot\frac{\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{2}$;
5) $\frac{4 - 3\tan^2 45° + \cot^4 60°}{4\sin^3 90° - 4\cos^2 60° + 4\cot 45°}$

802. Leia nurga α ülejäänud trigonomeetriliste funktsioonide väärtused:

1) $\sin\alpha = -\frac{9}{41}$ ja $\frac{3}{2}\pi < \alpha < 2\pi$ 2) $\cos\alpha = \frac{3}{5}$ ja $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$
3) $\cos\alpha = -\frac{12}{13}$ ja $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ 4) $\tan\alpha = -1$ ja $90° < \alpha < 180°$
5) $\cot\alpha = -\sqrt{3}$ ja $\frac{3}{2}\pi < \alpha < 2\pi$ 6) $\tan\alpha = \frac{3}{4}$ ja $180° < \alpha < 270°$.

802. Lihtsusta avaldised.

1) $\frac{\cos\alpha}{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}$

2) $\frac{(1+\cot^2\alpha)\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha(1+\tan^2\alpha)}$

3) $\frac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}$

4) $\frac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha+\tan^2\alpha}{1:\cos\alpha}$

5) $\frac{2\sin^2\alpha-1}{1-2\cos^2\alpha}$

6) $1+\frac{1+\cot^2\alpha}{1+\tan^2\alpha}$

7) $\sin(\pi-\alpha)+\cos(\pi-\alpha)$

8) $\cos(\pi+\alpha)-\sin(\pi+\alpha)$

9) $\tan(2\pi-\alpha)+\tan(\pi+\alpha)$

10) $\sin(\pi-1)-\cos(\frac{\pi}{2}-1)$

803. Tõesta samasused.

1) $(1-\sin^2\alpha)(1+\cot^2\alpha)=\cot^2\alpha$

2) $(\tan^2\alpha-\sin^2\alpha)\cot^2\alpha=\sin^2\alpha$

3) $(\tan\alpha+1)^2+(\tan\alpha-1)^2=\frac{2}{\cos^2\alpha}$

4) $\frac{\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha}=\sin^2\alpha$

5) $\frac{\sin(180°-\alpha)\cdot\tan\alpha\cdot\cos(360°-\alpha)}{\tan(180°-\alpha)\cdot\tan(90°-\alpha)\cdot\sin(-\alpha)}=\sin\alpha$

6) $\frac{\sin(\pi-\alpha)\cdot\sin(\pi+\alpha)\cdot\cos(90°-\alpha)\cdot\cos(2\pi-\alpha)}{\tan(\pi+\alpha)\cdot\sin(90°-\alpha)\cdot\cos(2\pi+\alpha)\cdot\sin(-\alpha)}=\sin\alpha$

804. Leia taandamisvalemite abil nurga siinus, koosinus ja tangens.

1) 120° 2) 210° 3) 225° 4) 315°

805. Leia, millega võrdub

1) $\sin 330°\cdot\cos(-240°)\cdot\tan 120°-2\cos 150°\cdot\tan(-315°)$;

2) $\sin(\frac{\pi}{2}-\alpha)-\cos(\pi-\alpha)+\tan(\pi-\alpha)-\tan(2\pi-\alpha)$;

3) $\sin^2 40°+\sin^2 50°+\tan^2 150°$;

4) $4\sin 150°\cdot\cos 300°\cdot\tan 240°$;

5) $\cos 300°\sin 210°-\tan 135°\tan 225°+\cos 150°\sin 120°$;

6) $\sin 390°\sin 510°+\cos 570°\cos 870°+\tan 600°\tan 1110°$.

806. Arvuta.

a) $\sin\frac{13}{6}\pi$ b) $\cos\frac{7}{4}\pi$ c) $\tan\frac{5}{3}\pi$ d) $\sin\frac{1001\pi}{6}$ e) $\tan(-\frac{3}{4}\pi)$

807. Leia koha geograafiline laius, kui sellel kohal jätab 22,5 m kõrgune korsten 10. märtsi keskpäeval (vana kalendri pööripäev!) 16,5 m pikkuse varju.
(Gümnaasiumi lõpueksami ülesanne Venemaal 1875. a.)

808. Lihtsusta avaldis.

$\sqrt{\sin^2\alpha\,(1+\cot\alpha)+\cos^2\alpha\,(1+\tan\alpha)}$, kui $\pi<\alpha<\frac{3}{2}\pi$.

8. KAHE NURGA SUMMA JA VAHE TRIGONOMEETRILISED FUNKTSIOONID

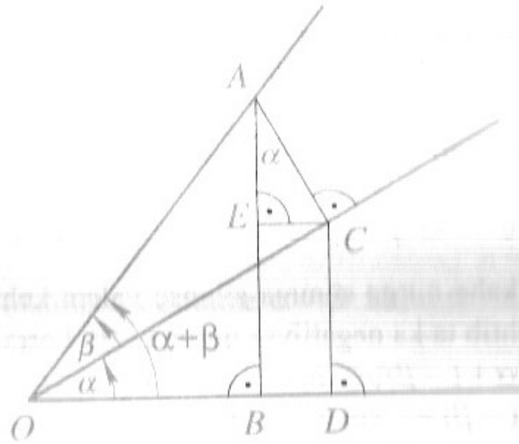
Olgu teada kahe nurga α ja β trigonomeetrilised funktsioonid siinus ja koosinus. Kas nende abil saab avaldada näiteks $\sin(\alpha+\beta)$?

Kõigepealt veendume, et $\sin(\alpha+\beta)\neq\sin\alpha+\sin\beta$.
Olgu näiteks $\alpha=30°$ ja $\beta=60°$. Siis

$\sin(30°+60°)=\sin 90°=1$, aga $\sin 30°+\sin 60°=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{1+\sqrt{3}}{2}>1$.

Olgu $\alpha>0$, $\beta>0$ ja $\alpha+\beta<90°$. Leiame $\sin(\alpha+\beta)$ avaldise $\sin\alpha$, $\sin\beta$, $\cos\alpha$ ja $\cos\beta$ kaudu. Teeme joonise. Joonisele paigutame nurgad α ja β teineteise kõrvale nii, et neil oleks üks ühine tipp ja üks ühine haar.

Nurga β tõpphaaral valime vabalt punkti A ja joonestame ristlõigud nurga α alghaarale ja nurga β alghaarale. Nii saame punktid B ja C.



Kahe nurga ühisel haaral olevast punktist C joonestame ristlõigud nurga α alghaarale ja lõigule AB. Nii saame punktid D ja E.

Tekkinud kolmnurk AEC on sarnane kolmnurgaga OCD, sest kolmnurga AEC küljed on risti kolmnurga OCD vastavate külgedega. Seega $\angle EAC=\angle DOC=\alpha$.
Nurga $(\alpha+\beta)$ siinuse avaldame täisnurksest kolmnurgast OAB.

$\sin(\alpha+\beta)=\frac{AB}{OA}=\frac{AE+EB}{OA}=\frac{AE}{OA}+\frac{EB}{OA}$

Et $AE=AC\cdot\cos\alpha$ (kolmnurgast AEC) ja $EB=CD=OC\cdot\sin\alpha$ (kolmnurgast OCD), siis $\sin(\alpha+\beta)=\frac{AC}{OA}\cdot\cos\alpha+\frac{OC}{OA}\cdot\sin\alpha$.

Et $\frac{AC}{OA}=\sin\beta$ ja $\frac{OC}{OA}=\cos\beta$ (kolmnurgast OAC), siis

$\sin(\alpha+\beta)=\sin\beta\cdot\cos\alpha+\cos\beta\cdot\sin\alpha$.

Tavaliselt esitatakse see valem järgmiselt:

$$\boxed{\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\sin\beta}$$

Saadud valemit nimetatakse ***kahe nurga summa siinuse valemiks.***

Näide 1. Leiame sin 75° ilma tabeleid ja taskuarvutit kasutamata:

$$\sin 75^\circ=\sin(45^\circ+30^\circ)=\sin 45^\circ\cos 30^\circ+\cos 45^\circ\sin 30^\circ=$$
$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}.$$

Me näitasime selle valemi kehtivust positiivsete teravnurkade korral, kusjuures $\alpha+\beta<90^\circ$. Saab näidata, et see valem kehtib ka mistahes nurkade korral. Seda me siinkohal näitama ei hakka, aga kontrollime valemi kehtivust, kui nurkade summa või nurgad ise on suuremad kui 90°. Leiame näiteks, millega võrdub $\sin(60^\circ+90^\circ)$ ja $\sin(270^\circ+45^\circ)$.

Kahe nurga summa siinuse valemist

$$\sin(60^\circ+90^\circ)=\sin 60^\circ\cos 90^\circ+\cos 60^\circ\sin 90^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 0+\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{1}{2}$$

$$\sin(270^\circ+45^\circ)=\sin 270^\circ\cos 45^\circ+\cos 270^\circ\sin 45^\circ=(-1)\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+0\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Teiselt poolt, kasutades taandamisvalemeid, saame:

$$\sin(60^\circ+90^\circ)=\sin 150^\circ=\sin(180^\circ-30^\circ)=\sin 30^\circ=\frac{1}{2}$$

$$\sin(270^\circ+45^\circ)=\sin 315^\circ=\sin(360^\circ-45^\circ)=-\sin 45^\circ=-\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Kuna kahe nurga summa siinuse valem kehtib mistahes nurkade α ja β korral, siis kehtib ta ka negatiivse nurga $(-\beta)$ korral, seega

$$\sin[\alpha+(-\beta)]=\sin\alpha\cdot\cos(-\beta)+\cos\alpha\cdot\sin(-\beta).$$

Et $\sin(-\beta)=-\sin\beta$ ja $\cos(-\beta)=\cos\beta$, siis

$$\sin[\alpha+(-\beta)]=\sin\alpha\cdot\cos\beta-\cos\alpha\cdot\sin\beta.$$

Ehk esitades $\alpha+(-\beta)$ kujul $\alpha-\beta$ saame valemi

$$\boxed{\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta-\cos\alpha\cdot\sin\beta.}$$

Seda valemit nimetatakse ***kahe nurga vahe siinuse valemiks.*** Saab näidata, et see valem kehtib samuti mistahes nurkade α ja β korral.

Näide 2. Leiame sin 15° ilma tabeleid ja taskuarvutit kasutamata:

$$\sin 15^\circ=\sin(45^\circ-30^\circ)=\sin 45^\circ\cos 30^\circ-\cos 45^\circ\sin 30^\circ=$$
$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.$$

Näide 3. Leiame avaldise $\sin 77^\circ\cos 2^\circ-\cos 77^\circ\sin 2^\circ$ väärtuse. Kasutades kahe nurga vahe siinuse valemit, saame

$$\sin 77^\circ\cos 2^\circ-\cos 77^\circ\sin 2^\circ=\sin(77^\circ-2^\circ)=\sin 75^\circ=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}.$$

$\sin 75^\circ$ väärtuse kirjutasime välja esimese näite põhjal.

Kahe nurga summa siinuse ja kahe nurga vahe siinuse valemid võib kirjutada ka ühte:

$$\boxed{\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta\pm\cos\alpha\cdot\sin\beta}$$

Kahe nurga summa siinuse valemi saame, kui arvestame ülemiste märkidega, kahe siinuse, kui alumiste märkidega.

Leiame nüüd avaldised $\cos(\alpha+\beta)$ ja $\cos(\alpha-\beta)$ jaoks, esitades need $\sin\alpha$, $\sin\beta$, $\cos\alpha$ ja $\cos\beta$ kaudu. Selleks kasutame täiendusnurga valemeid.

$$\cos(\alpha+\beta)=\sin[90^\circ-(\alpha+\beta)]=\sin[(90^\circ-\alpha)-\beta]=$$
$$=\sin(90^\circ-\alpha)\cos\beta-\cos(90^\circ-\alpha)\sin\beta=\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta.$$

Järelikult

$$\boxed{\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta}$$

Seda valemit nimetatakse ***kahe nurga summa koosinuse valemiks.***

Näide 4. Leiame cos 135° a) kahe nurga summa koosinuse abil, b) kasutades taandamisvalemeid.

a) $\cos 135^\circ=\cos(90^\circ+45^\circ)=\cos 90^\circ\cos 45^\circ-\sin 90^\circ\sin 45^\circ=0\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}-1\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=$

$$=-\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

b) $\cos 135^\circ=\cos(180^\circ-45^\circ)=-\cos 45^\circ=-\frac{\sqrt{2}}{2}.$

Kahe nurga vahe koosinuse avaldise leidmiseks esitame $\alpha-\beta$ kujul $\alpha+(-\beta)$ ja kasutame kahe nurga summa koosinuse valemit:

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos[\alpha+(-\beta)]=\cos\alpha\cdot\cos(-\beta)-\sin\alpha\cdot\sin(-\beta).$$

Et $\cos(-\beta)=\cos\beta$ ja $\sin(-\beta)=-\sin\beta$, siis

$$\boxed{\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta+\sin\alpha\cdot\sin\beta}$$

Seda valemit nimetatakse ka ***kahe nurga vahe koosinuse valemiks.***

Kahte viimast valemit võib samuti koos esitada järgmiselt:

$$\boxed{\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta\mp\sin\alpha\cdot\sin\beta}$$

Näide 5. Avaldise $\cos\frac{7\pi}{10}\cos\frac{\pi}{5}+\sin\frac{7\pi}{10}\sin\frac{\pi}{5}$ väärtuseks saame kahe nurga vahe koosinuse valemi põhjal:

$$\cos\frac{7\pi}{10}\cos\frac{\pi}{5}+\sin\frac{7\pi}{10}\sin\frac{\pi}{5}=\cos\left(\frac{7\pi}{10}-\frac{\pi}{5}\right)=\cos\frac{\pi}{2}=0.$$

Et $\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, siis

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=\frac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}.$$

Jagades viimase murru lugeja ja nimetaja liikmeti $\cos\alpha\cos\beta$-ga, saame

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\frac{\sin\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta}+\frac{\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}{\frac{\cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta}-\frac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}.$$

Seega

$$\boxed{\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}.}$$

Asendades selles valemis nurga β nurgaga $(-\beta)$ ja kasutades seda, et $\tan(-\beta)=-\tan\beta$, saame

$\tan[\alpha+(-\beta)]=\frac{\tan\alpha+\tan(-\beta)}{1-\tan\alpha\tan(-\beta)}=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$. Seega

$$\boxed{\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}.}$$

Viimased kaks valemit (*kahe nurga summa tangensi ja kahe nurga vahe tangensi valemid*) kirjutatakse tihti ka koos välja:

$$\boxed{\tan(\alpha\pm\beta)=\frac{\tan\alpha\pm\tan\beta}{1\mp\tan\alpha\tan\beta}.}$$

Näide 6. Leiame, millega võrdub $\tan 3\alpha$, kui $\tan\alpha=2-\sqrt{3}$.

Leiame kõigepealt $\tan 2\alpha=\tan(\alpha+\alpha)$ ja seejärel $\tan 3\alpha=\tan(2\alpha+\alpha)$:

$$\tan2\alpha=\tan(\alpha+\alpha)=\frac{\tan\alpha+\tan\alpha}{1-\tan\alpha\cdot\tan\alpha}=\frac{2-\sqrt3+2-\sqrt3}{1-(2-\sqrt3)^2}=\frac{2(2-\sqrt3)}{1-4+4\sqrt3-3}=$$

$$=\frac{2(2-\sqrt3)}{2(2\sqrt3-3)}=\frac{(2-\sqrt3)(2\sqrt3+3)}{(2\sqrt3-3)(2\sqrt3+3)}=\frac{\sqrt3}{3}.$$

$$\tan3\alpha=\tan(2\alpha+\alpha)=\frac{\tan2\alpha+\tan\alpha}{1-\tan2\alpha\cdot\tan\alpha}=\frac{\frac{\sqrt3}{3}+2-\sqrt3}{1-\frac{\sqrt3}{3}\cdot(2-\sqrt3)}=\frac{\frac{\sqrt3+6-3\sqrt3}{3}}{\frac{3-2\sqrt3+3}{3}}=1.$$

809. Arvuta, kasutades kahe nurga summa ja vahe trigonomeetriliste funktsioonide valemeid.

1) $\sin 105°$ 2) $\cos 105°$ 3) $\tan 105°$ 4) $\sin 210°$
5) $\sin 120°$ 6) $\cos 75°$ 7) $\tan 15°$ 8) $\tan(-15°)$
9) $\sin 240°$ 10) $\cos 15°$ 11) $\tan 75°$ 12) $\cos(-75°)$
13) $\sin(-75°)$ 14) $\cos 315°$ 15) $\tan 225°$ 16) $\tan 300°$

810. Rakenda summa või vahe trigonomeetriliste funktsioonide valemeid.

1) $\sin(\gamma+\delta)$ 2) $\cos(x+y)$ 3) $\tan(x+y)$
4) $\tan(\alpha+\beta)\cdot\tan(\alpha-\beta)$ 5) $\sin(2\alpha+\gamma)$ 6) $\cos(x+2y)$
7) $\tan(x+2y)$ 8) $\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)$ 9) $\sin(\gamma-\delta)$
10) $\cos(3x-y)$ 11) $\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)$ 12) $\cos(x+y)-\cos(x-y)$
13) $\sin(\alpha-3\beta)$ 14) $\cos(y-2x)$ 15) $\cos(x+y)+\sin(x-y)$
16) $\sin(x+y)\cdot\cos(x-y)$ 17) $\sin(90°+\alpha)-\sin(90°-\alpha)$
18) $(1+\tan\alpha\tan\beta)\cdot\tan(\alpha-\beta)$

811. Lihtsusta avaldis.

1) $\sin20°\cos25°+\cos20°\sin25°$ 2) $\cos75°\cos30°+\sin75°\sin30°$
3) $\sin75°\cos30°-\cos75°\sin30°$ 4) $\cos78°\cos42°-\sin78°\sin42°$
5) $\sin2\alpha\cos\alpha-\cos2\alpha\sin\alpha$ 6) $\cos\alpha\cos3\alpha-\sin\alpha\sin3\alpha$
7) $\cos3\alpha\sin2\alpha+\sin3\alpha\cos2\alpha$ 8) $\cos3\alpha\cos2\alpha+\sin3\alpha\sin2\alpha$
9) $\sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4}+\cos\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4}$ 10) $\cos\frac{3}{7}\pi\cos\frac{4}{7}\pi-\sin\frac{3}{7}\pi\sin\frac{4}{7}\pi$
11) $\sin1\cos2-\cos1\sin2$ 12) $\cos4\cos3+\sin3\sin4$
13) $\frac{\tan40°+\tan20°}{1-\tan40°\tan20°}$ 14) $\frac{\tan125°-\tan80°}{1+\tan125°\tan80°}$
15) $\frac{1-\tan64°\tan86°}{\tan64°+\tan86°}$ 16) $\frac{\tan2\alpha+\tan3\alpha}{1-\tan3\alpha\tan2\alpha}$
17) $\frac{\tan2\alpha-\tan\alpha}{\tan\alpha\tan2\alpha+1}$ 18) $\frac{1-\cot72°\tan12°}{\tan18°+\cot12°}$

812. Lihtsusta avaldis.

1) $\frac{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)}$ 2) $\frac{\cos(\alpha+\beta)+\sin\alpha\sin\beta}{\cos(\alpha-\beta)-\sin\alpha\sin\beta}$
3) $\frac{\sin(45°+\alpha)+\cos(45°+\alpha)}{\sin(45°+\alpha)-\cos(45°+\alpha)}$ 4) $\frac{\sin(30°+\alpha)-\cos(60°+\alpha)}{\sin(30°+\alpha)+\cos(60°+\alpha)}$
5) $\frac{\sin36°\cos24°+\sin24°\cos36°}{\sin17°\cos17°-\sin17°\cos17°}$ 6) $\frac{\cos101°\cos189°-\sin101°\sin351°}{\cos122°\cos192°+\sin122°\sin192°}$
7) $\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)$
8) $\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)$
9) $\cos(\alpha+\beta)\cos\beta+\sin(\alpha+\beta)\sin\beta$ 10) $\tan(45°+\alpha)\tan(45°-\alpha)$

813. Tõesta samasus.

1) $\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)=\sin^2\alpha-\sin^2\beta$ 2) $\sin(90°-\alpha)=\sin(90°+\alpha)$
3) $\sin(30°+\alpha)+\cos(60°+\alpha)=\cos\alpha$ 4) $\sin(45°+\alpha)=\cos(45°-\alpha)$
5) $\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)=\cos^2\alpha-\sin^2\beta$ 6) $\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{\tan\alpha+\tan\beta}=\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)}$
7) $\frac{\sin(\alpha+\beta)-\cos\alpha\sin\beta}{\cos(\alpha-\beta)-\sin\alpha\sin\beta}=\tan\alpha$ 8) $\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$
9) $\frac{\cos\alpha\cos\beta-\cos(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha-\beta)-\sin\alpha\sin\beta}=\tan\alpha\tan\beta$ 10) $\tan2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$

814. Tuleta kahe nurga summa ja vahe kootangensi valemid.

815. Tuleta taandamisvalemid, kasutades selleks kahe nurga summa ja vahe trigonomeetriliste funktsioonide valemeid.

816. Tõesta, et kui α ja β on positiivsed teravnurgad, siis $\sin(\alpha+\beta)<\sin\alpha+\sin\beta$.

817. Antud: $\sin\alpha = 0{,}6$; $\sin\beta = \frac{12}{13}$; $\sin\gamma = \frac{7}{25}$, kus α, β ja γ on teravnurgad. Leia $\cos(\alpha + \beta + \gamma)$.

818. Kolme teravnurga tangensid on vastavalt $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{5}$ ja $\frac{1}{8}$. Tõesta, et nende nurkade summa on $45°$.

819. Millega võrdub $\sin(\alpha + \beta + \gamma)$, $\cos(\alpha + \beta + \gamma)$ ja $\tan(\alpha + \beta + \gamma)$? Valemid nende suuruste esitamiseks nurkade α, β ja γ trigonomeetriliste funktsioonide kaudu tuletas 1722. a. šveitsi matemaatik Johann Bernoulli. Kas seda suudad ka sina?

820. Avalda $\sin(\alpha + \beta + \gamma + \delta)$ ja $\cos(\alpha + \beta + \gamma + \delta)$ nurkade α, β, γ ja δ trigonomeetriliste funktsioonide kaudu.

5.9. KAHEKORDSE NURGA TRIGONOMEETRILISED FUNKTSIOONID

Esitame kahekordse nurga 2α trigonomeetrilised funktsioonid nurga α trigonomeetriliste funktsioonide kaudu.

Võttes kahe nurga summa siinuse, koosinuse ja tangensi valemites $\beta = \alpha$, saame

$$\sin 2\alpha = \sin(\alpha + \alpha) = \sin\alpha\cos\alpha + \cos\alpha\sin\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos(\alpha + \alpha) = \cos\alpha\cos\alpha - \sin\alpha\sin\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$

$$\tan 2\alpha = \tan(\alpha + \alpha) = \frac{\tan\alpha + \tan\alpha}{1 - \tan\alpha\tan\alpha} = \frac{2\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha}.$$

Seega, kokku võttes:

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$$
$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$
$$\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha}$$

Saadud valemeid nimetatakse ***kahekordse nurga siinuse, koosinuse ja tangensi valemiteks.***

Kasutades kahekordse nurga valemeid, saab antud nurga trigonomeetrilisi funktsioone esitada temast kaks korda väiksema nurga trigonomeetriliste funktsioonide abil, näiteks:

$\sin\frac{x}{2} = 2\sin\frac{x}{4}\cos\frac{x}{4}$ $\qquad$ $\cos 6x = \cos^2 3x - \sin^2 3x$

$\tan 4x = \frac{2\tan 2x}{1 - \tan^2 2x}$ $\qquad$ $\sin\beta = 2\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\beta}{2}$ jne.

Näide 1. Leiame $\sin 120°$, $\cos 120°$ ja $\tan 120°$, kasutades kahekordse nurga valemeid ja seda, et teame trigonomeetriliste funktsioonide väärtusi $60°$ nurga korral.

$$\sin 120° = \sin(2\cdot 60°) = 2\sin 60°\cos 60° = 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 120° = \cos(2\cdot 60°) = \cos^2 60° - \sin^2 60° = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = -\frac{1}{2}$$

$$\tan 120° = \tan(2\cdot 60°) = \frac{2\tan 60°}{1 - \tan^2 60°} = \frac{2\sqrt{3}}{1 - 3} = -\sqrt{3}.$$

Kontrolli saadud tulemusi taandamisvalemite abil.

Näide 2. Lihtsustame avaldise $1 - \sin^2\alpha - 4\sin^2\alpha\cos^2\alpha$ ja arvutame selle väärtuse, kui $\alpha = \frac{\pi}{8}$.

$$1 - \sin^2 2\alpha - 4\sin^2\alpha\cos^2\alpha = (1 - \sin^2 2\alpha) - (2\sin\alpha\cos\alpha)^2 =$$
$$= \cos^2 2\alpha - \sin^2 2\alpha = \cos 4\alpha.$$

$$\cos(4\cdot\tfrac{\pi}{8}) = \cos\tfrac{\pi}{2} = 0.$$

Näide 3. Lihtsustame avaldise $2\cos^3\frac{5\pi}{24}\sin\frac{5\pi}{24} - 2\sin^3\frac{5\pi}{24}\cos\frac{5\pi}{24}$.

$$2\cos^3\tfrac{5\pi}{24}\sin\tfrac{5\pi}{24} - 2\sin^3\tfrac{5\pi}{24}\cos\tfrac{5\pi}{24} = 2\cos\tfrac{5\pi}{24}\sin\tfrac{5\pi}{24}(\cos^2\tfrac{5\pi}{24} - \sin^2\tfrac{5\pi}{24}) =$$
$$= \sin\tfrac{5\pi}{12}\cos\tfrac{5\pi}{12} = \frac{1}{2}\sin\frac{5}{6}\pi = \frac{1}{2}\sin(\pi - \tfrac{\pi}{6}) = \frac{1}{2}\sin\tfrac{\pi}{6} = \frac{1}{4}.$$

Leia nurkade $\frac{5\pi}{24}$, $\frac{5\pi}{12}$, $\frac{5}{6}\pi$ suurused kraadimõõdus!

821. Leia

1) $2\sin\alpha$ ja $\sin 2\alpha$, kui $\alpha = 30°$;
2) $2\cos\alpha$ ja $\cos 2\alpha$, kui $\alpha = 45°$;
3) $2\tan\alpha$ ja $\tan 2\alpha$, kui $\alpha = 90°$.

822. Leia $\sin 2\alpha$, $\cos 2\alpha$ ja $\tan 2\alpha$, kui

1) $\sin\alpha = 0{,}6$ ja $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$;
2) $\cos\alpha = -\frac{5}{13}$ ja $\pi < \alpha < \frac{3}{2}\pi$;
3) $\cos\alpha = \frac{3}{5}$ ja $\frac{3}{2}\pi < \alpha < 2\pi$;
4) $\sin\alpha = \frac{7}{25}$ ja $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

823. Leia järgmiste avaldiste väärtused (kui võimalik, siis peast).

1) $2\sin\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{8}$
2) $\sin 15°\cos 15°$
3) $\cos^2 22°30' - \sin^2 22°30'$
4) $\sin^2\frac{\pi}{18} - \cos^2\frac{\pi}{18}$
5) $\frac{2\tan 15°}{1 - \tan^2 15°}$
6) $(\cos\frac{\pi}{3} - \sin\frac{\pi}{3})(\sin\frac{\pi}{3} + \cos\frac{\pi}{3})$
7) $3\sin 105°\cos 105°$
8) $\sin^2 15° - \sin^2 75°$
9) $\frac{2\tan\frac{3}{8}\pi}{1 - \tan^2\frac{3}{8}\pi}$
10) $\frac{1 - \tan^2 30°}{\tan 30°}$

824. Tõesta, et kehtivad järgmised võrdused.

1) $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$ 2) $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$

3) $\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$ 4) $\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$

Kirjuta need valemid välja, neid võib edaspidi vaja minna.

825. Lihtsusta.

1) $2\sin 40^\circ \sin 50^\circ$

2) $\frac{2\sin\beta\cos\beta}{\sin^2\beta - \cos^2\beta}$

3) $(\sin\alpha - \cos\alpha)^2 + \sin 2\alpha$

4) $2\cos^2\alpha - \cos 2\alpha$

5) $1 - 8\sin^2\alpha \cdot \cos^2\alpha$

6) $\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{1 - 2\sin^2\alpha}$

7) $\sin\alpha \cdot \cos\alpha \cdot \cos 2\alpha$

8) $\cos^4\alpha - \sin^4\alpha$

9) $\frac{(\sin\alpha + \cos\alpha)^2}{1 + \sin 2\alpha}$

10) $\frac{\cos 2\alpha}{\sin\alpha - \cos\alpha}$

11) $2\sin\alpha \cdot \cos\alpha \cdot (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)$

12) $\cos^4\alpha - 6\cos^2\alpha \sin^2\alpha + \sin^4\alpha$

826. Tõesta samasus.

1) $\cos^4\alpha - \sin^4\alpha = \cos 2\alpha$

2) $(\sin\gamma + \cos\gamma)^2 = 1 + \sin 2\gamma$

3) $4\sin^4\alpha + \sin^2 2\alpha = 4\sin^2\alpha$

4) $\frac{\sin 2\alpha}{1 - \cos 2\alpha} = \cot\alpha$

5) $\sin 2\alpha - \tan\alpha = \cos 2\alpha \tan\alpha$

6) $\frac{1 - \tan\alpha}{1 + \tan\alpha} = \frac{\cos 2\alpha}{1 + \sin 2\alpha}$

7) $\frac{1 - \tan^2\alpha}{1 + \tan^2\alpha} = \cos 2\alpha$

8) $\frac{\cos 2\alpha}{1 + \sin 2\alpha} = \frac{\cos\alpha - \sin\alpha}{\cos\alpha + \sin\alpha}$

9) $\cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ = \frac{1}{8}$

10) $\sin 18^\circ \cdot \cos 36^\circ = \frac{1}{4}$

827. Teades, et $\cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$, avalda $\cot 2\alpha$

1) $\cot\alpha$ kaudu,

2) $\tan\alpha$ kaudu.

828. Avalda $\sin 4\alpha$ ja $\cos 4\alpha$ $\sin\alpha$ ja $\cos\alpha$ kaudu.

829. Tõesta, et $\sin 2\alpha < 2\sin\alpha$, kui $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

830. Tõesta, et $\tan 2\alpha > 2\tan\alpha$, kui $0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$

831. Tõesta, et $\sin x \cos x \leq \frac{1}{2}$. Milliste nurkade puhul kehtib võrdus?

832. Tõesta, et $\sin x + \cos x \leq \sqrt{2}$. Milliste nurkade puhul kehtib võrdus?

833. Lihtsusta avaldis $\sin\alpha \cdot \cos\alpha \cdot \cos 2\alpha \cdot \cos 4\alpha \cdot \cos 8\alpha$.

9.10. POOLNURGA TRIGONOMEETRILISED FUNKTSIOONID

Oleme, et teame, millega võrduvad $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ ja $\tan\alpha$. Olgu meil vaja leida antud nurgast α poole väiksema nurga $\frac{\alpha}{2}$ trigonomeetriliste funktsioonide väärtused. Kirjutame välja järgmised kaks võrdust:

$$\cos^2\frac{\alpha}{2} + \sin^2\frac{\alpha}{2} = 1 \qquad (1)$$

$$\cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2} = \cos\alpha \qquad (2)$$

(1) — seos ühe ja sama nurga $\frac{\alpha}{2}$ siinuse ja koosinuse vahel.

(2) — kahekordse nurga koosinuse valem, milles nurga α oleme asendanud nurgaga $\frac{\alpha}{2}$.

Kui võrdusest (1) lahutame võrduse (2) siis saame

$$2\sin^2\frac{\alpha}{2} = 1 - \cos\alpha,$$

millest

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos\alpha}{2}}. \qquad (3)$$

Kui võrdusele (1) liidame võrduse (2), siis saame

$$2\cos^2\frac{\alpha}{2} = 1 + \cos\alpha,$$

siit

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 + \cos\alpha}{2}}. \qquad (4)$$

Kui võrdus (3) jagada võrdusega (4), siis saame

$$\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{\pm\sqrt{\frac{1 - \cos\alpha}{2}}}{\pm\sqrt{\frac{1 + \cos\alpha}{2}}} = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos\alpha}{1 + \cos\alpha}}.$$

Järelikult

$$\tan\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos\alpha}{1 + \cos\alpha}} \qquad (5)$$

Saadud valemeid (3), (4) ja (5) nimetataksegi ***poolnurga siinuse, koosinuse ja tangensi valemiteks.***

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos\alpha}{2}} \qquad \cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 + \cos\alpha}{2}} \qquad \tan\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos\alpha}{1 + \cos\alpha}}$$

Märk („+" või „–") juure ees võetakse selle veerandi järgi, kuhu kuulub nurk $\frac{\alpha}{2}$.

Märkus: Valem (5) ei kehti, kui $\alpha = (2k-1)\cdot\pi$, sest siis $1+\cos\alpha = 0$.

Näide 1. Olgu $\cos\alpha = 0{,}8$ ja $\frac{3}{2}\pi < \alpha < 2\pi$. Leiame $\sin\frac{\alpha}{2}$, $\cos\frac{\alpha}{2}$ ja $\tan\frac{\alpha}{2}$. Antud juhul on nurk $\frac{\alpha}{2}$ teise veerandi nurk ($\frac{3}{2}\pi < \alpha < 2\pi$). Seetõttu $\sin\frac{\alpha}{2} > 0$, $\cos\frac{\alpha}{2} < 0$ ja $\tan\frac{\alpha}{2} < 0$. Seega

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-0{,}8}{2}} = \sqrt{0{,}1} = \frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{10}$$

$$\cos\frac{\alpha}{2} = -\sqrt{\frac{1+0{,}8}{2}} = -\sqrt{0{,}9} = \frac{-3}{\sqrt{10}} = \frac{-3\sqrt{10}}{10}$$

$$\tan\frac{\alpha}{2} = -\sqrt{\frac{1-0{,}8}{1+0{,}8}} = -\sqrt{\frac{0{,}2}{1{,}8}} = -\frac{1}{3}.$$

834. Poolnurga kootangens esitub valemiga $\cot\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}$. Tuleta see valem. Millise α väärtuse korral see valem ei kehti?

835. Leia $\sin\frac{\alpha}{2}$, $\cos\frac{\alpha}{2}$ ja $\tan\frac{\alpha}{2}$, kui

1) $\cos\alpha = 0{,}8$ ja $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$
2) $\cos\alpha = 0{,}1$ ja $\frac{3}{2}\pi < \alpha < 2\pi$
3) $\cos\alpha = -0{,}25$ ja $\pi < \alpha < \frac{3}{2}\pi$
4) $\cos\alpha = -0{,}6$ ja $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$
5) $\tan\alpha = 3\frac{3}{7}$ ja $\pi < \alpha < \frac{3}{2}\pi$
6) $\sin\alpha = -\frac{4}{5}$ ja $\pi < \alpha < \frac{3}{2}\pi$
7) $\sin\alpha = \frac{3}{5}$ ja $\frac{5}{2}\pi < \alpha < 3\pi$
8) $\cos\alpha = \frac{119}{169}$ ja $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

836. Poolnurga tangensi leidmiseks saab tuletada veel kaks valemit. Pane tähele, et need ei sisalda kahekordset märki $\pm$ ega juuravaldist:

$$\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} \quad \text{ja} \quad \tan\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

Tuleta need valemid. Milliste α väärtuste korral ei saa leida $\tan\frac{\alpha}{2}$?

Näide 2. Teame, et $\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Leiame tan 15° poolnurga valemite abil.

$$\tan 15° = \sqrt{\frac{1-\cos 30°}{1+\cos 30°}} = \sqrt{\frac{1-\sqrt{3}:2}{1+\sqrt{3}:2}} = \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}} = \sqrt{\frac{(2-\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}} = 2-\sqrt{3}.$$

Sama tulemuse saame eelmises ülesandes tuletatud valemist

$$\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}, \text{ nimelt } \tan 15° = \frac{1-\cos 30°}{\sin 30°} = \frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{0{,}5} = 2-\sqrt{3}.$$

837. Arvuta ilma tabeleid ja taskuarvutit kasutamata $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ ja $\tan\alpha$, kui

1) $\alpha = 15°$; 2) $\alpha = 22°30'$; 3) $\alpha = 7°30'$; 4) $\alpha = -67°30'$.

838. Näita, et kehtivad võrratused

$$0 \leq \frac{1+\cos\alpha}{2} \leq 1 \text{ ja } 0 \leq \frac{1-\cos\alpha}{2} \leq 1.$$

839. Leia $\cos\frac{\alpha}{2}$ ja $\cos\frac{\alpha}{4}$, kui $\cos\alpha = \frac{7}{25}$ ja α on teravnurk.

840. Leia $\sin\frac{\beta}{2}$ ja $\sin\frac{\beta}{4}$, kui $\cos\beta = -\frac{119}{196}$ ja α on nürinurk.

841. Leia $\sin\frac{\alpha}{4}$, kui $450° < \alpha < 540°$ ja $\sin\alpha = \frac{336}{625}$.

842. Lihtsusta avaldis.

1) $0{,}5(1-\cos 2\alpha)$
2) $\frac{1+\cos 6\alpha}{2}$
3) $\frac{1-\cos 8\alpha}{2}$
4) $0{,}5(\cos 4\alpha + 1)$
5) $2\sin^2\frac{\alpha}{2} + \cos\alpha$
6) $1 - 2\cos^2\frac{\alpha}{2}$
7) $\frac{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}}$
8) $\sqrt{\frac{1+\cos 2\alpha}{1-\cos 2\alpha}}$
9) $\cos\alpha + \sin\alpha\cdot\tan\frac{\alpha}{2}$
10) $(1+\cos\alpha)\tan\frac{\alpha}{2} - \sin\alpha$
11) $2\cos^2\frac{\alpha}{2} - \cos\alpha$
12) $\frac{\sin 2\alpha}{1+\cos\alpha} + 2\tan\frac{\alpha}{2}$
13) $\frac{\sin 2}{1+\cos 2}$
14) $\frac{1-\cos 2}{\sin 2}$
15) $\sqrt{\frac{4-4\cos 4}{1+\cos 4}}$
16) $\sqrt{\frac{1+\cos\varphi}{2-2\cos\varphi}}$

843. Tõesta samasus.

1) $2\cos^2\frac{\alpha}{2} - 1 = \cos\alpha$
2) $1 - 2\sin^2\frac{\alpha}{2} = \cos\alpha$
3) $1 + \tan^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}$
4) $2\sin^2\frac{\alpha}{2}(1+\cos\alpha) = \sin^2\alpha$
5) $1 + \sin\alpha = 2\cos^2(45° - \frac{\alpha}{2})$
6) $1 - \sin\alpha = 2\sin^2(45° - \frac{\alpha}{2})$
7) $\frac{\sin^2\alpha}{1+\cos\alpha} + 2\cos^2\frac{\alpha}{2} = 2$
8) $\frac{\sin^2\alpha}{1+\cos\alpha} - 2\cos^2\frac{\alpha}{2} = -2\cos\alpha$
9) $4\cos^2\frac{\alpha}{2}\sin\alpha = 2\sin\alpha + \sin 2\alpha$
10) $1 - \frac{1}{2}\tan^2\frac{\alpha}{2}(1+\cos\alpha) = \cos^2\frac{\alpha}{2}$
11) $\tan^2 3\alpha(1+\cos 6\alpha) = 1 - \cos 6\alpha$
12) $\cos^2\frac{\alpha}{2}\cdot(1+\tan\frac{\alpha}{2})^2 = 1 + \sin\alpha$

844. Kahe nurga vahe siinuse ja koosinuse valemite abil saab näidata, et

$\sin 15° = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ ja $\cos 15° = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.

Kasutades poolnurga siinuse ja koosinuse valemeid (vt. ül. 837), saime, et $\sin 15° = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{3}}$ ja $\cos 15° = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}$. Näita, et mõlemad tulemu-

845. Tõesta, et kui $\tan\frac{x}{2}=t$, siis $\sin x=\frac{2t}{1+t^2}$ ja $\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$.

846. Arvuta $\sin x$ ja $\cos x$, kui $\tan\frac{x}{2}$ on

1) 1; 2) 5; 3) $\frac{\sqrt{3}}{4}$; 4) $-0{,}7$; 5) -3; 6) $\sqrt{2}$.

847. Võrdhaarses kolmnurgas on tipunurga koosinus $\frac{7}{25}$. Leia aluse lähisnurga siinus ja koosinus.

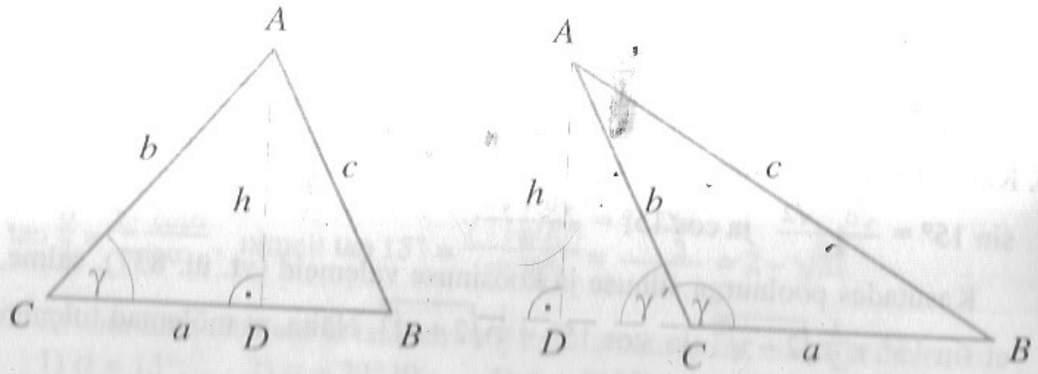
848. Kesknurk α toetub veerandringjoonest väiksemale kaarele. Leia samale kaarele toetuva piirdenurga siinus, koosinus ja tangens, kui $\cos\alpha=\frac{1}{9}$.

849. Rombi pindala võib leida valemi $S=\frac{1}{2}ab$ järgi, kus a ja b on rombi diagonaalid. Kuid rombi pindala võib leida ka valemi $S=c^2\sin\alpha$ abil, kus c on rombi külg ja α on rombi nurk. Tuleta see valem, lähtudes esimesest valemist.

5.11. KOLMNURGA PINDALA KAHE KÜLJE JA NENDEVAHELISE NURGA JÄRGI

Kolmnurga pindala arvutamiseks oleme seni kasutanud valemit $S=\frac{1}{2}ah$, kus a on kolmnurga alus ja h tema kõrgus. Vahel ei ole kolmnurga kõrgust võimalik mõõta, küll aga on võimalik mõõta kolmnurga kahe külje pikkust ja nende külgede vahelist nurka. Tuletame valemi, mille abil saab leida kolmnurga pindala, kui teame selle kolmnurga kahte külge ja nende külgede vahelist nurka.

Olgu kolmnurga ABC küljed a, b ja c ning nende külgede vastasnurgad vastavalt α, β ja γ. Teeme joonised kahel erineval juhul, neist ühe korral on nurk γ teravnurk, teise korral nürinurk.



Tõmbame sellele kolmnurgale tipust A kõrguse $h=AD$.

Kui nurk γ on teravnurk või täisnurk, siis saame täisnurksest kolmnurgast CAD, et

$$\sin\gamma=\frac{h}{b}\Rightarrow h=b\sin\gamma.$$

Kui nurk γ on nürinurk, siis saame täisnurksest kolmnurgast ACD, et

$$\sin\gamma'=\frac{h}{b}\Rightarrow h=b\sin\gamma'.$$

Et $\gamma'=180^\circ-\gamma$, siis $h=b\sin(180^\circ-\gamma)=b\sin\gamma$.

Seega on mõlemal juhul $h=b\sin\gamma$ ning asendades selle tulemuse pindala valemisse $S=\frac{1}{2}ah$, saame, et

$$\boxed{S=\frac{1}{2}ab\sin\gamma.}$$

Et tuletatud pindala valem kehtib suvalise kahe külje ja nendevahelise nurga korral, siis kehtivad ka valemid

$$\boxed{S=\frac{1}{2}ac\sin\beta} \quad \text{ja} \quad \boxed{S=\frac{1}{2}bc\sin\alpha.}$$

Seega:

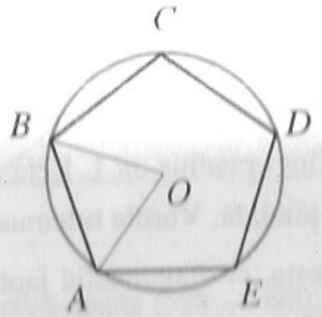
Kolmnurga pindala võrdub kahe külje ja nendevahelise nurga siinuse poole korrutisega.

Näide 1. Kui kolmnurga külg $a=8$, külg $b=10$ ja nendevaheline nurk $\gamma=38^\circ$, siis kolmnurga pindala $S=\frac{1}{2}ab\sin\gamma=\frac{1}{2}\cdot 8\cdot 10\sin 38^\circ=24{,}6$.

Näide 2. Ringjoone raadius olgu 10. Leiame selle ringjoone sisse joonestatud korrapärase kõõlviisnurga pindala. Viisnurk $ABCDE$ jaguneb viieks võrdseks võrdhaarseks kolmnurgaks. Iga sellise kolmnurga tipunurk on $360^\circ:5=72^\circ$.

Kolmnurga OAB pindala on $S=\frac{1}{2}\cdot 10\cdot 10\cdot\sin 72^\circ=50\sin 72^\circ$.

Seega viisnurga $ABCDE$ pindala $S=5\cdot 50\sin 72^\circ=238$.



850. Arvuta kolmnurga pindala. Vastus esita kolme tüvenumbri täpsusega.

1) $a = 2,\ b = 3,\ \gamma = 30°$
2) $a = 5,\ b = 4,\ \gamma = 40°$
3) $b = 7,\ c = 6,\ \alpha = 52°$
4) $a = 9,\ c = 20,\ \beta = 110°$
5) $a = 4,\ b = 5,\ \gamma = 60°$
6) $b = 2,\ c = 9,\ \alpha = 32°$
7) $a = 4,\ b = 5,\ \gamma = 120°$
8) $b = 2,\ c = 9,\ \alpha = 148°$

851. Leia võrdhaarse kolmnurga pindala, kui

1) haar on 2,5 cm ja tipunurk $\frac{\pi}{6}$
2) haar on 12 m ja tipunurk 35°
3) alus on 1 m ja tipunurk on $\frac{\pi}{3}$
4) haar on 4 cm ja alusnurk 74°39′.

852. Arvuta võrdkülgse kolmnurga pindala, kui külje pikkus on

1) 8 dm
2) 12 cm
3) 1 m
4) 0,4 mm.

853. Kolmnurga ABC pindala on 50. Leia a, kui $\angle B = 30°$ ja $c = 10$.

854. Kolmnurga XYZ pindala on 18. Leia y, kui $\angle Z = 150°$ ja $x = 8$.

855. Kolmnurga PQR pindala on 15. Olgu $p = 6$ ja $q = 10$. Leia kaks võimalikku nurga $\angle R$ suurust.

856. Kolmnurga XYZ pindala on 24. Olgu $y = 12$ ja $z = 5$. Leia kaks võimalikku nurga $\angle X$ suurust.

857. Tõesta, et rööpküliku pindala on võrdne tema kahe külje ja nendevahelise nurga siinuse korrutisega.

858. Leia rööpküliku pindala kahe külje ja ühe nurga järgi.

1) $a = 16,\ b = 20,\ \gamma = 120°$
2) $a = 100,\ b = 20,\ \gamma = 75°42′$
3) $a = 13,\ b = 2,\ \gamma = 81°54′$
4) $a = 0{,}8,\ b = 0{,}6,\ \gamma = 123°54′$

859. Leia rombi pindala, kui

1) ümbermõõt on 24 ja üks nurk on 70°
2) külg on 8 ja nurk on 13°.

860. Kolmnurgas ABC $a = b = 5$ ja $c = 6$. Leia $\angle A$ ja kolmnurga ABC pindala.

861. Korrapärase viisnurga küljed on 20 cm pikkused. Leia pindala.

862. Ringjoone sisse on joonestatud korrapärane kõõl-n-nurk. Leia selle kujunds pindala, kui 1) $n = 8$ ja $r = 20$; 2) $n = 10$ ja $r = 10$.

863. Lahenda viimane ülesanne üldkujul, esitades pindala S suuruste n ja r kaudu.

864. Ringi raadius on 1. Leia ringi sisse joonestatud korrapärase kõõltuhatnurga pindala. Võrdle tulemust ringi pindalaga.

865. Tõesta, et diagonaalid jaotavad rööpküliku neljaks pindvõrdseks kolmnurgaks.

866. Nelinurka nimetatakse kumeraks, kui ta kõik diagonaalid on selle nelinurga sees. Tõesta, et kumera nelinurga pindala võrdub diagonaalide ja diagonaalidevahelise nurga siinuse poole korrutisega:

$S = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin\phi$.

867. Kas järgmised väited on tõesed?

a) Kolmnurga pindala ei ületa ta väiksemate külgede poolt korrutist.

b) Kolmnurga pindala on alati väiksem poolest suuremate külgede korrutisest.

Põhjenda oma mõttekäiku!

868. Joonesta kolmnurk külgedega $a = 5{,}0$ cm, $b = 6{,}0$ cm ja $c = 7{,}0$ cm. Mõõda selle kolmnurga nurgad ja arvuta suhted $\frac{a}{\sin\alpha}$, $\frac{b}{\sin\beta}$ ja $\frac{c}{\sin\gamma}$. Joonesta kolmnurga ümberringjoon ja mõõda selle diameeter. Võrdle saadud arvu eelmiste suhetega.

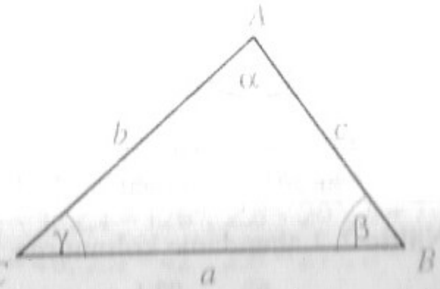
6.12. SIINUSTEOREEM

Kolmnurga lahendamine tähendab selle kolmnurga puuduvate elementide (külgede ja nurkade) leidmist. Et iga kolmnurka saab kõrguse abil tükeldada kaheks täisnurkseks kolmnurgaks, siis saab suvalist kolmnurka lahendada sarnaselt täisnurksete kolmnurkade lahendamisega. On aga ka lihtsam võimalus — lahendada kolmnurk ilma teda täisnurkseteks kolmnurkadeks jaotamata. Selleks tuleb teada mõningaid kolmnurga elementide vahelisi seoseid. Tähtsaimad neist on *siinusteoreem*[1] ja *koosinusteoreem*.

Siinusteoreem:

Kolmnurga küljed on võrdelised vastasnurkade siinustega. Kehtivad võrdused $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R$, kus R on kolmnurga ümberringjoone raadius.

Eeldus: On antud kolmnurk ABC külgedega a, b ja c ja nende vastasnurkadega α, β ja γ. (Vt. joonist)



Väide: $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R$.

[1] Siinusteoreemi oskas kasutada india matemaatik Brahmagupta (598 — 660), tõestas

Tõestus: Kirjutame kolmnurga ABC pindala välja kolm korda, iga kord erineva te külgede kaudu:

$$\frac{1}{2}ab\sin\gamma = \frac{1}{2}ac\sin\beta = \frac{1}{2}bc\sin\alpha.$$

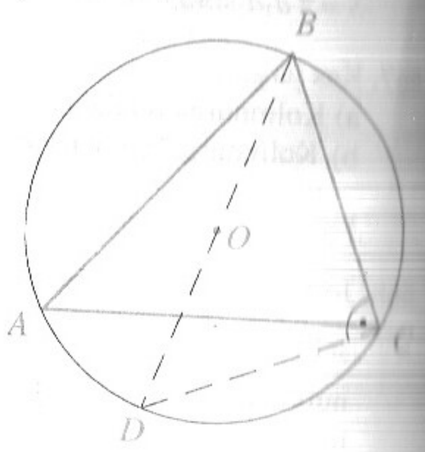
Jagame saadud võrdusi teguriga $\frac{1}{2}abc$.

Saame

$$\frac{\sin\gamma}{c} = \frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\alpha}{a}$$

ehk

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}.$$



Näitame nüüd, et kolmnurga külje ja selle külje vastasnurga siinuse suhe võrdub ümberringjoone diameetriga. Joonestame ΔABC ümberringjoone. (Vt. joonist.) Punktist B joonestame sellele ringjoonele diameetri BD. Märgime joonisele ka kõõlu CD.

Piirdenurgad BDC ja α toetuvad ühele ja samale kaarele BC, järelikult $\angle BDC = \angle\alpha$.

Et BD on diameeter, siis $\angle BCD = 90°$ ja ΔBCD on täisnurkne. Täisnurksest kolmnurgast BCD saame, et $\sin\alpha = \frac{a}{2R} \Rightarrow \frac{a}{\sin\alpha} = 2R$. Analoogiliselt saab näidata, et $\frac{b}{\sin\beta} = 2R$ ja $\frac{c}{\sin\gamma} = 2R$. ■

Siinusteoreemi abil saame lahendada kolmnurki, kui on antud

1) kaks nurka ja üks külg või

2) kaks külge ja ühe antud külje vastasnurk.

Näide 1. Lahendame kolmnurga, kui $a = 40$, $\alpha = 50°$ ja $\beta = 60°$.

$\gamma = 180° - \alpha - \beta = 180° - 50° - 60° = 70°$

Siinusteoreemi põhjal saame $\frac{40}{\sin 50°} = \frac{b}{\sin 60°} = \frac{c}{\sin 70°}$.

Saadud võrretest leiame b ja c:

$$b = \frac{40\cdot\sin 60°}{\sin 50°} \approx \frac{40\cdot 0{,}866}{0{,}7660} \approx 45{,}2$$

$$c = \frac{40\cdot\sin 70°}{\sin 50°} \approx \frac{40\cdot 0{,}9397}{0{,}7660} \approx 49{,}1$$

Näide 2. Lahendame kolmnurga, kui $a = 68$, $b = 92{,}1$ ja $\alpha = 42°$.

1) Seosest $\frac{68}{\sin 42°} = \frac{92{,}1}{\sin\beta}$ saame, et

$$\sin\beta = \frac{92{,}1\cdot\sin 42°}{68} \approx 0{,}9063.$$

Nurga β väärtuseks saame tabelist või taskuarvutil 65°. Nurk β kui pikema külje vastas olev nurk peab olema suurem kui α. Aga see nurk võib olla ka nürinurk. Et $\sin 65° = \sin(180° - 65°) = \sin 115°$, siis võib nurgaks β olla nii 65° kui ka 115°. (Vt. joonist.) Seega $\beta_1 = 65°$ ja $\beta_2 = 115°$.

1) Leiame nurga γ:

$\gamma_1 = 180° - 42° - 65° = 73°$;

$\gamma_2 = 180° - 42° - 115° = 23°$;

2) Külje c arvutamisel saame:

$$c_1 = \frac{68\cdot\sin 73°}{\sin 42°} \approx \frac{68\cdot 0{,}9563}{0{,}6691} = 97{,}2;$$

$$c_2 = \frac{68\cdot\sin 23°}{\sin 42°} \approx \frac{68\cdot 0{,}3907}{0{,}6691} = 39{,}7.$$

Vastus: a) $c_1 = 97{,}2$; $\beta_1 = 65°$; $\gamma_1 = 73°$

b) $c_2 = 39{,}7$; $\beta_2 = 115°$; $\gamma_2 = 23°$.

Näide 3. Laeva kapten märkas majakat, mis paistis 20° all laeva kursi sihilt. Laev liikus samal kursil veel 8 km ja nurk, mille all paistis majakas laevalt, suurenes 70°-ni. Leiame, kui kaugel oli selles punktis laev majakast.

Teame, et $\angle ABC = 110°$ ja $\angle ACB = 50°$. Siinusteoreemist $\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin C}{c}$ saame et $\frac{\sin 20°}{a} = \frac{\sin 50°}{8}$. Siit $a = \frac{8\cdot\sin 20°}{\sin 50°} = 3{,}6$.

Seega oli laev selles punktis majakast 3,6 km kaugusel.

869. Leia vastus kolme tüvenumbri täpsusega:

1) $a = 5$, $b = 3$, $\angle A = 35°$, $\angle B = ?$
2) $b = 4$, $c = 2$, $\angle B = 48°$, $\angle C = ?$
3) $a = 15$, $c = 10$, $\angle A = 150°$, $\angle C = ?$
4) $b = 10$, $c = 8$, $\angle B = 122°$, $\angle C = ?$
5) $b = 12$, $a = 6$, $\angle A = 30°$, $\angle B = ?$
6) $b = 10$, $c = 4$, $\angle B = 98{,}6°$, $\angle C = ?$
7) $a = 10$, $\angle A = 45°$, $\angle B = 60°$, $b = ?$
8) $a = 3$, $\angle A = 120°$, $\angle B = 20°$, $b = ?$
9) $b = 20$, $\angle A = 32°$, $\angle C = 103°$, $a = ?$
10) $c = 10$, $\angle A = 42°$, $\angle B = 27°$, $b = ?$

870. Lahenda kolmnurk.

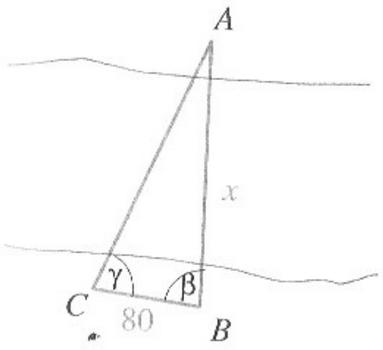
1) $a = 87$ $\alpha = 65°$ $\beta = 75°$
2) $c = 30$ $\alpha = 51°30'$ $\gamma = 65{,}5°$
3) $b = 120$ $\alpha = 10°$ $\beta = 126°$
4) $a = 60$ $\alpha = 70°24'$ $\gamma = 40°$

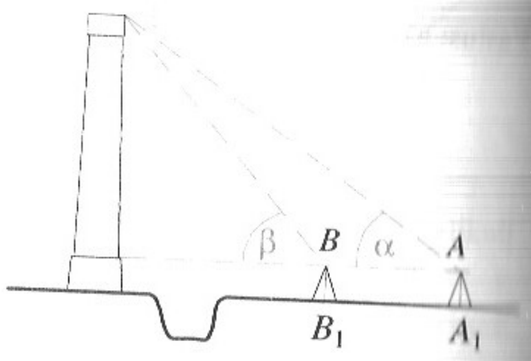
5) $a = 5$ $c = 9$ $\beta = 37°18'$
6) $b = 60$ $\alpha = 70°24'$ $\gamma = 63°$
7) $c = 100$ $\alpha = 27°$ $\beta = 83°12'$
8) $b = 28$ $b = 30$ $\gamma = 60°$
9) $b = 52$ $c = 48$ $\gamma = 52°$
10) $a = 10$ $c = 8$ $\gamma = 50°$

871. Kaks sirget tänavat moodustavad lõikudes nurga 62°. Üks neist on vä 1470 m kaugusel lõikumiskohast lühimat teed mööda ühendada teisega Leia selle põiktänava pikkus.

872. Leia kolmnurga nurgad, kui küljed on $a = 25$ m, $b = 20$ m, $c = 22$ m ja pind ala $S = 248{,}5$ m^2.

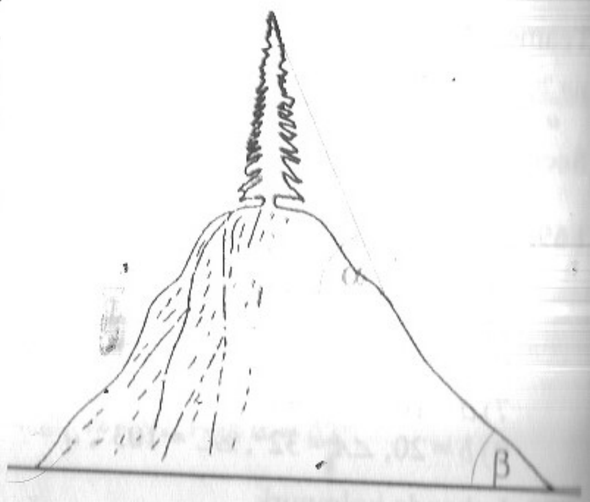
873. Üle jõe tahetakse ehitada sild AB. Leia silla pikkus, kui kaldale märgitud baas $CB = 80$ m, $\gamma = 77°$ ja $\beta = 83°$.

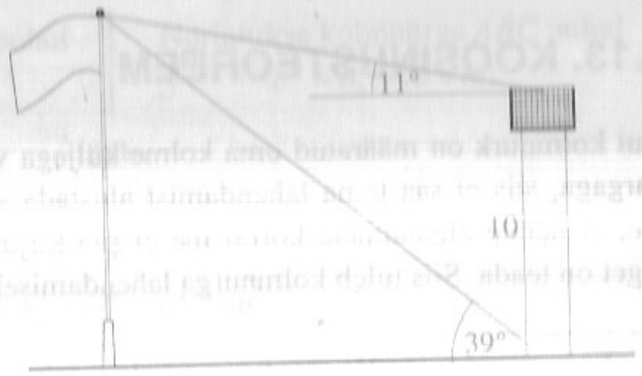




874. Ligipääsmatu vabrikukorstna kõrguse leidmiseks mõõdeti baas A_1B_1 pikkusega 11 m, mille pikendus läbib korstna jala. Nurgamõõtjaga mõõdeti nurgad $\alpha = 35°$ ja $\beta = 49°$. Nurgamõõtja kõrgus maapinnast oli 1,4 m. Leia korstna kõrgus. Leia sama meetodiga oma koolimaja kõrgus.

875. Mäenõlval, mis moodustab rõhttasapinnaga nurga β, kasvab kuusk, mille vari langeb mööda nõlva alla. Kui päikese kõrgus horisondist on α ($\alpha > \beta$), siis puu varju pikkus on l. Avalda puu kõrgus.





876. Vaatetorni tipust, mis on 10 m kõrgusel maapinnast, paistab lipuvarda tipp 11° nurga all horisondi suhtes. Maapinnalt vaatetorni jalamilt paistaks sama punkt 39° nurga all horisondi suhtes. Leia lipuvarda kõrgus.

877. Tõesta siinusteoreem täisnurkse kolmnurga puhul.

878. Tõesta, et igas kolmnurgas 30°-se nurga vastas olev külg on võrdne selle kolmnurga ümber joonestatud ringjoone raadiusega.

879. Olgu $\frac{x}{u} = \frac{y}{v} = \frac{z}{w} = k$. Näita, et siis $\frac{x+y+z}{u+v+w} = k$.

880. Kolmnurga ümbermõõt on 235 m ja kaks nurka on 43° ja 59°. Leia kolmnurga küljed. (Juhis: kasuta eelmise ülesande tulemust.)

881. Kolmnurga nurgad suhtuvad nagu 1 : 2 : 3 ja ümbermõõt on 20 cm. Leia kolmnurga küljed.

882. Kolmnurga nurgad suhtuvad nagu 2 : 3 : 4, lühim külg on 12 cm. Leia ülejäänud küljed.

883. Olgu kolmnurga nurgad α, β ja γ. Nurga γ vastas olev külg on c. Tõesta, et kolmnurga pindala $S = \frac{c^2 \sin\alpha \sin\beta}{2\sin\gamma}$.

884. On teada, et mingi kolmnurga nurkade α, β ja γ korral kehtib valem $\sin^2\gamma = \sin^2\alpha + \sin^2\beta$. Mida võib öelda kolmnurga kuju kohta?

885. Kolmnurgas ABC $a = 12$, $b = 10$, $\angle A = 50°$. Nurga C poolitaja lõikub küljega AB punktis D. Leia lõigu CD pikkus.

886. Kolmnurga kaks külge on a ja b ja nendevaheline nurk on 120°. Selle nurga poolitajatest jääb kolmnurga sisse lõik c. Näita, et $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{c}$.

5.13. KOOSINUSTEOREEM

Kui kolmnurk on määratud oma kolme küljega või kahe külje ja nendevahelise nurgaga, siis ei saa tema lahendamist alustada siinusteoreemiga. Põhjuseks on see, et nende algandmete korral me ei saa kirjutada välja võrret, millest kolmnurga mõnd liiget on teada. Siis tuleb kolmnurga lahendamiseks kasutada järgmist teoreemi:

Kolmnurga iga külje ruut on võrdne teiste külgede ruutude summaga, millest on lahutatud teiste külgede ja nendevahelise nurga koosinuse kahekordne korrutis.

s.t.

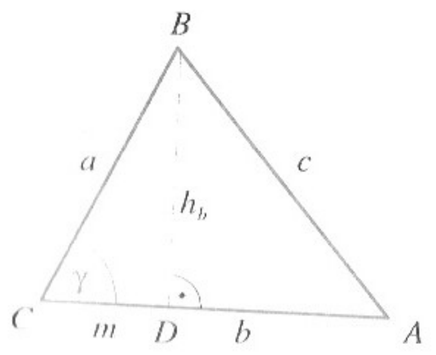
$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha \\ b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma \end{aligned} \qquad (1)$$

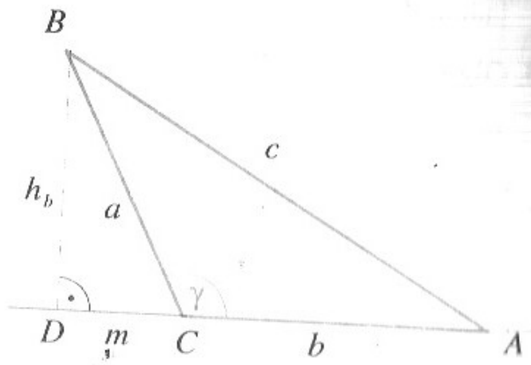
Seda teoreemi nimetatakse *koosinuseteoreemiks*[1].

Tõestus: Näitame seose $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$ kehtivust kahel juhul:

a) kui nurk γ on teravnurk ja

b) kui nurk γ on nürinurk.





Joonestame kolmnurga ABC tipust B kõrguse BD. Tähistame selle lõigu h_b. Lõiku CD tähistame m-ga. Kolmnurk ADB on täisnurkne kolmnurk. Avaldame sellest kolmnurgast külje c ruudu.

[1] Koosinusteoreemi tõestas juba Eukleides oma „Elementide" teises raamatus.

Teravnurkse kolmnurga ABC puhul	Nürinurkse kolmnurga ABC puhul
$c^2 = h_b^2 + (b-m)^2$	$c^2 = h_b^2 + (b+m)^2$

ehk

$c^2 = h_b^2 + b^2 - 2bm + m^2$	$c^2 = h_b^2 + b^2 + 2bm + m^2$

Et $h_b^2 + m^2 = a^2$, siis

$c^2 = a^2 + b^2 - 2bm$	$c^2 = a^2 + b^2 + 2bm$
Et teravnurkse ΔABC puhul	Et nürinurkse ΔABC puhul
$m = a\cos\gamma$	$m = a\cos(180^\circ - \gamma) = -a\cos\gamma$,

siis asendades m viimasesse võrdusesse, saame mõlemal juhul valemiks

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma.$$

Kui γ on täisnurk, siis saab kolmnurgale ABC rakendada Pythagorase teoreemi: $c^2 = a^2 + b^2$. Et võrdusest $\gamma = 90^\circ$ järeldub võrdus $\cos\gamma = 0$, siis kehtib ka sel erijuhul valem $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$, ainult valemis on liige $2ab\cos\gamma$ võrdne nulliga[1].

Analoogiliselt saab näidata, ka seoste $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$ ja $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$ kehtivust. ■

Valemid (1) võimaldavad arvutada kolmnurga külje kahe ülejäänud külje ja nendevahelise nurga järgi.

Näide 1. Lahendame kolmnurga, kui $a = 17{,}0$, $b = 36{,}0$ ja $\gamma = 28^\circ$.

1) Koosinusteoreemist saame:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma = 17^2 + 36^2 - 2\cdot 17\cdot 36\cdot\cos 28^\circ = 289 + 1296 - 1081 = 504.$$

$$c = \sqrt{504} \approx 22{,}5.$$

2) Leiame väiksema puuduvatest nurkadest; selleks on teravnurk α:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{c}{\sin\gamma} \Rightarrow \sin\alpha = \frac{17\cdot\sin 28^\circ}{22{,}5} \Rightarrow \alpha = 20^\circ 40'.$$

3) Et $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$, siis

$$\beta = 180^\circ - 28^\circ - 20^\circ 40' = 131^\circ 20'.$$

Kui kolmnurga lahendamisel on vaja leida kaks nurka, nagu viimases näites, siis tuleb esmalt arvutada väiksem nurk (see nurk, mis on lühema külje vastas) ning seejärel 180°-st lahutamise teel suurem nurk. Põhjus on selles, et kolmnurga suurem nurk võib olla ka nürinurk, mida saab kõige lihtsamini leida just nii.

[1] Seega võib öelda, et koosinusteoreem on Pythagorase teoreemi üldistus.

Valemeist (1) saame avaldada kolmnurga nurkade koosinused:

$$\cos\gamma = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$$
$$\cos\beta = \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac} \qquad (2)$$
$$\cos\alpha = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

Valemite (2) abil saab leida kolmnurga nurgad, kui kõik küljed on antud.

Näide 2. Lahendame kolmnurga, kui küljed on $a = 8$, $b = 10$ ja $c = 16$.

Leiame kõigepealt väiksemad nurgad, s.o. nurgad α ja β. Nurga α leiame koosinusteoreemi abil:

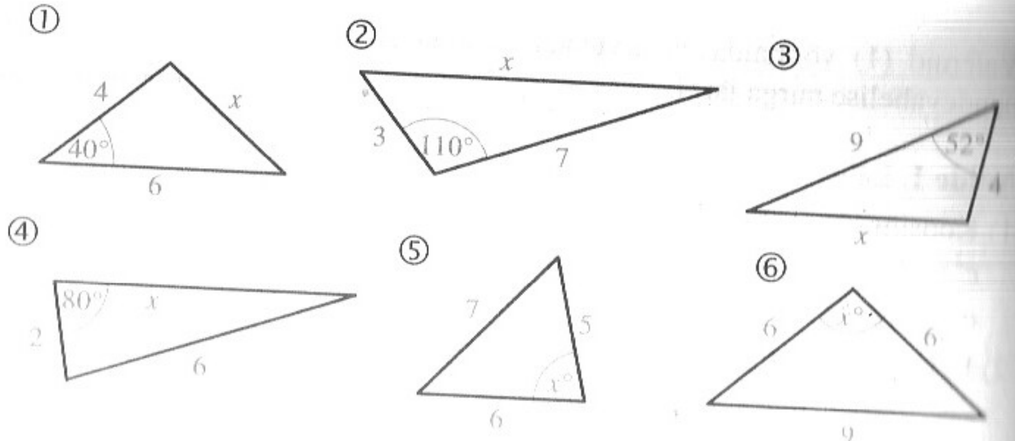
$$\cos\alpha = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \frac{10^2+16^2-8^2}{2\cdot 10\cdot 16} = 0{,}9125 \Rightarrow \alpha = 24°9'$$

Nurga β leiame siinusteoreemi abil:

$$\sin\beta = \frac{10\cdot\sin 24°9'}{8} = \frac{10\cdot 0{,}4091}{8} = 0{,}5114 \Rightarrow \beta = 30°46'$$

Et $\alpha+\beta+\gamma = 180°$, siis $\gamma = 180° - (24°9' + 30°46') = 125°5'$.

887. Kasuta koosinusteoreemi x väärtuse leidmiseks.



888. Leia vastus kolme tüvenumbri täpsusega.

1) $a = 6$, $b = 10$, $\angle C = 60°$, $c = ?$
2) $a = 3$, $b = 5$, $\angle C = 120°$, $c = ?$
3) $b = 4$, $c = 6$, $\angle A = 55°$, $a = ?$
4) $c = 2$, $a = 1$, $\angle B = 42°$, $b = ?$
5) $x = 7$, $y = 4$, $\angle Z = 120°$, $z = ?$
6) $p = 10$, $r = 8$, $\angle Q = 100°$, $q = ?$
7) $e = 2$, $f = 4$, $\angle D = 90°$, $d = ?$
8) $y = 8$, $z = 5$, $\angle X = 60°$, $x = ?$
9) $r = 5$, $s = 6$, $t = 7$, $\angle T = ?$
10) $c = 6$, $b = 10$, $a = 14$, $\angle A = ?$
11) $y = 5$, $x = 12$, $z = 10$, $\angle X = ?$
12) $p = 5$, $q = 7$, $r = 8$, $\angle Q = ?$

889. Lahenda kolmnurk.

1) $c = 18$, $b = 10$, $\alpha = 60°$
2) $a = 2$, $b = 3$, $\gamma = 14°30'$
3) $c = 5$, $a = 3$, $\beta = 53°8'$
4) $b = 4{,}5$, $c = 10$, $\alpha = 116°$
5) $a = 10$, $b = 20$, $\gamma = 98°6'$
6) $a = 13$, $b = 20$, $c = 15$
7) $a = 4$, $b = 5$, $c = 3$
8) $a = 6$, $b = 9$, $c = 8{,}4$
9) $a = 12$, $b = 29$, $c = 16$
10) $a = 0{,}24$, $b = 1{,}2$, $c = 0{,}98$

890. Kas antud kolmnurk on täisnurkne? (Leia cos C ja nurga $\angle C$ suurus ning kasuta seejärel Pythagorase teoreemi pöördteoreemi.)

1) $a = 9$, $b = 40$, $c = 41$
2) $a = 441$, $b = 1960$, $c = 2009$

891. Vändra on Arukülast 79 km lõuna pool, Audru on Vändrast 47 km edelas. Kui kaugel on linnulennul Aruküla Audrust?

892. Kaks laeva väljusid sadamast ühel ja samal ajal kiirusega 30 km/h ja 45 km/h. Kolme tunni pärast olid need laevad teineteisest 120 km kaugusel. Leia nurk laevade kursside vahel, kui on teada, et mõlemad laevad liikusid sirgjooneliselt.

893. Kolm ringi raadiusega 8 cm, 12 cm ja 15 cm puudutavad üksteist väliselt. Leia nurgad nende ringide keskpunkte ühendavate sirgete vahel.

894. Kolmnurga küljed on 14 cm, 18 cm ja 23 cm. Leia pindala.

895. Kolmnurga ABC pindala on 12, $a = 5$, $b = 6$. Leia

a) $\sin C$;
b) $\cos C$ kaks võimalikku väärtust;
c) külje c võimalikud väärtused.

896. $ABCD$ on trapets, kus $AB \parallel DC$, $AB = 5$, $BC = 3\sqrt{2}$, $\angle BCD = \frac{\pi}{4}$ ja $\angle CDA = \frac{\pi}{3}$. Kas DC pikkus on

a) $7 + \frac{2}{3}\sqrt{3}$, b) 8, c) $9\frac{1}{2}$, d) $8 + \sqrt{3}$, e) $8 + 3\sqrt{3}$?

897. Kolmnurga ABC küljed on $a = 2$, $b = 4$ ja $c = 3$. Leia tipust A tõmmatud mediaani pikkus.

898. Jõe mõlemal kaldal teineteise vastas kasvavad kaks palmi. Palmide kõrgused on 20 ja 30 küünart, palmide vahekaugus on 50 küünart. Kummagi palmi tipus istub lind. Äkki märkavad mõlemad linnud üheaegselt veepinnal kala, kes on veepinnal palmide vahel. Kala on mõlemast linnust võrdsel kaugusel. Kui kaugel kõrgema palmi tüvest on kala? (Araabia ülesanne XI sajandist.)

899. Näita, et kui $\angle\gamma = 180°$, järeldub koosinusteoreemist võrdus $c = a + b$.

900. Tõesta, et rööpküliku diagonaalide ruutude summa võrdub külgede ruutude summaga.

901. On teada, et mingi kolmnurga nurkade α, β ja γ korral kehtib võrdus $\frac{\sin^2\beta + \sin^2\gamma - \sin^2\alpha}{\sin\beta \cdot \sin\gamma} = 1$. Kui suur on nurk α?
(Ülesanne Shanghai keskkooli vanema astme sisseastumiskatsetelt 1982.)

5.14. KOLMNURKADE LAHENDAMISEST

Kolmnurga ABC elementideks nimetatakse selle kolmnurga kolme külge a, b ja c ning kolme nurka α, β ja γ. Kolmnurga lahendamine on kolmnurga antud elementide järgi kolmnurga puuduvate elementide leidmine.

Selleks, et lahendada kolmnurk, peab olema antud vähemalt kolm tema elementi, nende hulgas vähemalt üks külgedest.

Kolmnurkade lahendamisel võib tekkida neli erinevat olukorda, olenevalt sellest, mis on antud:

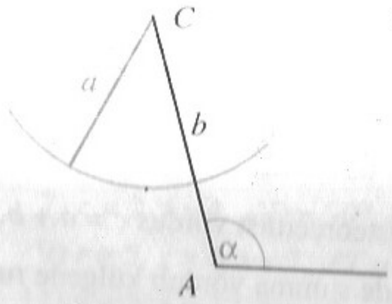
1) üks külg ja kaks nurka;
2) kaks külge ja neist ühe vastasnurk;
3) kaks külge ja külgede vaheline nurk;
4) kolm külge.

Kõigil neljal juhul kasutame siinusteoreemi ja valemit $\alpha + \beta + \gamma = 180°$. Kolmandal ja neljandal juhtumil on enne siinusteoreemi rakendamist vaja kasutada koosinusteoreemi.

Algandmed võivad olla sellised, et on olemas üks antud algandmetele vastav kolmnurk; teatud algandmete korral kolmnurka ei teki (näiteks, kui meil on antud kolm küljepikkust, aga mingi kahe külje summa on väiksem kui kolmas külg . . .). Teatud algandmete korral võib leiduda ka kaks erinevat antud tingimustele vastavat kolmnurka (vt. siinusteoreemi näide 2). Viimane olukord võib tekkida juhul, kui on antud kaks külge ja neist lühema külje vastasnurk (niisiis teise juhtumi alajuhtum).

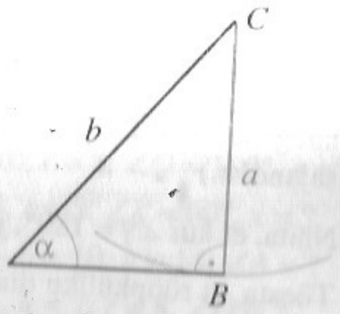
Olgu antud a, b ja α, kusjuures $a < b$.
Teeme võimalike erinevate situatsioonide kohta joonised:

a) $a < b$
$\alpha \geq 90°$



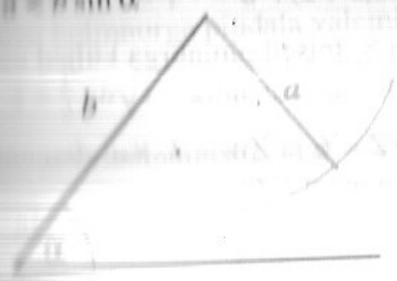
Kolmnurka ei teki

b) $a < b$;
$\alpha < 90°$
$a = b \sin\alpha$



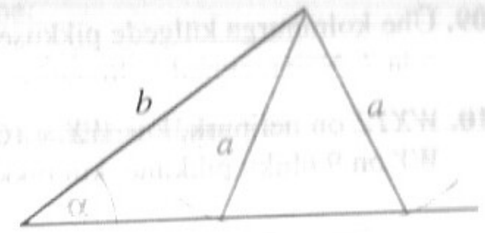
Tekib üks kolmnurk, kusjuures $\angle\beta < 90°$

c) $a = b$;
$\alpha < 90°$
$a = b \sin\alpha$



Kolmnurka ei teki

d) $a < b$;
$\alpha < 90°$
$a > b \sin\alpha$



Tekib kaks kolmnurka, neist ühe korral $\angle\beta < 90°$, teise korral $\angle\beta > 90°$

Kui kolmnurga otsitavad elemendid on leitud, siis peab saadud tulemusi kontrollima. Õige lahenduse korral on

1) nurkade summa $\alpha + \beta + \gamma = 180°$,
2) mistahes kahe külje summa on suurem kolmandast küljest,
3) suurema külje vastas ka suurem nurk.

Lahendust võib kontrollida ka graafiliselt: joonestada antud elementidega kolmnurk ja jooniselt mõõta otsitavad suurused. Seejärel tuleb võrrelda mõõtmistulemusi arvutustulemustega. Muidugi tuleb seejuures arvestada, et mõõtmistulemused on alati ligikaudsed.

902. Teame ainult kolmnurga nurkade suurusi. Kas sellest piisab kolmnurga külgede leidmiseks?

903. Tee kindlaks, kas antud ülesandes tuleb kõigepealt kasutada siinusteoreemi või koosinusteoreemi, või piisab täisnurkse kolmnurga lahendusoskusest. Kas antud algandmed määravad kolmnurga? Kui määravad, siis lahenda kolmnurk.

1) $a = 47$, $b = 59$, $\alpha = 108°$
2) $a = 400$, $\alpha = 36°40'$, $\beta = 79°50'$
3) $a = 242$, $b = 767$, $\beta = 36°53'$
4) $a = 400$, $b = 500$, $\beta = 40°$
5) $\alpha = 40°$, $\beta = 60°$, $\gamma = 80°$
6) $a = 320$, $b = 400$, $\gamma = 110°21'$
7) $a = 13$, $b = 18$, $c = 15$
8) $\alpha = 40°$, $\gamma = 50°$, $b = 4$
9) $b = 28$, $c = 42$, $\alpha = 124°$
10) $a = 23$, $b = 31$, $c = 55$
11) $a = 370$, $\beta = 86°30'$, $\gamma = 50°50'$
12) $a = 19$, $b = 34$, $c = 49$

904. Kolmnurgas ABC kehtivad võrdused $a = 6$, $b = 10$ ja $\gamma = 120°$. Leia pikemale küljele tõmmatud mediaani pikkus.

905. Leia kolmnurga RST pindala, kui $r = 10$, $s = 14$ ja $t = 16$.

906. Leia kolmnurga PQR pindala, kui $\angle P = 20°$, $\angle Q = 100°$ ja $p = 4$.

907. Rombi külje pikkus on 10 ja nürinurk 140°. Leia diagonaalide pikkused.

908. Tõesta, et kolmnurgas ABC kehtib võrdus $\frac{\sin(A+C)}{\sin(B+C)} = \frac{b}{a}$.

909. Ühe kolmnurga külgede pikkused on 5, 7 ja 8; teise kolmnurga küljed on 3, 5 ja 7. Näita, et neil kolmnurkadel on üks ühesuurune nurk.

910. $WXYZ$ on nelinurk, kus $WX = 10$, $XY = 8$, $YZ = 6$ ja $ZW = 7$. Kui diagonaal WY on 9 ühiku pikkune, kui pikk on siis diagonaal XZ?

5.15. KOLMNURGA PINDALA VALEMID

Nagu teada, võrdub kolmnurga pindala aluse ja alusele joonestatud kõrguse poole korrutisega:

$$S = \frac{1}{2}ah.$$

Sellest valemist tuletasime kolmnurga pindala valemi juhuks, kui teadsime kahte külge ja nendevahelist nurka:

$$S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma.$$

Sellest valemist saame tuletada valemi kolmnurga pindala arvutamiseks ka *ühe külje ja kolm nurga järgi*.

Avaldame siinusteoreemi põhjal külje b:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} \Rightarrow b = \frac{a\cdot\sin\beta}{\sin\alpha}$$

Asendame b avaldise viimasesse pindala valemisse, saame

$$S = \frac{a^2\sin\beta\sin\gamma}{2\sin\alpha}.$$ [1]

Analoogiliselt on tuletatavad valemid

$$S = \frac{b^2\sin\alpha\sin\gamma}{2\sin\beta} \quad \text{ja} \quad S = \frac{c^2\sin\alpha\sin\beta}{2\sin\gamma}.$$

Näide: Arvutame kolmnurga pindala, teades, et $a = 18$ cm, $\alpha = 42°$ ja $\beta = 62°$.

$\gamma = 180° - (\alpha + \beta) = 180° - 104° = 76°$.

$$S = \frac{a^2\sin\beta\sin\gamma}{2\sin\alpha} = \frac{18^2\sin 62°\sin 76°}{2\sin 42°} \approx 207 \text{ cm}^2.$$

Leiame kolmnurga pindala valemi juhuks, kui kolmnurk on antud oma kolme küljega. Lähtume kolmnurga pindala valemist kahe külje ja nende külgede vahelise nurga korral:

[1] Valemi tuletas esimesena saksa matemaatik Friedrich Wilhelm von Oppel (1720 — 1769).

$S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$.

Võrdusest $\sin^2\gamma + \cos^2\gamma = 1$ avaldame $\sin\gamma = \sqrt{1-\cos^2\gamma}$. Saadud tulemuse asendame kolmnurga pindala valemisse ja saame:

$$S = \frac{1}{2}ab\sqrt{1-\cos^2\gamma} = \frac{1}{2}\sqrt{a^2b^2(1-\cos^2\gamma)} = \frac{1}{2}\sqrt{a^2b^2 - (ab\cos\gamma)^2}.$$

Kosinusteoreemist $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$ avaldame $ab\cos\gamma$:

$$ab\cos\gamma = \frac{a^2+b^2-c^2}{2}.$$

Tulemuse asendame pindala valemisse ja teisendame saadud avaldist:

$$S = \frac{1}{2}\sqrt{a^2b^2 - \left(\frac{a^2+b^2-c^2}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{\left(ab + \frac{a^2+b^2-c^2}{2}\right)\left(ab - \frac{a^2+b^2-c^2}{2}\right)} =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2ab + a^2 + b^2 - c^2}{2}\cdot\frac{2ab - a^2 - b^2 + c^2}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{(a+b)^2 - c^2}{2}\cdot\frac{c^2 - (a-b)^2}{2}} =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{(a+b+c)(a+b-c)(c+a-b)(c-a+b)}{4}} = \sqrt{\frac{(a+b+c)(a+b-c)(c+a-b)(c-a+b)}{2\cdot 2\cdot 2\cdot 2}}$$

Väätame juurcaluseid tegureid:

$a + b + c$ on kolmnurga ümbermõõt, tähistame selle $2p$-ga.

Siis $\frac{a+b+c}{2} = p$ **on pool kolmnurga ümbermõõdust.**

Sama tähistust $\left(\frac{a+b+c}{2} = p\right)$ kasutades saame:

$$\frac{a+b-c}{2} = \frac{a+b+c-2c}{2} = \frac{2p-2c}{2} = p - c$$

$$\frac{c+a-b}{2} = \frac{a+b+c-2b}{2} = \frac{2p-2b}{2} = p - b$$

$$\frac{c-a+b}{2} = \frac{a+b+c-2a}{2} = \frac{2p-2a}{2} = p - a$$

Asendades need tulemused pindala valemisse, saame

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}, \text{ kus } p = \frac{a+b+c}{2}.$$

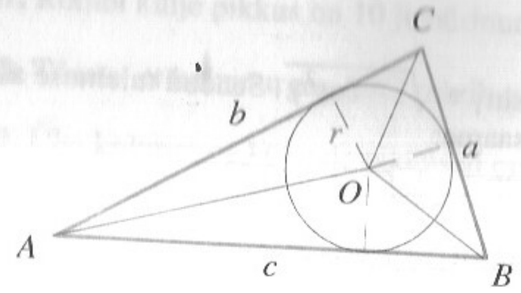
Seda valemit nimetataks *Heroni*[1] *valemiks*.

Näide: Kolmnurga küljed on 23 cm, 18 cm ja 11 cm. Leiame pindala.

Leiame pool ümbermõõtu: $p = \frac{a+b+c}{2} = \frac{23+18+11}{2} = 26$ cm

$$S = \sqrt{26(26-23)(26-18)(26-11)} = \sqrt{9360} \approx 97 \text{ cm}^2.$$

[1] Heron oli kreeka füüsik ja matemaatik, kes elas I saj. p. Kr. Aleksandrias. Heroni pindalavalemit [illegible] Heronit, arvatavasti tuletas selle valemi Archimedes (287 — 212 e. Kr.).



Kolmnurga pindala võib leida ka kolme külje ja siseringjoone raadiuse kaudu. Joonestame ΔABC siseringjoone. Olgu selle raadius r. Kolmnurga ABC pindala võrdub kolmnurkade AOB, AOC ja BOC pindalade summaga:

$S = S_{AOB} + S_{AOC} + S_{BOC}$.

Et nende kolmnurkade alused on c, b ja a ning kõrgused on võrdsed r-ga, siis

$$S = \frac{1}{2}cr + \frac{1}{2}br + \frac{1}{2}ar = \frac{r(a+b+c)}{2}.$$

Suurust $\frac{(a+b+c)}{2}$ (s.o. pool kolmnurga ümbermõõdust) tähistame tähega p.

Seega saame valemi

$$S = pr.$$

Kolmnurga pindala võrdub tema poole ümbermõõdu ja siseringjoone raadiuse korrutisega.

Mõnede ülesannete lahendamisel on kasulik teada seost kolmnurga pindala, külgede a, b ja c ning ümberringjoone raadiuse vahel. Siinusteoreemist teame, et $\frac{c}{\sin\gamma} = 2R$. Siit $\sin\gamma = \frac{c}{2R}$. Asendades $\sin\gamma$ väärtuse kolmnurga pindala valemisse $S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$, saame

$$S = \frac{abc}{4R}.$$ [1]

Kolmnurga pindala valemeid saame kasutada ka hulknurga pindala leidmiseks. Hulknurga tükeldame sobival viisil kolmnurkadeks; hulknurga pindala võrdub nende kolmnurkade pindalade summaga.

Näide: Avaldame korrapärase kaksteistnurga pindala, kui tema külje pikkus on a. Ühendades kaksteistnurga tipud keskpunktiga, saame 12 võrdset võrdhaarset kolmnurka. Iga sellise kolmnurga alus on a, tipunurk on $360° : 12 = 30°$. Alusnurgad on $\frac{180° - 30°}{2} = 75°$. Leiame ühe sellise kolmnurga pindala:

[1] Valemi tuletas esimesena René Decartes (1596 — 1650).

$$S = \frac{a^2 \sin 75° \sin 75°}{2\sin 30°} = a^2 \sin^2 75° = a^2\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right)^2 = a^2\frac{8+4\sqrt{3}}{16}.$$

Kaheksnurga pindala on 12 korda suurem kolmnurga pindalast, seega

$$S = 12a^2\frac{8+4\sqrt{3}}{16} = 3a^2(2+\sqrt{3}) \approx 11{,}2a^2.$$

911. Arvuta kolmnurga pindala.

1) $a = 93$ $b = 65$ $\gamma = 42°$
2) $b = 4{,}42$ $c = 5{,}72$ $\alpha = 65°20'$
3) $a = 50{,}8$ $c = 32{,}3$ $\beta = 23°30'$
4) $a = 20{,}73$ $b = 36{,}26$ $\beta = 70°45'$
5) $a = 48{,}8$ $\beta = 106°$ $\gamma = 25°20'$
6) $a = 98{,}55$ $\alpha = 23°42'$ $\beta = 47°24'$
7) $b = 0{,}307$ $\alpha = 32°40'$ $\beta = 70°20'$
8) $a = 28$ $b = 35$ $c = 42$
9) $a = 39$ $b = 42$ $c = 45$
10) $a = 0{,}18$ $b = 0{,}23$ $c = 0{,}09$

912. Leia kolmnurga sise- ja ümberringjoone raadius, kui küljed on

1) 21 cm, 17 cm ja 10 cm;
2) 4 dm, 13 dm ja 15 dm.

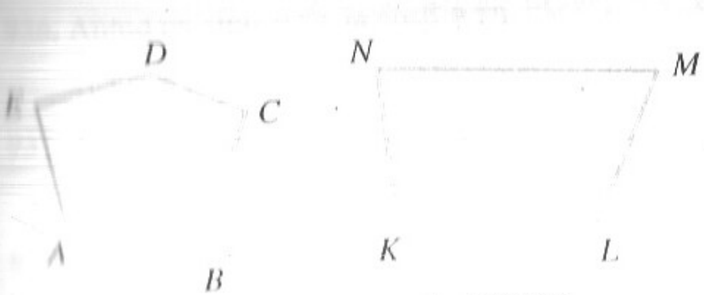
913. Kolmnurga küljed on 25 dm, 29 dm ja 36 dm. Leia kõige väiksem kõrgus.

914. Kolmnurga küljed on 25 dm, 39 dm ja 56 dm. Leia kõige suurem kõrgus.

915. Leia kolmnurga kolmas külg, kui on antud kaks külge ja pindala.

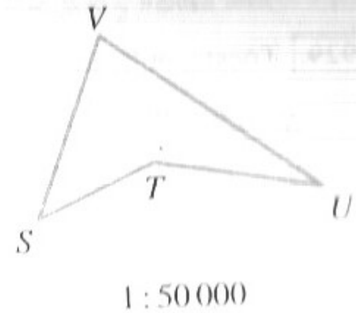
1) $c = 17$ m ja $b = 28$ m ning $S = 210$ m^2.
2) $a = 7$ dm, $b = 11$ dm, $S = 12\sqrt{10}$ dm^2.

916. Leia maatükkide pindalad.



1 : 10 000

1 : 100 000



1 : 50 000

917. Korrapärase n-nurga külg on a. Leia selle kujundi pindala.

1) $n = 6$ ja $a = 1$
2) $n = 8$ ja $a = 2$
3) $n = 10$ ja $a = 10$.

918. Kolmnurga kaks külge on 17 cm ja 21 cm ning kolmandale küljele tõmmatud mediaan on 5 cm. Leia pindala.

919. Kahe teineteisega lõikuva ringjoone raadiused on 17 cm ja 39 cm ning keskpunktide vaheline kaugus 44 cm. Leia ühise kõõlu pikkus.

920. Kolmnurga küljed ja pindala väljenduvad nelja üksteisele järgneva naturaalarvuga. Leia kolmnurga küljed ja määra kolmnurga liik.

921. Kolmnurga ümbermõõt on 24, siseringjoone raadius on 2 ja ümberringjoone raadius on 5. Leia küljed.

922. Ringjoon jaotati suhtes 2 : 3 : 5 : 8 ning jaotuspunktid ühendati järjestikku üksteisega. Arvuta tekkinud nelinurga pindala, kui ringi pindala on 315 dm^2.

923. Tõesta, et võrdkülgse kolmnurga pindala saab arvutada valemiga $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

924. Tõesta, et kolmnurga pindala saab arvutada valemiga $S = bc\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$.

925. Tõesta, et kolmnurga siseringjoone raadius avaldub järgmiselt:

$$r = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}.$$

926. Tõesta, et kehtib valem $R \cdot r = \frac{abc}{2(a+b+c)}$.

927. Tõesta, et ringjoone sisse joonestatud nelinurga pindala on $\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$, kus p on pool ümbermõõtu ja a, b, c ning d on nelinurga küljed.

928. Tõesta, et kolmnurga külgede, nurkade ja siseringjoone raadiuse vahel kehtivad järgmised seosed:

$\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{r}{p-a}$; $\tan\frac{\beta}{2} = \frac{r}{p-b}$; $\tan\frac{\gamma}{2} = \frac{r}{p-c}$.

929. Tõesta, et kehtivad järgmised valemid:

$S = p^2\tan\frac{\alpha}{2}\tan\frac{\beta}{2}\tan\frac{\gamma}{2}$[1] (Kasuta eelmises ülesandes saadud valemeid.)

$S = r^2\cot\frac{\alpha}{2}\cot\frac{\beta}{2}\cot\frac{\gamma}{2}$.

930. Tõesta, et täisnurkses kolmnurgas külgedega a, b ja c ja nurkadega α, β ja γ kehtib võrdus: $\tan\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(a+b-c)(a-b+c)}{(b+c+a)(b+c-a)}}$.

931. Tõesta, et kehtivad Molweide[2] valemid:

$$\frac{a+b}{c} = \frac{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\sin\frac{\gamma}{2}} \quad \text{ja} \quad \frac{a-b}{c} = \frac{\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}{\cos\frac{\gamma}{2}}.$$

[1] Valemi tuletas August Leopold Grelle (1780 — 1856).

[2] Karl Branden Molweide esitas need valemid ühes oma 1808. a. ilmunud töös. Esimese valemi tuletas I. Newton 1707. a. oma Üldise

932. Matkaja seisab järve kaldal kõrgusel h ja vaatab vastaskaldal olevat mäge. Mäe tipp paistab β kraadi horisondist kõrgemal. Mäe peegeldus järve pinnal on α kraadi horisondist madalamal. Näita, et mäe kõrgus H avaldub järgmiselt: $H = h \cdot \frac{\sin(\alpha^\circ + \beta^\circ)}{\sin(\alpha^\circ - \beta^\circ)}$. Kõik kõrgused on arvestatud järve pinnast.

KORDAMISÜLESANDEID

933. Leia ilma tabelite ja taskuarvuti abita.

a) $\cos 75^\circ$ b) $\sin 105^\circ$ c) $\cos 15^\circ$ d) $\tan 15^\circ$

Mitmel erineval viisil oskad neid trigonomeetriliste funktsioonide väärtusi ilma arvuti abita leida?

934. Lihtsusta avaldis.

a) $\sin 26^\circ\cos 17^\circ + \cos 26^\circ \sin 17^\circ$ b) $\cos 78^\circ\cos 32^\circ + \sin 78^\circ \sin 32^\circ$

c) $\frac{\tan 20^\circ + \tan 5^\circ}{1 - \tan 20^\circ \tan 5^\circ}$ d) $\frac{\tan 7\alpha - \tan 3\alpha}{\tan 7\alpha \cdot \tan 3\alpha + 1}$

e) $2\sin\frac{\pi}{12}\cos\frac{\pi}{12}$ f) $\cos\frac{2\pi}{8} - \sin\frac{2\pi}{8}$

g) $\frac{2\tan 40^\circ}{1 - \tan^2 40^\circ}$ h) $\sqrt{\frac{1+\cos 4\alpha}{2}}$

935. Kui $\tan 3\alpha = 3$ ja $\tan\beta = \frac{1}{2}$, siis leia $\tan(\alpha+\beta)$ ning $\tan(\alpha-\beta)$.

936. Antud on $\sin\alpha = \frac{5}{13}$ ja $\cos\beta = \frac{3}{5}$; $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ ning $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$. Leia $\sin(\alpha+\beta)$, $\cos(\alpha+\beta)$, $\sin(\alpha-\beta)$ ja $\cos(\alpha-\beta)$.

937. Tõesta, et $\alpha + \beta = 90^\circ$, kui

$\sin\alpha = \frac{40}{41}$, $\sin\beta = \frac{9}{41}$ ning $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ ja $0^\circ < \beta < 90^\circ$.

938. Lihtsusta avaldis.

a) $\frac{\cos\alpha\cos\beta - \cos(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha-\beta) - \sin\alpha\sin\beta}$ b) $\frac{2\cos\alpha\cdot\sin\beta - \sin(\alpha+\beta)}{2\cos\alpha\cdot\cos\beta - \cos(\alpha+\beta)}$.

939. Leida $\sin 2\alpha$, $\cos 2\alpha$ ja $\tan 2\alpha$, kui

a) $\sin\alpha = 0{,}6$ ja $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ b) $\cos\alpha = -\frac{5}{13}$ ja $\pi < \alpha < \frac{3}{2}\pi$.

940. Leia $\sin\frac{\alpha}{2}$, $\cos\frac{\alpha}{2}$ ja $\tan\frac{\alpha}{2}$, kui

a) $\cos\alpha = \frac{3}{4}$ ja $270^\circ < \alpha < 360^\circ$ b) $\sin\alpha = -\frac{4}{5}$ ja $\pi < \alpha < \frac{3}{2}\pi$.

941. Risttahuka diagonaali ja temaga ühest tipust väljuvate servade vahelised nurgad on α, β ja γ. Tõesta, et $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$ ja arvuta γ, kui

942. Tõesta samasused.

a) $\cos(\alpha+\frac{\pi}{4})\cdot\cos(\alpha-\frac{\pi}{4})=-\sqrt{2}\sin\alpha$.

b) $\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\tan\alpha-\tan\beta}=\cos\alpha\cdot\cos\beta$

c) $\frac{2\sin\alpha\cdot\cos\beta-\sin(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha-\beta)-2\sin\alpha\cdot\sin\beta}=\tan(\alpha+\beta)$

d) $\tan(\alpha+\beta)-\tan\alpha-\tan\beta=\tan(\alpha+\beta)\cdot\tan\alpha\cdot\tan\beta$

e) $\frac{\tan^2\alpha-\tan^2\beta}{1-\tan^2\alpha\cdot\tan^2\beta}=\tan(\alpha+\beta)\cdot\tan(\alpha-\beta)$

f) $\sin^4\alpha-\cos^4\alpha=-\cos2\alpha$

g) $2\sin\alpha\cdot\cos\alpha\cdot(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)=\frac{1}{2}\sin4\alpha$

h) $\sqrt{\frac{1-\sqrt{\frac{1+\cos4\beta}{2}}}{2}}=\cos\beta$, kui $\pi<2\beta<\frac{3}{2}\pi$.

943. Kahe nurga summa koosinus on 0,3 ja samade nurkade vahe koosinus on 0,8. Arvuta nende nurkade siinuste korrutis.

944. Lahenda järgmised kaldnurksed kolmnurgad.

a) $c=35\ \ \alpha=35°\ \ \beta=68°$

b) $c=628\ \ b=480\ \ \gamma=55°10'$

c) $a=31{,}5\ \ b=51{,}8\ \ \alpha=33°40'$

d) $a=3{,}4\ \ c=2{,}9\ \ \beta=108°$

e) $a=10\ \ b=15\ \ c=20$

f) $a=3{,}7\ \ b=6{,}8\ \ c=2{,}9$

g) $a=14\ \ b=30\ \ \alpha=70°$

h) $b=4\ \ a=3\ \ \sin\alpha=0{,}6$

945. Millise kuju omandab siinuslause, kui kolmnurk on:
1) täisnurkne; 2) võrdhaarne ja täisnurkne; 3) võrdkülgne?

946. Millise kuju saavad koosinusteoreemi valemid, kui kolmnurk on
1) täisnurkne; 2) võrdhaarne ja täisnurkne?

947. Rööpküliku üks külg on 1,5 m, diagonaal on 4,4 m, diagonaali vastas olev nurk on 107°57′. Leia rööpküliku teine nurk ja pindala.

948. On antud kolmnurga kaks külge. Milline peab olema nurk nende vahel, et kolmnurga pindala oleks maksimaalne?

949. Mast, mille kõrgus on 25 m, asetseb koonusekujulise mäe tipus. Mäenõlva punktist, mis on masti jalast 44 m kaugusel, paistab masti tipp mäenõlva suhtes 9°-se nurga all. Leia mäenõlva kaldenurk horisondi suhtes.

950. Missuguseid kolmnurga pindala valemeid tead? Leia antud algandmete põhjal kolmnurkade pindala ja põhjenda iga ülesande korral, miks kasutasid just seda valemit.

a) $a=7{,}6\ \ h_a=2{,}5$

b) $a=7\ \ b=8\ \ \gamma=150°$

c) $b=4\ \ \alpha=42°\ \ \beta=56°$

d) $p=6\ \ r=1$

e) $a=3\ \ b=3\ \ c=3$

f) $a=41\ \ b=40\ \ c=9\ \ R=20{,}5$

g) $a=24\ \ b=25\ \ c=7$

h) $r=\sqrt{3}\ \ a=b=c=6$.

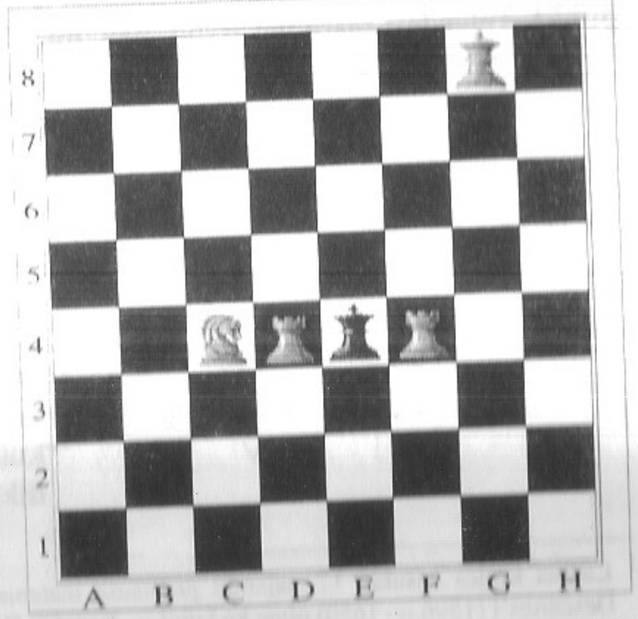
VI peatükk. VEKTOR TASANDIL. JOONE VÕRRAND

61. PUNKTI KOORDINAADID TASANDIL

Igapäevaelus läheb meil vaja oskust orienteeruda tasandil. Näiteks maakaardi või linnaplaani kasutamisel, kinos piletile märgitud istekoha leidmisel, male- või lahekäikude ülesmärkimisel ja paljudes muudes olukordades. See kõik on nii lihtne, et ei tulegi pähe, et kõikjal seal kasutatakse matemaatikat. *Selleks, et orienteeruda tasandil, on vaja kasutada koordinaadistikku.*

Võtame koordinaadistikust näiliselt kaugel oleva näite — malelaua. Malelaud on jaotatud ruudukesteks. Laua ühele servale on kirjutatud tähed A, B, C, D, E, F, G, ja H ning teisele servale numbrid 1 kuni 8. Seetõttu on igal ruudul oma tähis. Näiteks meie joonisel on valge kuningas väljal G8, valge ratsu väljal C4, must kuningas aga väljal E4.

Selle maletajate poolt kokkulepitud tähistuse võib kirjutada välja ka pikemalt, näiteks nii: G8 asemel (G; 8) ja E4 asemel (E; 4). Selliste tähe ja arvu paaride abil on võimalik tähistada kõik malelaua ruudud ja teha seda nii, et see on kõigile ühtmoodi mõistetav.



Vaatleme kahte hulka, tähtede hulka $K = \{A; B; C; D; E; F; G; H\}$ ja arvude hulka $M = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8\}$.

Nende kahe hulga abil moodustame kolmanda hulga $K \times M$. See hulk olgu paaride hulk, aga selline paaride hulk, kus esimene element kuulub hulka K ja teine element hulka M.

$K \times M = \{(A; 1); (A; 2); (A; 3); \ldots (A; 8); (B; 1); (B; 2); \ldots (H; 7); (H; 8)\}$.
Selles uues hulgas on $8 \times 8 = 64$ elementi. Sellist hulka $K \times M$ nimetatakse **hulkade K ja M otsekorrutiseks ehk Cartesiuse korrutiseks**[1].

$$K \times M = \{(x; y) \mid x \in K \wedge y \in M\}$$

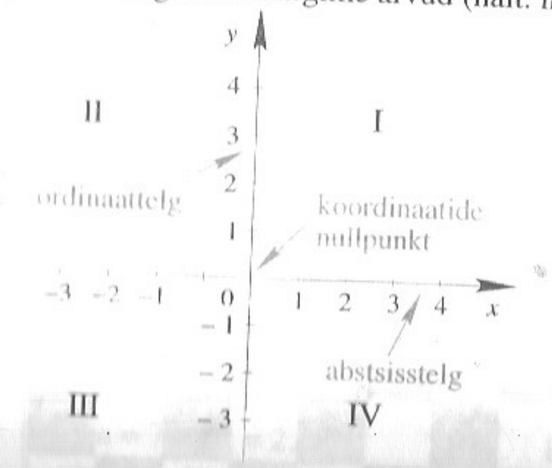
Et me valisime paari esimese elemendi esimesest hulgast ja teise elemendi teisest hulgast, siis on nende järjekord tähtis. Näiteks paar $(F; 7)$ kuulub antud hulka, aga paar $(7; F)$ ei kuulu. Seetõttu nimetatakse sellist hulka ka **järjestatud paaride hulgaks.**

Edaspidi vaatleme Cartesiuse korrutist juhul, kus hulgad K ja M on omavahel võrdsed ja võrduvad reaalarvude hulgaga $\mathbb{R}$. $K = M = \mathbb{R}$. Siis tekib järjestatud paaride hulk $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x; y) \mid x \in \mathbb{R} \wedge y \in \mathbb{R}\}.$$

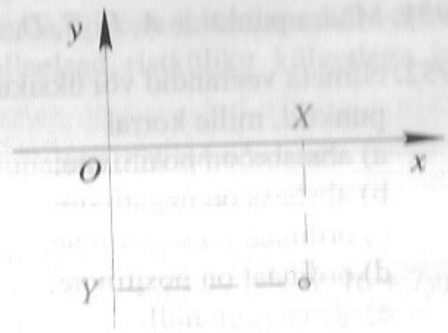
Me teame, et iga reaalarvu saab esitada punktina arvteljel ja iga arvtelje punkt esitab mingit kindlat reaalarvu. Analoogiliselt sellega osutub, et iga arvupaari hulgast $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ saab esitada punktina koordinaattasandil. Saab näidata, et iga koordinaattasandi punkti võib esitada järjestatud arvupaarina. Viimased kaks lauset võetakse tavaliselt kokku ja öeldakse, et **hulga $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ja koordinaattasandi saab seada teineteisega üksühesesse vastavusse.**

Koordinaattasand saadakse järgmiselt.
Võetakse kaks ristuvat koordinaattelge, üks neist horisontaalne (x-telg), teine vertikaalne (y-telg). Lõikugu nad punktis O. See punkt on **koordinaatide algus-punkt.** Telgedele märgime arvud (näit. nii nagu joonisel).



Horisontaalset telge (x-telge) nimetatakse ka abstsisssteljeks, vertikaalset telge (y-telge) ordinaatteljeks. Kui joonestame koordinaatteljestiku tasandile, siis saamegi **koordinaattasandi**. Teljed jaotavad koordinaattasandi neljaks veerandiks (kvadrandiks). Neid nimetatakse joonisel toodud järjekorras **esimeseks, teiseks, kolmandaks** ja **neljandaks veerandiks.**

[1] Ladina keeles kasutati 17. sajandil prantsuse matemaatiku, loodusteadlase ja filosoofi René Descartes'i (1596 — 1650) nime ka kujul — Renatus Cartesius.



Olgu P mingi punkt koordinaattasandil. Leiame selle punkti koordinaadid. Selleks tõmbame sellest punktist x-teljele ja y-teljele paralleelsed sirged. Nende sirgete ja telgede lõikepunktid on punktid X ja Y. Neid punkte nimetatakse **punkti P projektsioonideks koordinaattelgedel.** Neile punkti projektsioonidele vastavad arvteljel mingid arvud. Olgu need näiteks x ja y. Niiviisi saadud arve nimetatakse **punkti P koordinaatideks.**

Seda, et punkti P koordinaadid on x ja y, kirjutatakse $P(x; y)$. Sulgudesse esimesele kohale kirjutatakse abstsiss, teisele ordinaat. Mõnikord öeldakse lühidüse mõttes punkti koordinaatidega $(3; -4)$ asemel punkt $(3; -4)$.

Nüüd on selge ka see, miks me oleme punkti koordinaatide korral sunnitud kasutama **järjestatud arvupaari** mõistet. Seda sellepärast, et punkti koordinaatide järjekord on tähtis, seda ei tohi muuta. Näiteks punktid $S(2; -3)$ ja $T(-3; 2)$ on erinevad punktid. (Vt. joonist allpool.)

Kaks punkti on ühtivad parajasti siis, kui nende punktide vastavad koordinaadid on võrdsed.

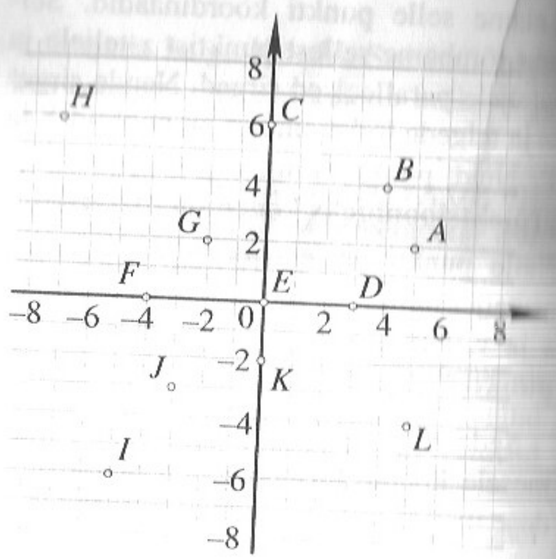
$$K(a; b) = L(c; d) \Leftrightarrow a = b \text{ ja } b = d$$

Arvestades telgede suundi, saame järgmise tabeli punktide koordinaatide jaoks:

Veerand, milles punkt asetseb	Abstsissi märk	Ordinaadi märk
I	+	+
II	−	+
III	−	−
IV	+	−

951. Määra punktide $A, B, C, D, \ldots, L$ koordinaadid.

952. Nimeta veerandid või üksikud punktid, mille korral
a) abstsiss on positiivne;
b) abstsiss on negatiivne;
c) ordinaat on negatiivne;
d) ordinaat on positiivne;
e) abstsiss on null;
f) ordinaat on null;
g) abstsiss ja ordinaat on mõlemad negatiivsed;
h) abstsiss on positiivne, ordinaat negatiivne;
i) abstsiss võrdub ordinaadiga;
j) abstsiss võrdub ordinaadi vastandarvuga.



953. Leia, kas need arvupaarid on võrdsed.
a) $(6; 4)$ ja $(4; 6)$
b) $(2 \cdot 4; 0)$ ja $(8; 1 - 1)$
c) $(5; 5)$ ja $(5; -5)$
d) $(7 \cdot 6; 3^4)$ ja $(6 \cdot 7; 9^2)$.

954. Leia veel arvupaaride ja/või punkti koordinaatide kasutusalasid.

955. Kanna järgmised punktid teljestikku.
a) $(6; 2)$
b) $(2; -4)$
c) $(-1; -1)$
d) $(-4; -3{,}5)$
e) $(-2; 0)$
f) $(1{,}5; -4)$
g) $(0; 5)$
h) $(1{,}2; 1{,}2)$
i) $(-5; 3)$

956. Dešifreeri üleskirjutus:
$(-9; 2)$, $(-7; 2)$, $(-5; 2)$, $(-7; -2)$, $(-1; 2)$, $(-4; 2)$, $(-4; 0)$, $(-3; 0)$, $(-4; -2)$, $(-1; -2)$, $(1; -2)$, $(1; -1)$, $(1; 2)$, $(3; 2)$, $(4; 1)$, $(4; 0)$, $(3; -1)$, $(4; -2)$, $(9; -2)$, $(6; -2)$, $(6; 0)$, $(7; 0)$, $(6; 2)$, $(9; 2)$.

957. Kanna teljestikku punktid A ja B ning mõõda neid punkte ühendava lõigu pikkus.
a) $A(3; 0)$ $B(8; 0)$
b) $A(1; 0)$ $B(-6; 0)$
c) $A(-1; 1)$ $B(8; 1)$
d) $A(2; 4)$ $B(2; -6)$
e) $A(-3; -2)$ $B(-3; 5)$
f) $A(0; -1)$ $B(0; 5)$
g) $A(0; 0)$ $B(4; 3)$
h) $A(1; 2)$ $B(4; 6)$
i) $A(-5; 3)$ $B(1; -5)$

958. Leia järgmiste punktide projektsioonid x-teljel.
$A(3; 4)$ $B(-5; -3)$ $C(0; 4)$

959. Leia järgmiste punktide projektsioonid y-teljel.
$A(2; 3)$ $B(4; -2)$ $C(-5; 0)$

960. Konstrueeri punktiga $M(3; 2)$ sümmeetriline punkt
a) x-telje suhtes
b) y-telje suhtes
c) koordinaatide alguspunkti suhtes

Mis juhtub punkti koordinaatidega?

961. Ristküliku küljed on 6 cm ja 10 cm. Leia tema tippude koordinaadid, võttes koordinaattelgedeks sirged, mis on paralleelsed ristküliku külgedega ja poolitavad neid.

962. Leia kõik x ja y väärtused, mille korral arvupaarid oleksid võrdsed.
a) $(x; 6) = (-4; y + 2)$
b) $(x; y) = (8 - x; 3y)$
c) $(7 - 2x; -6 + y) = (-x; 6 + 5y)$
d) $(|x|; |y|) = (2; 3|y| - 10)$
e) $(x - 2; 8) = (5; y)$
f) $(x; y) = (-x; 18 - y)$
g) $(x - 3; 2y + 1) = (3x + 5; 16 + 7y)$
h) $(|x|; |y|) = (8 - |x|; 1)$

963. On antud ristküliku kolm tippu. Leia neljanda tipu asukoht.
a) $(-2; -6)$, $(5; 0)$, $(-2; 0)$
b) $(-1{,}5; -2)$, $(-6; -8)$, $(-6; -2)$
c) $(-5; -5)$, $(-3; 3)$, $(0; 0)$
d) $(-3; 5)$, $(-6; 5)$, $(-6; -6)$
e) $(2; -1{,}5)$, $(-2; -2)$, $(2; -2)$
f) $(0; 0)$, $(3; 6)$, $(2; 1)$

964. Ristküliku $ABCD$ küljed on paralleelsed koordinaattelgedega. On teada, kaks vastastippu $A(3; 2)$ ja $C(6; 5)$. Leia tipud B ja D ning ristküliku pindala.

965. On antud rööpküliku kolm tippu. Mitmes erinevas kohas võib paikneda rööpküliku neljas tipp? Leia neljanda tipu võimalikud koordinaadid.
a) $(1; 2)$, $(-3; -3)$, $(1; 2)$;
b) $(0; 6)$, $(-4; -4)$, $(5; 0)$

966. Kui pikk on lõik, mis ühendab punkte $K(a; b)$ ja $L(a; c)$?

967. Kui pikk on lõik, mis ühendab punkte $M(a; b)$ ja $N(d; b)$?

968. On antud 4 cm pikkuse küljega ruut. Ruudu diagonaalid on koordinaattelgedeks. Leia tippude koordinaadid.

969. Kas on võimalik ülesandes nr. 957 küsitud lõikude pikkusi ilma mõõtmata leida? Kui, siis kuidas?

970. Kirjuta arvutiprogramm, mis pärast iga punkti koordinaatide sisestamist teataks, millises veerandis paikneb see punkt. Juhul, kui see punkt on koordinaatteljel, siis programm peab teatama, millisel teljel on see punkt.

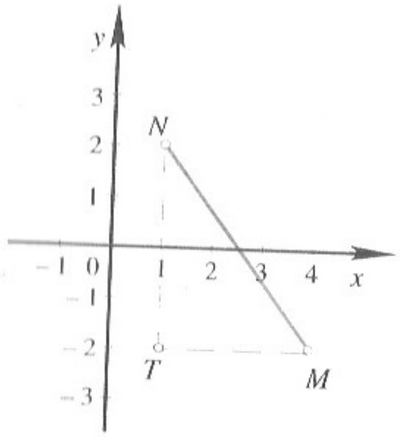
971. Kirjuta programm, mis joonestaks koordinaatteljestiku.
a) Lihtsalt teljestik.
b) Teljestik koos sobivalt valitud ühikuga ja tähistega (näiteks -8 kuni $+8$-ni mõlemat telge pidi).
c) Kõik see, mis punktis b), lisaks sellele kannaks programm kasutaja poolt sisestatavad punktid teljestikku.

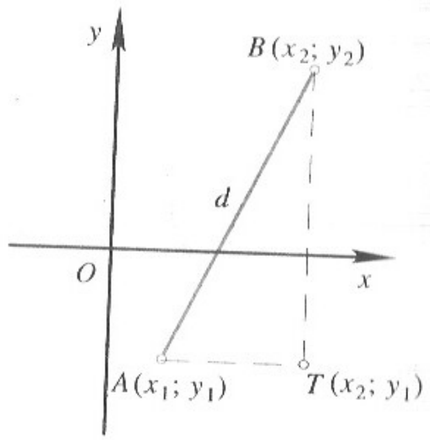
972. Koosta programm, mis leiaks malelaual ratsukäikudega lühima tee ühest vabalt valitud punktist teise vabalt valitud punkti.

6.2. KAHE PUNKTI VAHELINE KAUGUS

Olgu tasandil kaks vabalt valitud punkti, mis ei ole ühe horisontaal- või vertikaalsirge peal (näit. punktid $M(4; -2)$ ja $N(1; 2)$). Leiame neid punkte ühendava lõigu pikkuse. Kasutame sellekse Pythagorase teoreemi. Joonestame vasakpoolsel joonisel olevad horisontaal- ja vertikaallõigud. Punkti T koordinaadid on $(1; -2)$. Siis $MT = 3$, $NT = 4$.

$MN^2 = 3^2 + 4^2 = 25$ ja $MN = 5$.





Selles näites toodud meetodit saab kasutada kahe vabalt valitud punkti $A(x_1; y_1)$ ja $B(x_2; y_2)$ vahelise kauguse leidmiseks. Punkti T koordinaadid on nüüd $(x_2; y_1)$,

$AT = |x_2 - x_1|$, $BT = |y_2 - y_1|$,

$d^2 = |x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$.

$d = \pm\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.

Et d tähendab kaugust, siis d ei saa olla negatiivne. Järelikult:

> Kahe punkti $A(x_1; y_1)$ ja $B(x_2; y_2)$ vaheline kaugus d avaldub kujul
>
> $$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Näide 1. Leiame punktide $(-4; 2)$ ja $(2; -1)$ vahelise kauguse.

Olgu $(x_1; y_1) = (-4; 2)$ ja $(x_2; y_2) = (2; -1)$, siis

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(2 - (-4))^2 + ((-1) - 2)^2} = \sqrt{6^2 + (-3)^2} =$$
$$= \sqrt{36 + 9} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}.$$

973. Leia kahe punkti vaheline kaugus. Lihtsamate ülesannete (1 – 5) korral proovi seda teha ilma valemit kasutamata.

1) $(0; 2)$ ja $(0; -5)$
2) $(4; 3)$ ja $(-1; 3)$
3) $(1; -4)$ ja $(-5; -4)$
4) $(0; 0)$ ja $(4; 3)$
5) $(6; 8)$ ja $(0; 0)$
6) $(-2; -6)$ ja $(-5; -7)$
7) $(4; 4)$ ja $(-1; -1)$
8) $(3; 2)$ ja $(5; -2)$
9) $(2{,}5; 8)$ ja $(6{,}5; 5)$
10) $(-1; -2)$ ja $(4; 7)$
11) $(1; -2)$ ja $(5; 4)$
12) $(-6; 8)$ ja $(0; 0)$
13) $(6; 0)$ ja $(0; -8)$
14) $(-3; 2)$ ja $(2; -3)$
15) $(9; -24)$ ja $(2; 0)$

974. Kirjuta välja avaldis kahe punkti vahelise kauguse leidmiseks.
a) $(a; b)$ ja $(c; d)$ b) $(e; -f)$ ja $(-g; -h)$

975. Missugune kolmest antud punktist $A(-1; 4)$ ja $B(2; 3)$ ja $C(0; 6)$ asetseb koordinaatide alguspunktile kõige lähemal? Leia selle punkti kaugus punktist $M(-4; 5)$.

976. On olemas 12 punkti, mille koordinaadid on täisarvud ja mis on koordinaatide alguspunktist 10 ühiku kaugusel. Leia need punktid (näpunäide: kasuta kolmnurka külgedega 6, 8 ja 10).

977. Leia 12 punkti, millel on täisarvulised koordinaadid ja mis on punktist $(-8; 1)$ 5 ühiku kaugusel.

978. Näita, et nelinurk tippudega $A(1; 0)$, $B(1; 6)$, $C(7; 0)$ ja $D(7; 9)$ on trapets. Leia trapetsi pindala.

979. Näita, et kolmnurk $A(4; -3)$, $B(1; 3)$ ja $C(-2; 0)$ on võrdhaarne.

980. Nelinurga $PAUL$ tipud on $P(4; 6)$, $A(6; -4)$, $U(-4; -2)$ ja $L(-2; 4)$. Näita, et diagonaalid on võrdse pikkusega.

981. Näita, et kolmnurk tippudega $K(-1; 1)$, $L(3; -1)$ ja $M(5; 1)$ on isekülgne kolmnurk.

982. Leia trapetsi $BCDE$ kesklõik, kui tipud on $B(-2; -4)$, $C(-2; 6)$, $D(3; 1)$ ja $E(3; 5)$.

983. Kolmnurkadel ABC ja DEF on tipud $A(-2; -2)$, $B(4; -2)$, $C(2; 2)$, $D(8; 1)$, $E(8; 4)$ ja $F(6; 3)$. Näita, et kolmnurgad on sarnased.

984. Leia nelinurga $BTRC$ pindala. $B(8; 0)$, $T(2; -9)$, $R(-1; -7)$, $C(5; 2)$.

985. Näita, et kolmnurk ABC ($A(1; 2)$, $B(3; 4)$, $C(-1; 4)$) on täisnurkne.

986. Tasandil on antud kolm punkti $((-6; 3), (4; -2), (-2; 1))$. Tõesta, et need punktid asuvad ühel sirgel.

987. Kolmnurk GHM on võrdhaarne, punktide G ja H koodinaadid on teada: $G(-2; -3)$, $H(-2; 7)$. Punkti M x-koordinaat on 4. Leia viis võimalikku punkti M y-koordinaadi väärtust.

988. Punkt $(a; b)$ on võrdsetel kaugustel punktidest $(-2; 5)$, $(8; 5)$ ja $(6; 7)$. Leia selle punkti koordinaadid.

989. Kas leidub punkt, mis oleks võrdsetel kaugustel punktidest $(2; 2)$, $(-1; 8)$ ja $(1; 4)$?

990. Tõesta teoreem: rööpküliku külgede ruutude summa on võrdne diagonaalide ruutude summaga.

991. Kirjuta arvutiprogramm, mis
a) pärast kahe punkti koordinaatide sisestamist leiab nende punktide vahelise kauguse,
b) joonistab neid punkte ühendava sirglõigu tasandil.

992. Kirjuta programm (Allveelaeva tabamine), mis mängiks kasutajaga järgmist mängu:

Akvatooriumis 100 × 100 km asub laev, mis tuleb tabada raketiga. Selleks tuleb sisestada koordinaadid, kuhu see rakett lasta. Mängijale edastatakse teade selle kohta, kui suur on kaugus laeva ja lastud koha vahel. Laev liigub kiirusega 2 km vastase käigu kohta suvalises horisontaal- ja vertikaalsuunas. Valitud liikumise suund ei muutu mängu ajal. Raketi tegevusraadius on 3 km. Ühe laeva tabamiseks antakse kasutajale 7 raketti.

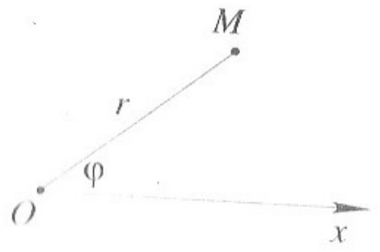
Lihtsam variant — ilma akvatooriumi joonistamata;
keerulisem variant — koos akvatooriumi joonistamisega.

Lisaks pohikursusele:

6.3. POLAARKOORDINAADID

Punkti asukoha määramiseks tasapinnal pole tingimata vaja kasutada ristkoordinaate; seda saab teha ka järgmisel viisil.

Võtame tasandil mingi punkti O, mida nimetame pooluseks, ja sellest punktist väljuva kiire Ox, mida nimetame **polaarteljeks**. Olgu M punkt, mille asukohta tahame määrata. Ühendame punkti M punktiga O ja märgime lõigu OM pikkuse tähega r. Mõõdame nurga xOM, lugedes seda vastupidi kellaosuti liikumise suunale (s.t. vastupäeva). Seda nurka tähistame tähega φ.

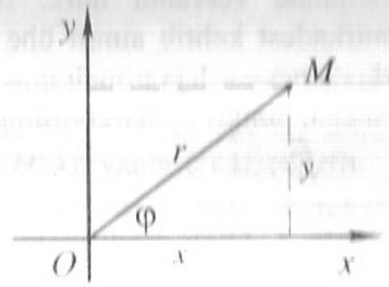


Nurga φ loeme asetsevaks vahemikus $[0°; 360°[$. On selge, et igale punktile M (välja arvatud punkt O) vastab üksainus paar suurusi r ja φ, ning ümberpöördult, igale arvupaarile (r, φ) vastab üksainus punkt. Punktile O vastab üheselt väärtus $r = 0$ ja nurk φ pole punkti O korral määratav. Arve r ja φ nimetatakse punkti M **polaarkoordinaatideks**, arvu r seejuures **polaarkauguseks**, arvu φ — **polaarnurgaks**.

Seda, et punkti M polaarkoordinaadid on r ja φ, märgitakse kujul $M(r; \varphi)$.

Avaldame punkti ristkoordinaadid polaarkoordinaatide kaudu. Selleks võtame abististeljе piki polaartelge ja koordinaatide alguspunktiks võtame pooluse. Ilmselt näeme, et

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}.$$



Nüüd seame endale ülesandeks arvutada punkti polaarkoordinaadid, kui teame ristkoordinaate. Polaarkauguse avaldamiseks tõstame äsja saadud võrdused ruutu ja liidame vastavad pooled:

$$x^2 + y^2 = r^2(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = r^2.$$

Juurides seda võrdust ning arvestades, et $r \geq 0$, saame $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Polaarnurga avaldamiseks jagame teise võrduse esimesega:

$$\frac{y}{x} = \frac{r\sin\varphi}{r\cos\varphi} = \tan\varphi.$$

Seega

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \tan\varphi = \dfrac{y}{x}. \end{cases}$$

Need valemid võimaldavad leida polaarkoordinaate, kui meil on antud ristkoordinaadid. Veerandi määramisel, kus asub nurk φ, tuleb abiks võtta abstsissi ja ordinaadi märgid.[1]

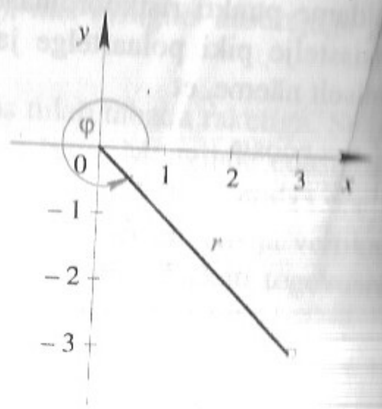
	Polaarkoordinaatidelt ristkoordinaatidele ülemineku valemid	
$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$	◄	$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \tan\varphi = \dfrac{y}{x} \end{cases}$
	►	
	Ristkoordinaatidelt polaarkoordinaatidele ülemineku valemid	

Näide 1. Punkti ristkoordinaadid on $(3; -3)$. Leiame selle punkti polaarkoordinaadid.

$$r = \sqrt{3^2 + (-3)^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$
$$\tan\varphi = \frac{y}{x} = -1.$$

[1] Juhul, kui $x = 0$, siis $\tan\varphi$ väärtus puudub. Kui nüüd $y > 0$, siis $\varphi = 90°$; kui aga $y < 0$, siis $\varphi = 270°$.

Et $\tan\varphi < 0$, siis φ on kas II või IV veerandi nurk. Kuna $x = 3 > 0$ ja $y = -3 < 0$, siis φ on neljanda veerandi nurk. Neljanda veerandi nurkadest kehtib ainult ühe nurga korral võrdus $\tan\varphi = -1$ ja nimelt $\varphi = 360° - 45° = 315°$. Seega, punkti polaarkoordinaadid on $(3\sqrt{2}\,;\,315°)$.



Näide 2. Olgu meil punkt polaarkoordinaatidega $(13;\ 112°37')$. Leiame selle punkti ristkoordinaadid.

$x = r\cdot\cos\varphi = 13\cdot\cos 112°37' = -4{,}999 \approx -5.$
$y = r\cdot\sin\varphi = 13\cdot\sin 112°37' = 12.$

Seega punkti ristkoordinaadid on $(-5;\ 12)$.

993. Konstrueeri punktid, mis on antud polaarkoordinaatidega $A(2;\ \frac{\pi}{2})$, $B(3;\ 0)$, $C(1;\ \frac{5\pi}{3})$, $D(4;\ \frac{5\pi}{4})$, $E(5;\ 270°)$, $F(2;\ \frac{7\pi}{4})$, $G(2\sqrt{2}\,;\ 225°)$, $H(0;\ 315°)$.

994. Leia ristkoordinaatidega antud punktide polaarkoordinaadid $A(0;\ -3)$, $B(4;\ 0)$, $C(-5;\ 0)$, $D(\sqrt{3}\,;\ 1)$, $E(-3\sqrt{2}\,;\ 3\sqrt{2})$, $F(-4;\ 4)$.

995. Leia polaarkoordinaatidega antud punktide ristkoordinaadid. $A(4;\ \frac{\pi}{3})$, $B(1;\ \frac{\pi}{6})$, $C(3;\ \frac{3\pi}{4})$, $D(4;\ 2\pi)$, $E(\sqrt{2}\,;\ 225°)$.

996. On antud korrapärane kuusnurk $ABCDEF$ küljepikkusega 1. Poolus asetsegu punktis A, lõik AB olgu polaarteljel. Kuusnurk paiknegu ülalpool polaartelge. Leia selle kuusnurga tippude polaarkoordinaadid.

997. Arvuta punktide $A(6;\ \frac{\pi}{3})$ ja $B(6;\ \frac{5\pi}{3})$ vaheline kaugus.

998. Arvuta punktide $A(4;\ \frac{\pi}{6})$ ja $B(2;\ \frac{\pi}{2})$ vaheline kaugus ja kolmnurga AOB pindala.

999. Kolmnurga tipud on $A(5;\ \frac{\pi}{2})$, $B(8;\ \frac{5\pi}{6})$ ja $C(3;\ \frac{7\pi}{6})$. Näita, et see kolmnurk on võrdkülgne.

1000. Koosta arvutiprogramm ristkoordinaatidе teisendamiseks polaarkoordinaatideks ja vastupidi.

8.4. VEKTOR. TEHTED VEKTORITEGA

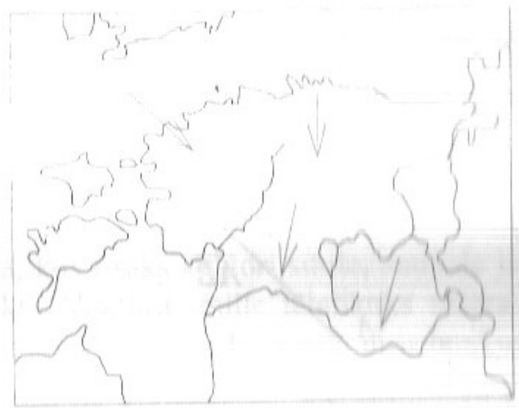
8.4.1. VEKTORI MÕISTE

Arvudega iseloomustatakse paljusid suurusi. Mõne suuruse määramiseks piisab ühest arvust ja mõõtühikust. Näiteks õhu temperatuur on 14,5 °C, õpilase mass on 61 kg, pinge vooluvõrgus on 220 V, kauba hind 5.60 kr, vanaisa vanus 71 a.

Selliseid suurusi, mida saab esitada ühe arvuga, nimetatakse **skalaarseteks**[1] **suurusteks**.

Leidub ka suurusi, mille iseloomustamiseks ei piisa ühest arvust. Näiteks, purjekaile on vähe kasu ainult tuule kiiruse teadasaamisest (näiteks 25 m/s), vaja on teada ka tuule sihti ja suunda. Näiteks kujul „tuul puhub loode-kagu sihis, loodest kagusse . . . ". Ilmastikukaardil kujutatakse neid andmeid nooltega: nool näitab missuguses sihis ja suunas tuul puhub, noole pikkus näitab tuule tugevust. Selline nool kujutab endast tuule **tugevusvektorit**[2].

Füüsikas kujutatakse vektoritega paljusid suurusi (näiteks nihe, kiirus, kiirendus, jõud). Vaatleme näiteks kiirust.



Lennaku mingi lennuk trassil Tallinn — Helsingi. Kaardile võib märkida lennutrassi. Lihtsuse mõttes loeme selle ligikaudu sirgeks. Noole suunaga märgime lennuki kursi (näit. Helsingist Tallinna poole). Noole pikkus näitab aga seda, kui kiirelt lennuk liigub (näiteks 700 km/h). Trass määrab sihi ja kurss määrab suuna, milles liikumine toimub.

[1] Lad. k. *scalaris* — astmeline.
[2] Lad. k. *vector* — vedav, kandev.

Suurust, mille täielikuks määramiseks on peale arvväärtuse vaja ka sihi ja suunda, nimetatakse vektoriaalseks suuruseks.

Vektoriks nimetatakse suunatud sirglõiku.

Sellist sirglõiku iseloomustavad ***siht, suund*** ja ***pikkus***.

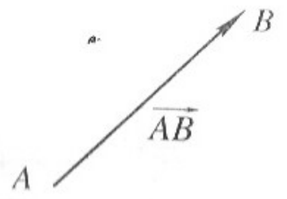
Siht näitab, kuidas vektor asetseb.
Suund näitab, kummale poole on vektor suunatud.
Pikkus näitab vektori arvväärtust.

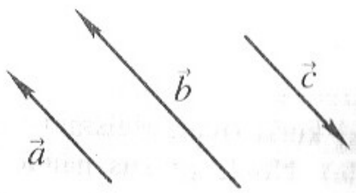
6.4.2. VEKTORITE TÄHISTAMISEST. VEKTORITE VÕRDSUS

Kui alguspunktiks on A ja lõpp-punktiks B, siis seda vektorit tähistatakse $\overrightarrow{AB}$. Sageli tähistatakse vektoreid ka väiketähtedega, näiteks $\vec{a}, \vec{v}, \vec{x}$ ja $\vec{y}$. Väikeste tähtede kasutamse korral märgitakse vektoreid ainult ühe tähega.

Vektorid on samasihilised, kui nad on paralleelsed. Samasihilisuse jaoks kasutatakse matemaatikas ka teist sõna — **kollineaarsus**.

samasihilisus = kollineaarsus





$\vec{a} \parallel \vec{b} \parallel \vec{c}$

Samasihilised vektorid on kas samasuunalised või vastassuunalised. Näiteks, ülaltoodud joonisel on vektorid $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ samasuunalised, vektorid $\vec{a}$ ja $\vec{c}$ aga vastassuunalised. Neid tõsiasju märgitakse lühidalt nii: $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$ ja $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{c}$. **Kahte vektorit nimetatakse võrdseteks, kui nad on samasihilised, samasuunalised ja ühepikkused.**

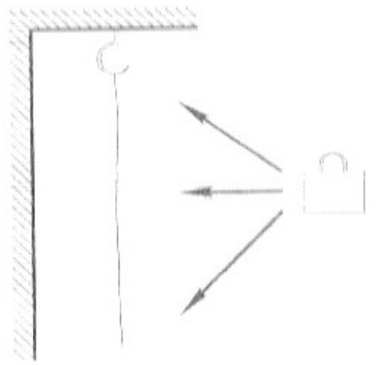
$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ $\quad \overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{EF}$ $\quad \overrightarrow{CD} \neq \vec{u}$ $\quad \vec{u} \neq \vec{k}$

6.4.3. VEKTORITE LIIGITUS

Kas vektor sõltub sellest, millises punktis on ta algus, s.t. kas vektor sõltub oma rakenduspunktist?

Vaatame näiteks tuule kiirusvektorit. Kuna tuule kiirus on erinevates punktides erinev, siis ilmastikukaardile märgitavad vektorid on oma sihilt, suunalt ja pikkuselt erinevad. Tuule kiirus on lahutamatult seotud kohaga, mille jaoks tuule sihi, suund ja kiirus antakse.

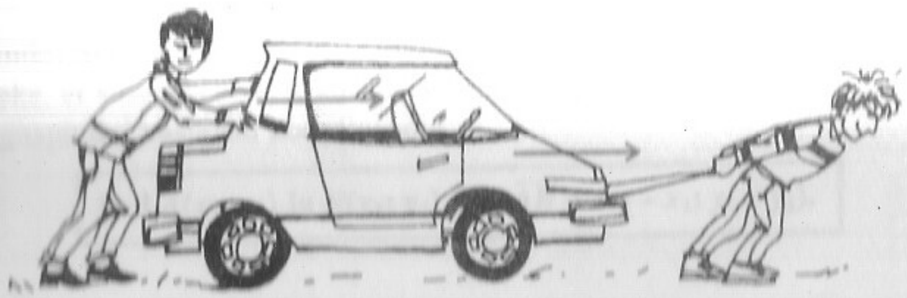
Teise näitena vaatleme kummipaela otsas rippuvat koormust. Kas koormuse sihi sõltub sellest, kuhu me kinnitame koormuse? Ilmselt sõltub.



Mõlemad näited kuuluvad selliste hulka, kus lisaks vektori sihile, suunale ja pikkusele on vaja teada ka rakenduspunkti. Vektorit, mille täielikuks määramiseks on vaja peale sihi, suuna ja pikkuse anda ka rakenduspunkt, nimetatakse **seotud vektoriks**.

Kui mingi keha liigub mööda sirgjoont ühtlaselt, siis on ta kiirusvektor kogu aeg suuruselt, sihilt ja suunalt muutumatu. Siis on ükskõik, millise koha selle keha teel me valime kiirusvektori alguspunktiks.

Kui me rakendame mingile jäigale kehale mingit kindlasuunalist jõudu (näiteks lükkame käsitsi sõiduautot), siis võib selle jõu rakenduspunkti kanda edasi mööda jõu mõjusirget. Jõu mõju efekt sellest ei sõltu. (Näiteks autot võib tagant lükkamise asemel ka järel vedada . . .).

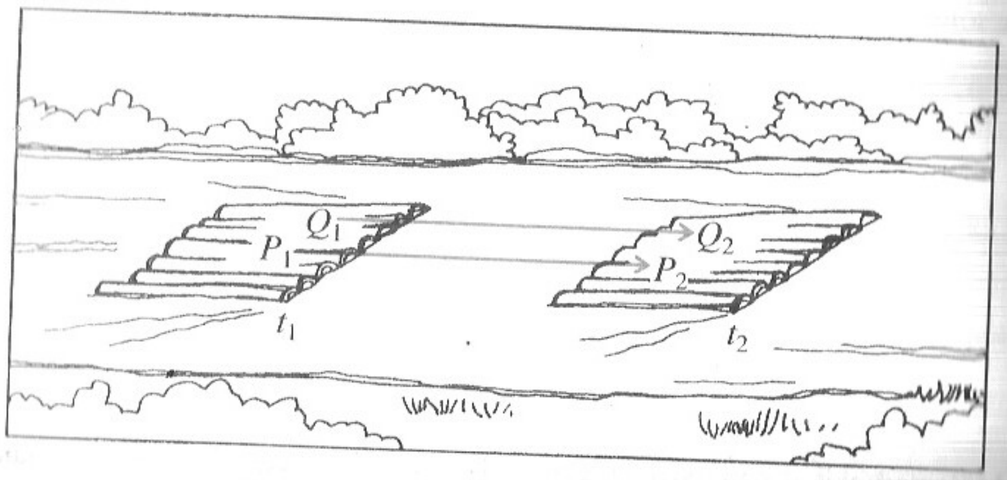


Toodud kaks näidet — ühtlase sirgjoonelise liikumise kiirusvektor ja jäigale kehale rakendatud jõuvektor — on libiseva vektori näiteks.

Vektorit, mille rakenduspunkti võib vabalt valida vektori mõjusirgel, nimetatakse **libisevaks vektoriks**.

Vaatleme näiteks ühtlase laiuse ja sügavusega sirges kanalis voolava veega kaasaliikuvat parve. Märgime parvel mingid vabalt valitud punktid P ja Q. Ajamomendil t_1 on need punktid kalda suhtes punktides P_1 ja Q_1, ajamomendil t_2 punktides P_2 ja Q_2. Et vool on ühtlane ja sirgjooneline, siis võib öelda, et $P_1P_2 \parallel Q_1Q_2$, $P_1P_2 \uparrow\uparrow Q_1Q_2$, ja $P_1P_2 = Q_1Q_2$. Seega

$\vec{P_1P_2} = \vec{Q_1Q_2}$.



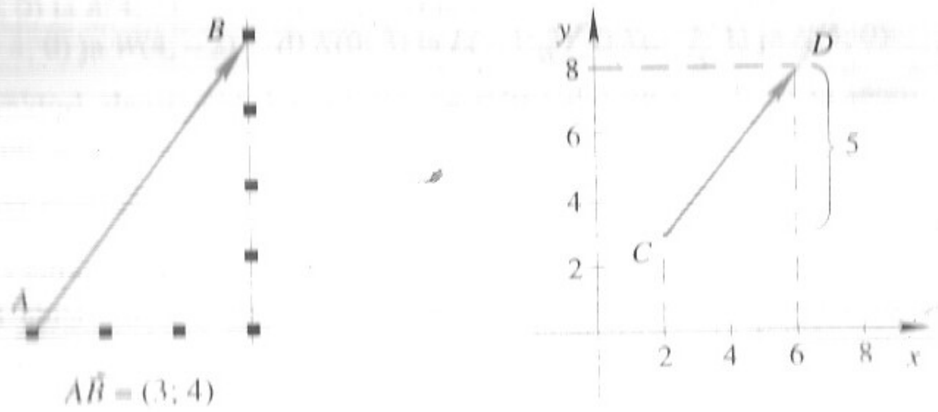
Võime öelda, et sellise kulgeva liikumise korral on parve kahel vabalt valitud punktil (järelikult ka kõigil ülejäänud punktidel!) ühesugused nihkevektorid. Seega võime märkida nihkevektori lähtuvana selle parve suvalisest punktist. See kulgevalt (translatoorselt) liikuva parve punktide nihkevektor on üheks tüüpiliseks vabavektoriks.

Vektorit, mille rakenduspunkti võib ruumis vabalt valida, nimetatakse **vabavektoriks**.

Füüsikas läheb vaja neid kõiki vektorite tüüpe, matemaatikas kasutatakse sagedamini vabavektoreid. Järgnevas loobume konkreetsetest kaalutlustest, mis toid meid vektori mõiste juurde, ja vaatleme vektorit tasandil kui geomeetrilist kujundit ja kui arvupaari (ruumivektor oleks arvukolmik).

8.4.4. VEKTORI KOORDINAADID. VEKTORI PIKKUS

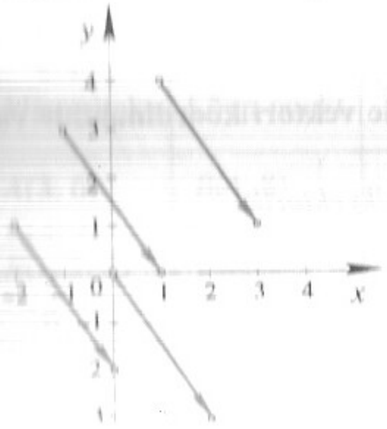
Nihet 4 ühikut paremale ja 4 ühikut üles saab esitada vektoriga $\vec{AB}$, nii nagu näha joonisel. Seda nihet saab esitada ka järjestatud arvupaariga (3; 4). Esimene arv näitab nihet x-telje suunas, teine y-telje suunas.

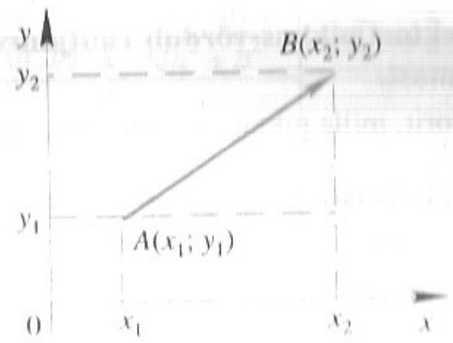


$\vec{AB} = (3; 4)$

Nihe koordinaattasandil punktist (2; 3) punkti (6; 8) on märgitav vektoriga $\vec{CD} = (4; 5)$. Vektor (2; – 3) tähendaks koordinaattasandil nihet kahe ühiku võrra paremale ja kolme ühiku võrra alla.

Joonisel on tehtud see nihe punktidest $O(0; 0)$, $A(1; 4)$, $B(-1; 3)$ ja $C(-2; 1)$.



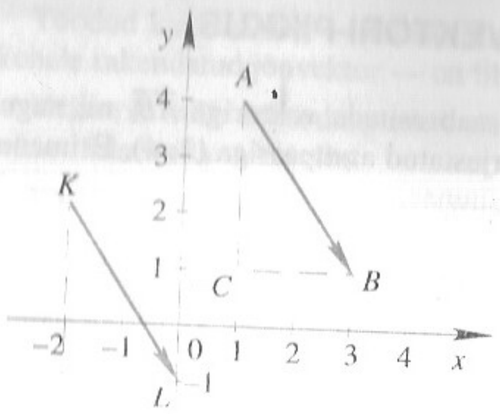


Vektorit tasandil saab esitada arvupaari abil. Selles arvupaaris olevaid arve nimetatakse vektori koordinaatideks — esimesel kohal on esimene koordinaat, teisel kohal teine koordinaat.

Leiame üldise valemi vektori koordinaatide jaoks. Selleks võtame teljestikus kaks punkti $A(x_1; y_1)$ ja $B(x_2; y_2)$. Leiame vektori $\vec{AB}$ koordinaadid.

Selleks, et saada vektori koordinaate, tuleb lõpp-punkti koordinaatidest lahutada alguspunkti vastavad koordinaadid.

Kui $A(x_1; y_1)$ ja $B(x_2; y_2)$, siis $\vec{AB} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1)$.



Olgu meil mingid kaks võrdset vektorit. On ilmne, et võrdsete vektorite vastavad koordinaadid on võrdsed, s.t. kui
$\vec{u} = (a; b)$ ja $\vec{v} = (c; d)$, siis
$\vec{u} = \vec{v} \Leftrightarrow (a = c \wedge b = d)$.

Joonisel on vektor $(2; -3)$. Leiame selle vektori pikkuse. Selleks joonistame välja kolmnurga ABC. Selle kolmnurga hüpotenuusi saame leida Pythagorase teoreemi abil:

$$AB = \sqrt{AC^2 + CB^2} = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}.$$

Vektori pikkust tähistatakse $|\overrightarrow{AB}|$, vektori tähis kirjutatakse püstkriipsude vahele. Et vektori $\overrightarrow{AB}$ pikkus ja sellele vektorile vastava lõigu AB pikkus on võrdsed (miks?), siis vahel märgitakse vektori $\overrightarrow{AB}$ pikkust ka lihtsalt nii: AB.

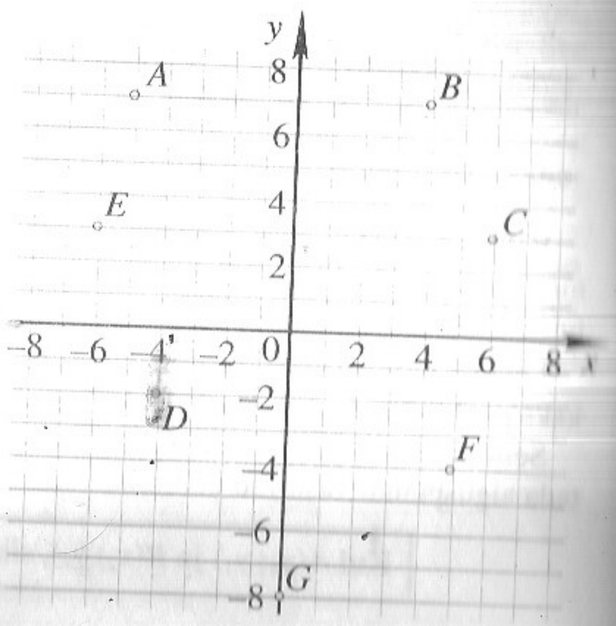
Kui $\vec{v} = (a; b)$, siis selle vektori pikkus $|\vec{v}| = \sqrt{a^2 + b^2}$

Vektori pikkus võrdub ruutjuurega selle vektori koordinaatide ruutude summast.

Vektorit, mille pikkus on üks, nimetatakse ***ühikvektoriks***.

1001. Leia järgmiste vektorite koordinaadid:

a) $\overrightarrow{AB}$ b) $\overrightarrow{OC}$ c) $\overrightarrow{OE}$
d) $\overrightarrow{AC}$ e) $\overrightarrow{FD}$ f) $\overrightarrow{GF}$
g) $\overrightarrow{BA}$ h) $\overrightarrow{CO}$ i) $\overrightarrow{CA}$
j) $\overrightarrow{GO}$ k) $\overrightarrow{OG}$



1002. Leia vektori $\vec{k} = (2; 5)$ lõpp-punkt, kui alguspunkt on:

a) $O(0; 0)$ b) $R(0; 6)$
c) $N(1; -3)$ d) $C(-3; -2)$.

Tee joonis.

1003. Leia vektori koordinaadid, kui alguspunkt on $(3; 2)$ ja lõpp-punkt on:
a) $O(0; 0)$ b) $R(0; 6)$ c) $A(2; 7)$ d) $F(6; 1)$ e) $(3; -3)$. Tee joonis.

1004. Märgi teljestikku vektorid ja leia nende vektorite koordinaadid, kui antud on vektori alguspunkt ja lõpp-punkt.

a) $O(0; 0)$ ja $A(4; 5)$ c) $S(3; -4)$ ja $T(1; 2)$ e) $U(2; 1)$ ja $V(5; -4)$
b) $B(-4; 0)$ ja $W(4; -2)$ d) $K(0; 3)$ ja $L(-1; 2)$ f) $X(-2; 1)$ ja $N(5; 0)$

1005. Leia vektori alguspunkt, kui vektori koordinaadid on $(-3; 4)$ ja lõpp-punkt on: a) $O(0; 0)$ b) $L(0; 6)$ c) $K(2; 7)$ d) $E(3; -3)$.

1006. Joonista koordinaattasandile kolm antud koordinaatidega vektorit, võttes iga kord erineva alguspunkti:

a) $\vec{a} = (2; 4)$ b) $\vec{b} = (4; -3)$ c) $\vec{n} = (0; -4)$ d) $\vec{c} = (-3; -2)$.

1007. Kanna teljestikku punktid $A(2; 4)$, $B(7; 2)$, $C(-3; -6)$ ja $D(5; -1)$ ja leia vektorite $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{DB}$ koordinaadid.

1008. $A(2; 7)$, $B(3; 1)$ ja $C(-2; 0)$ on kolm tasandi punkti. Tee joonis ja leia tasandilt
a) punkt D, et $\overrightarrow{AB}$ ja $\overrightarrow{CD}$ oleks võrdsed vektorid;
b) punkt E, et $\overrightarrow{AC}$ ja $\overrightarrow{BE}$ oleks võrdsed vektorid.

1009. Täida tabel.

Alguspunkt	Lõpp-punkt	Vektori koordinaadid $(a; b)$	Pikkus $\sqrt{a^2 + b^2}$	Tõus $\frac{b}{a}$
$A(3; 6)$	$B(4; 8)$			
$C(2; 7)$	$D(5; 3)$			
$E(-2; 1)$	$F(0; 5)$			
$G(3; -2)$	$H(6; -6)$			
$I(-4; -3)$	$J(-3; -1)$			
$K(0; -5)$	$L(1; -3)$			
$M(0; 2)$	$N(3; -2)$			
$P(5; 3)$	$Q(4; 1)$			

Kui vektorid on ühepikkused ja ühesuguse tõusuga, kas sellest järeldub, et need vektorid on võrdsed?

1010. Lennuk liigub 200 km põhja suunas ja seejärel 400 km läände. Joonista nihkevektor, mis ühendab lennuki algasukoha lõppasukohaga. Määra selle vektori pikkus,
a) jooniselt mõõtmise teel;
b) arvutades Pythagorase teoreemi abil.
Leia nurk, mille oleks otsekurss moodustanud põhjasuunaga.

1011. Jalgrattur sõidab otse punktist $A(2; 1)$ punkti $B(8; 9)$, punktist B punkti $C(-4; 4)$ ja punktist C punkti $D(6; 4)$. Leia kogu jalgratturi poolt läbitud tee ja punktide A ja D vaheline kaugus (linnulennult).

1012. Vektor $(-5; 5)$ kujutab endast jõudu njuutonites (N). Millises kompassisuunas märgitud suunas see jõud mõjub? Leia jõu suurus.

1013. Kui $ABCD$ on rööpkülik, kas siis $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$? Kas $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$?

1014. Olgu meil korrapärane hulknurk, mille külgede arv on n. Mitu erinevat vektorit saab moodustada selle hulknurga
a) külgedest; b) külgedest ja diagonaalidest?

1015. Kirjuta programm, mis pärast vektori koordinaatide sisestamist arvutaks vektori pikkuse.

6.4.5. VEKTORITE LIITMINE

Kui liidame kahte vektorit, siis tulemuseks saame kolmanda vektori. Vektoreid saab liita algebraliselt ja geomeetriliselt. Näidetes kasutame paralleelselt mõlemat viisi.

Näide 1.

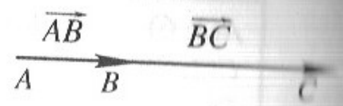
Lennuk lendas punktist A 200 km itta ja jõudis punkti B. Sealt lendas lennuk veel 400 km itta ja jõudis punkti C.

Algebraline lahendus

$$\overrightarrow{AB} = (200; 0)$$
$$\overrightarrow{BC} = (400; 0)$$
$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = (200; 0) + (400; 0)$$
$$= (600; 0)$$
$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}.$$

$\overrightarrow{AC}$ on vektorite $\overrightarrow{AB}$ ja $\overrightarrow{BC}$ **summavektor**.

Geomeetriline lahendus

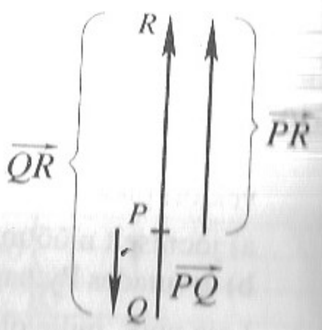


Näide 2.

Mees liikus punktist P 200 m lõunasse punkti Q ja sealt 500 m põhja suunas ja jõudis punkti R.

$$\overrightarrow{PQ} = (0; -200)$$
$$\overrightarrow{QR} = (0; 500)$$
$$\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = (0; -200) + (0; 500)$$
$$= (0; 300)$$
$$\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR}.$$

$\overrightarrow{PR}$ on vektorite $\overrightarrow{PQ}$ ja $\overrightarrow{QR}$ **summavektor**.

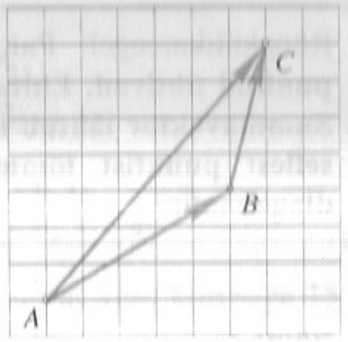


Näide 3.

Kuhu liikus punkt A vektori $\overrightarrow{AB} = (5; 3)$ võrra ja $\overrightarrow{BC} = (1; 4)$ järel vektori võrra.

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = (5; 3) + (1; 4)$$
$$= (6, 7)$$
$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}.$$

$\overrightarrow{AC}$ on vektorite $\overrightarrow{AB}$ ja $\overrightarrow{BC}$ **summavektor**.

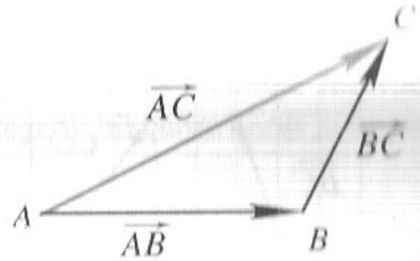


TÄHELDUSED

Vektorite summa koordinaadid saame, kui liidame nende vektoritele vastavad koordinaadid.
$\vec{u} = (a; b) \wedge \vec{v} = (c; d)$
$\vec{w} = \vec{u} + \vec{v} = (a + c; b + d)$

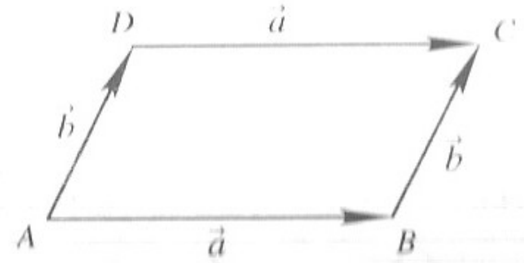
Et liita kahte vektorit, selleks paigutame need vektorid nii, et esimese vektori lõpp-punkt ühtib teise algusega. Summavektor ühendab esimese vektori algust teise lõpuga.

Kolmnurgareegel



Mitteparalleelseid vektoreid saab liita ka nn. **rööpkülikureegli** abil. Olgu meil kaks vektorit $\vec{a}$ ja $\vec{b}$, nii et $\vec{a} \nparallel \vec{b}$. Liidame need vektorid kolmnurgareegli järgi.

Olgu vektor $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{BC}$, siis
$\vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.
Kui aga võtta $\vec{b} = \overrightarrow{AD}$, $\vec{a} = \overrightarrow{DC}$, siis
$\vec{b} + \vec{a} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AC}$.



Mõlemal viisil liites saime ühesuguse tulemuse (see on ka loomulik — ka vektorite summa ei sõltu liidetavate järjekorrast). Vaatame nüüd rööpkülikut $ABCD$. Selle rööpküliku üks diagonaal ongi otsitav vektor $\vec{a} + \vec{b}$.

Rööpkülikureegel: **Paigutame liidetavad vektorid nii, et nende alguspunktid ühtivad. Ehitame rööpküliku, mille külgedeks on need vektorid. Summavektor lähtub liidetavate vektorite ühisest alguspunktist, paikneb sellest punktist tõmmatud diagonaalil ja on pikkuselt võrdne selle diagonaaliga.**

Näide 4.

Kui $\vec{AB} = (4; 1)$, $\vec{BC} = (1; 3)$ ja $\vec{CD} = (-3; 4)$, siis leiame summavektori $\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CD}$.

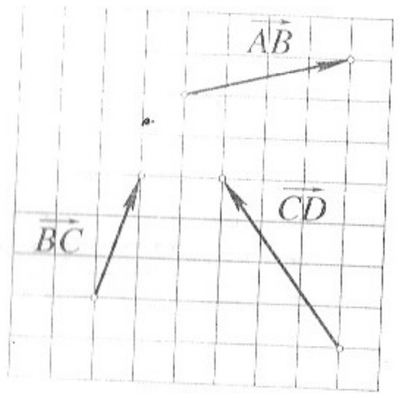
Algebraline lahendus

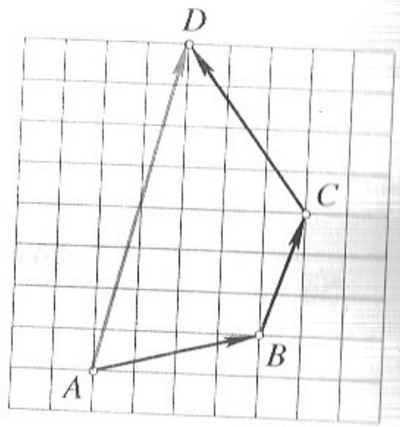
$\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CD} = (4; 1) + (1; 3) + (-3; 4)$
$= (4 + 1 - 3; 1 + 3 + 4)$
$= (2; 8)$.

Summavektor on $\vec{AD} = (2; 8)$.

Geomeetriline lahendus

Leiame kõigepealt vektorite $\vec{AB}$ ja $\vec{BC}$ summa kolmnurga reegli järgi, tulemusele liidame vektori $\vec{CD}$ sama reegli järgi.





Mitme vektori liitmiseks kasutatakse hulknurgareeglit, mis on kolmnurgareegli üldistus.

Hulknurgareegel: **Selleks, et liita mitu vektorit, asetame nad nii, et esimese lõpp ühtib teise algusega, teise lõpp kolmanda algusega jne. Summavektoriks on vektor, mis ühendab esimese vektori algust viimase lõpuga.**

1016. Liida järgmised vektorid algebraliselt.

a) (2; 3) (5; 7)
b) (−5; 4) (6; 3)
c) (−2; −5) (5; 4)
d) (3; −5) (4; 2)
e) (−3; −4) (−2; −3)
f) (4; 7) (3; 6)
g) (6; 4) (−6; −4)
h) (10; −3) (−13; 3)
i) (0; 0) (6; 3)
j) (2; 5) (3; 12) (−5; −8)

1017. Jõe voolu kiirus on 2 km/h. Mootorpaat liigub seisvas vees kiirusega 15 km/h. Leia paadi kiirus kalda suhtes liikumisel
a) päripidi voolu; b) vastuvoolu.

1018. Kasutades sobivat skaalat, liida järgmised vektorid geomeetriliselt:
a) nihked 5 km itta ja 12 km põhja;
b) nihked 30 km põhja ja 15 km lõunasse;
c) nihked 10 km loodesse ja 3 km põhja;
d) nihked 10 km põhja, 5 km itta ja 7 km itta.

1019. Leia järgmiste vektorite summa geomeetriliselt.

a) (2; 3) (5; 2)
b) (5; 1) (4; 3)
c) (3; −4) (2; 6)
d) (−5; 3) (4; −2)
e) (3; 6) (−2; −6)
f) (−2; −3) (−4; 4)
g) (3; −2) (2; −3) (−4; 8)
h) (4; −5) (0; 4) (−4; 5) (3; 0)

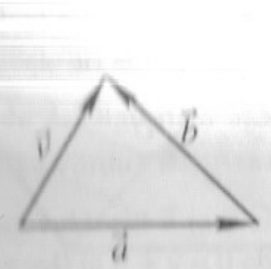
1020. Mootorpaat liigub risti jõe voolu suunaga kiirusega 12 km/h. Jõe voolu kiirus on 5 km/h. Tee joonis. Leia paadi tegelik liikumise kiirus ja suund.

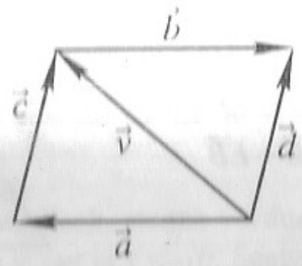
1021. Asenda märk ■ märgiga = või ≠.

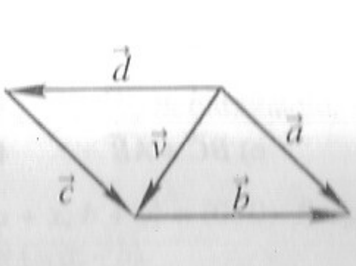
a) (−5; 4) + (3; −6) ■ (3; −6) + (−5; 4)
b) (a; b) + (c; d) ■ (c; d) + (a; b)
c) ((−5; 4) + (3; −6)) + (1; 3) ■ (3; −6) + ((−5; 4) + (1; 3))
d) ((a; b) + (c; d)) + (e; f) ■ (a; b) + ((c; d) + (e; f))

1022. Näita, et iga $\vec{a}$, $\vec{b}$ ja $\vec{c}$ korral kehtivad võrdused
a) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$
b) $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$

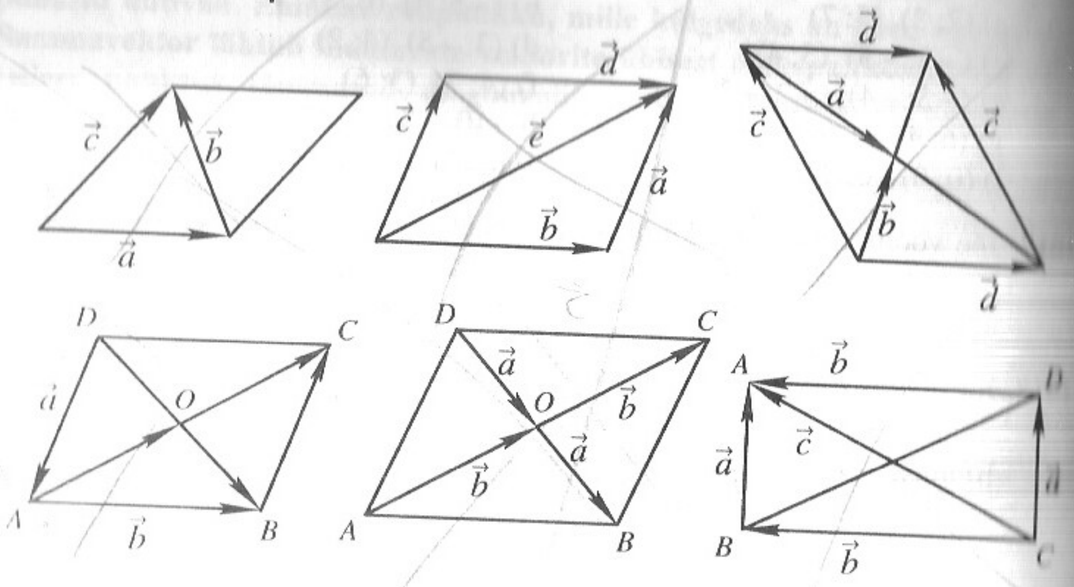
1023. Esita vektor $\vec{v}$ kahe vektori summana.



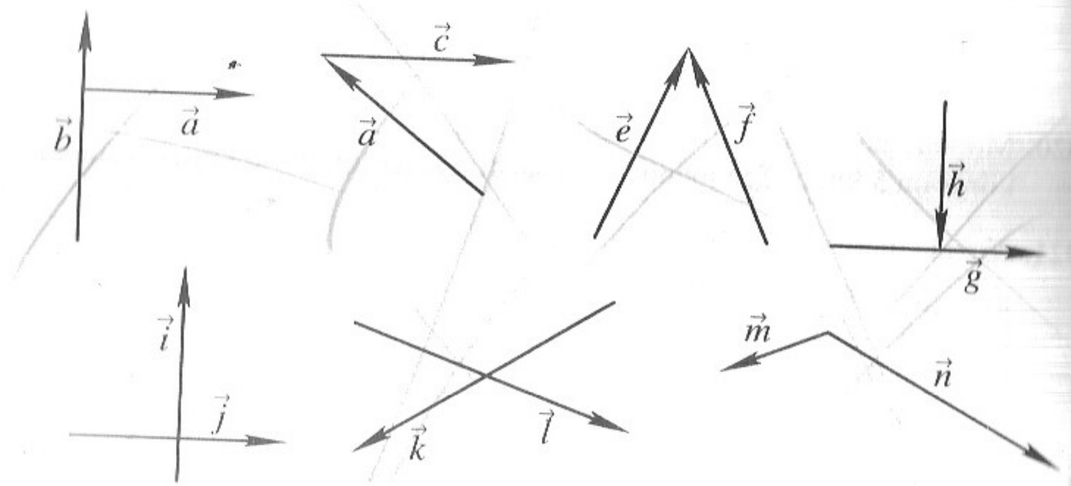




1024. Leia vektorite $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ summa $\vec{a} + \vec{b}$.



1025. Leia järgmiste vektorite summavektor.

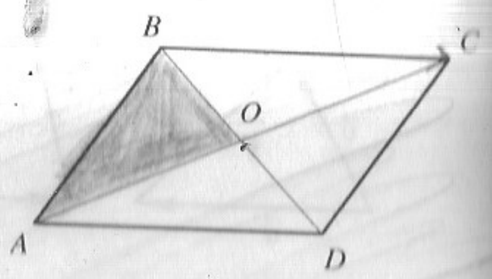


1026. $ABCD$ on rööpkülik, mille diagonaalide lõikepunkt on O. Leia järgmised vektorid.

a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BO}$ b) $\overrightarrow{CO} + \overrightarrow{OA}$

c) $\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{CD}$ d) $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{OB}$

e) $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB}$ f) $\overrightarrow{CE} + \overrightarrow{EB}$



1027. $ABCDE$ on kumer viisnurk. Tee joonis. Leia järgmised vektorid.

a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$

b) $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) + \overrightarrow{CD}$

c) $\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE}$

d) $\overrightarrow{BC} + (\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE})$

e) $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) + (\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE})$

1028. Mida teeb järgmine programm? Mis on selles programmis tähistatud tähtedega A, B ja C?

```
10 DIM X(100),Y(100)
20 A=0:B=0:C=0
30 PRINT "Mitu vektorit? ";:INPUT N
40 FOR I=1 TO N
50 PRINT "Sisesta x ";I;:INPUT X(I)
60 PRINT "Sisesta y ";I;:INPUT Y(I)
70 A=A+X(I)
80 B=B+Y(I)
90 NEXT I
100 PRINT "Summavektor on (";A;";";B;")"
110 C=SQR(A*A+B*B)
120 PRINT "Selle vektori pikkus on ";C
130 END
```

6.4.6. NULLVEKTOR. VASTANDVEKTOR. VEKTORITE VAHE

Nullvektori ja antud vektori vastandvektori mõisteni jõudmiseks lahendame kaks lihtsat näiteülesannet.

Näide 1. Olgu meil mingi vektor $\vec{v} = (a; b)$. Leida vektori $\vec{z} = (x; y)$ koordinaadid, et kehtiks võrdus $\vec{v} + \vec{z} = \vec{v}$.

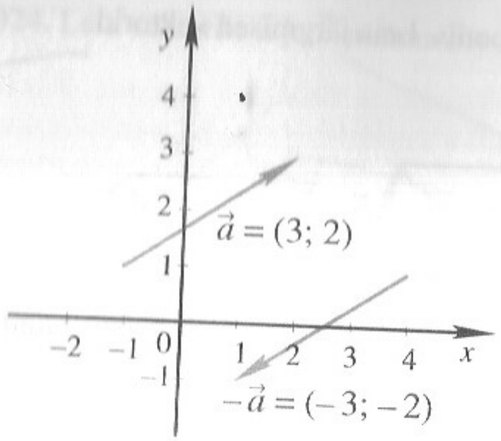
Liites need vektorid algebraliselt, saame $(a + x; b + y) = (a; b)$. Viimane võrdus kehtib ainult juhul, kui $x = 0$ ja $y = 0$.

Vektorit $\vec{0} = (0; 0)$ nimetatakse nullvektoriks.

Nullvektori pikkus on võrdne nulliga, tema alguspunkt ja lõpp-punkt ühtivad. Nullvektori siht ja suund ei ole määratud.

Näide 2. Olgu meil vektor $\vec{v} = (a; b)$. Leida vektori $\vec{z} = (x; y)$ koordinaadid, et kehtiks võrdus $\vec{v} + \vec{z} = \vec{0}$.

Liites vektorid $\vec{v}$ ja $\vec{z}$ algebraliselt, saame võrduse $(a + x; b + y) = (0; 0)$. Seega $a + x = 0$ ja $b + y = 0$ ehk $x = -a$ ja $y = -b$. Seega $\vec{z} = (-a; -b)$.



Vektori $\vec{v} = (a; b)$ vastandvektoriks nimetatakse vektorit $-\vec{v} = (-a; -b)$.
$\vec{v} + (-\vec{v}) = \vec{0}$.

Kui kaks vektorit on teineteise vastandvektorid, siis on nad ühepikkused ja samasihilised, aga vastassuunalised. (Vt. joonist.)

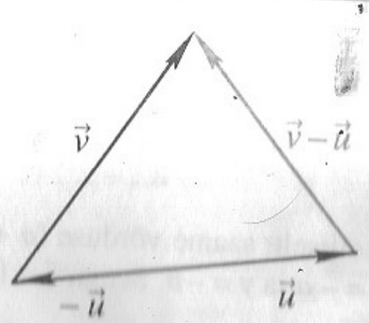
Kui me õppisime tehteid reaalarvudega, siis saime teada, et arvu lahutamine tähendas selle arvu vastandarvu liitmist. Näit. $8 - (-3) = 8 + (+3) = 11$
$9 - (+11) = 9 + (-11) = -2$

Analoogiliselt toimub vektori lahutamine ja nimelt:

Vektori lahutamine tähendab selle vektori vastandvektori liitmist.
Kui $\vec{v} = (a; b)$ ja $\vec{u} = (c, d)$, siis
$\vec{v} - \vec{u} = \vec{v} + (-\vec{u}) = (a; b) + (-c; -d) = (a - c; b - d)$.

Vektorite $\vec{v}$ ja $\vec{u}$ vahe leidmiseks paigutame need vektorid nii, et nad lähtuksid ühisest alguspunktist. Seejärel võib asendada vektori $\vec{u}$ ta vastandvektoriga $-\vec{u}$ ja liita vektorid $\vec{v}$ ja $-\vec{u}$ kolmnurga reegli järgi.

Selleks, et lahutada ühest vektorist teine vektor, paigutame need vektorid nii, et nad lähtuksid ühisest alguspunktist. Vektorite vahe vektor lähtub lahutatava vektori lõpp-punktist ja suundub vähendatava vektori lõpp-punkti.



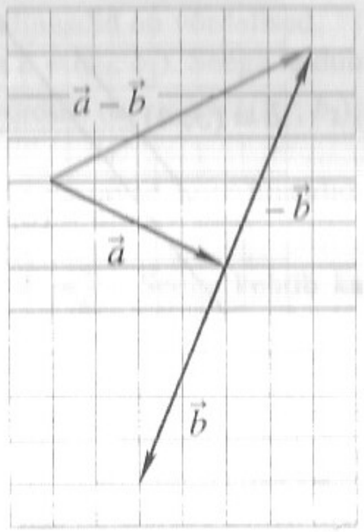
Näide 4. Olgu $\vec{a} = (4; -2)$ ja $\vec{b} = (-2; -5)$.
Leiame $\vec{a} - \vec{b}$.

Algebraline lahendus:

$$\begin{aligned}\vec{a} - \vec{b} &= (4; -2) - (-2; -5)\\ &= (4; -2) + (2; 5)\\ &= (4 + 2; -2 + 5)\\ &= (6; 3)\end{aligned}$$

Geomeetriline lahendus:

1) joonestame vektorid $\vec{a} = (4; -2)$ ja $\vec{b} = (-2; -5)$;
2) joonestame vektori $-\vec{b} = (2; 5)$;
3) konstrueerime vektori $\vec{a} - \vec{b} = (6; 3)$.



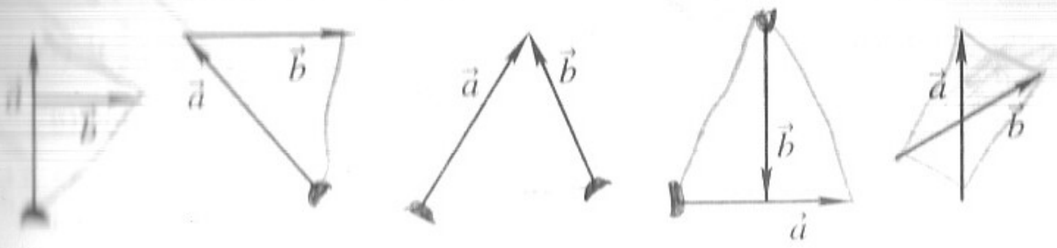
1029. Leia x ja y, et kehtiks võrdus.

a) $(a; b) + (x; y) = (a; b)$
b) $(3; -4) + (y; -x) = (3; -4)$
c) $(2; 6) + (x; y) = (0; 0)$
d) $(3; -5) + (x; y) = (0; 0)$
e) $(-5; 6) + (0; y) = (x; 6)$
f) $(x; y) + (-7; -4) = (0; -4)$

1030. Leia vektorite vahe.

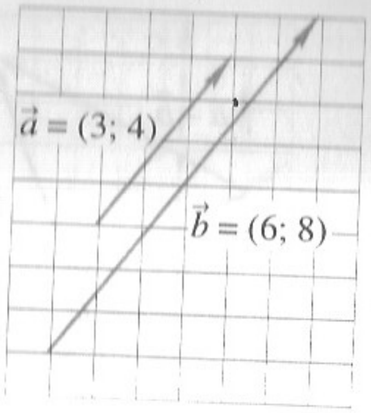
a) $(5; 2) - (4; 0)$
b) $(7; -5) - (-2; -4)$
c) $(-3; -4) - (-5; -6)$
d) $(-5; 2) - (-4; 2)$
e) $(0; 0) - (4; -7)$
f) $(-3; -4) - (-3; -4)$
g) $(3x; 2b) - (x; b)$
h) $(3a; -2c) - (-2a; -4c)$
i) $(-3y; -4x) - (-5y; -6x)$
j) $(p; q) - (r; s)$
k) $(0; 0) - (-g; h)$
l) $(-3; -4) - (0; 0)$

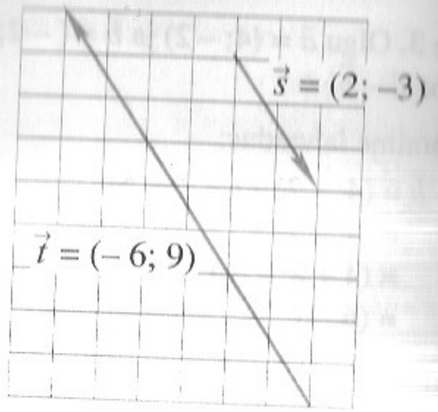
1031. Leia vektor $\vec{a} - \vec{b}$.



8.4.7. VEKTORI KORRUTAMINE ARVUGA

Olgu kaks vektorit $\vec{a} = (3; 4)$ ja $\vec{b} = (6; 8)$. Neil vektoritel on sama siht (nn. vektori tõusud $\frac{4}{3} = \frac{8}{6}$) ja sama suund, aga nende pikkused on erinevad, nimelt $|\vec{a}| = 5$ ja $|\vec{b}| = 10$. Kui me vektori $\vec{a}$ koordinaate korrutaksime kahega, saaksime vektori $\vec{b}$ koordinaadid. Seda tõsiasja võib märkida nii: $\vec{b} = 2\vec{a}$.

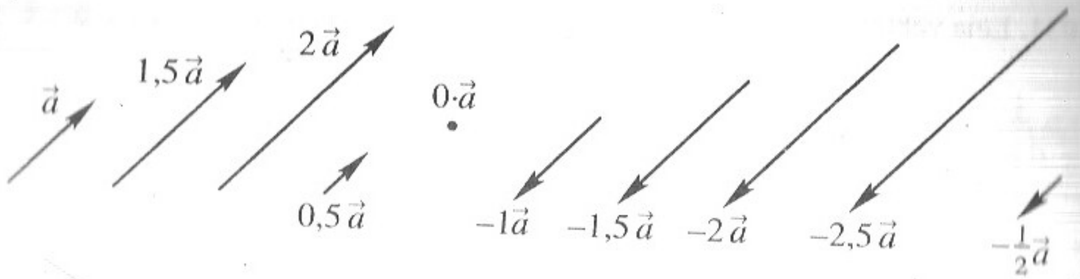




Olgu meil kaks vektorit $\vec{s} = (2; -3)$ ja $\vec{t} = (-6; 9)$. Need vektorid on samasihilised, nende suunad on aga vastupidised. Vektorite pikkused on $|\vec{s}| = \sqrt{13}$ ja $|\vec{t}| = \sqrt{36 + 81} = \sqrt{117} = \sqrt{9 \cdot 13} = 3\sqrt{13}$, seega 3 korda erinevad. Kui me vektori $\vec{s}$ koordinaate korrutaksime (-3)-ga, saaksime vektori $\vec{t}$ koordinaadid.

Kui $\vec{v} = (a; b)$, siis $k\vec{v} = (ka; kb)$.

Vektori korrutamisel arvuga k saame vektori, mis on pikkuselt võrdne arvu $|k|$ ja vektori $\vec{v}$ pikkuse korrutisega.
Kui $k > 0$, siis vektor $k\vec{v}$ on samasuunaline vektoriga $\vec{v}$ ($k\vec{v} \uparrow\uparrow \vec{v}$).
Kui $k < 0$, siis vektor $k\vec{v}$ on vastassuunaline vektoriga $\vec{v}$ ($k\vec{v} \uparrow\downarrow \vec{v}$).



Joonisel on mõned vektorid, mis me saame, kui korrutame vektorit $\vec{a}$ mõnede arvudega. Korrutamisel arvuga -1 saame tulemuseks esialgse vektori vastandvektori, arvuga null aga nullvektori.

Seega $(-1)\cdot\vec{a} = \vec{a}$ ja $0\cdot\vec{a} = \vec{O}$.

Teame, et kahte samasihilist vektorit nimetatakse ka *kollineaarseteks* vektoriteks. Teiselt poolt, vektorite kollineaarsus defineeritakse vahel järgmiselt:

Kaht vektorit $\vec{u}$ ja $\vec{v}$, millede vahel kehtib seos $\vec{u} = k\vec{v}$, kus k on konstant, nimetatakse kollinèaarseteks.

Saab näidata, et kollineaarsete vektorite vastavad koordinaadid on võrdelised.
Olgu meil kaks kollineaarset vektorit. $\vec{a} = (a_1; a_2)$ ja $\vec{b} = (b_1; b_2)$. Seega leidub sellegine arv k, et kehtib võrdus $\vec{a} = k\vec{b}$. Siis kehtib võrdus: $(a_1; a_2) = k(b_1; b_2)$. Viimast saame: $(a_1; a_2) = (kb_1; kb_2)$.
Kui vektorid on võrdsed, siis on võrdsed ka nende vastavad koordinaadid. Seega $a_1 = kb_1$ ja $a_2 = kb_2$.
Avaldame mõlemast võrdusest k, saame $k = \frac{a_1}{b_1}$ ja $k = \frac{a_2}{b_2}$. Seega kehtib ka võrdus $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2}$.

Kahe kollineaarse vektori $\vec{a} = (a_1; a_2)$ ja $\vec{b} = (b_1; b_2)$ vastavad koordinaadid on võrdelised, s.t. $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2}$.

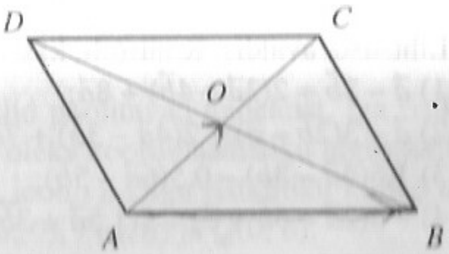
Saab näidata ka vastupidist, s.t. et kui kahe vektori vastavad koordinaadid on võrdelised, siis need vektorid on kollineaarsed: $\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2}$.

1031. Teosta tehted.

a) $3(3; 6)$ b) $3(4, -2)$ c) $0{,}5(4; 8)$ d) $-3(-2; 4)$
e) $-2(-3; 0)$ f) $0(4; -2)$ g) $0{,}5(-3; 6)$ h) $\frac{2}{3}(-2; 6)$
i) $2(2; 3) + 3(2; 1)$ j) $2(1; -5) + 4(-1; 1)$ k) $5(2; 3) + (-2)(2; -1)$
l) $5(2; -3) + 4(1; 0)$ m) $-3(0; -3) + 2(2; 1)$ n) $5(4; 99) + 5(-4; -99)$
o) $\frac{1}{4}(8; -12) + (4; 5)$ p) $-2(-1; 3) + (-2; 6)$ q) $0(3{,}5; 2) + (-4)(1; 1)$
r) $4(\frac{3}{2}; \frac{-6}{4}) - (2; 4)$ s) $5((3; -2) - (-2; 4))$ t) $(-3; 7) - (-5)(0; -1)$
u) $2(4; 1) - 3(1; -2) + 4(2; 7)$ v) $3(7; 1) - 2(-1; -7) - \frac{1}{2}(4; -6)$

1033. On antud rööpkülik $ABCD$, mille diagonaalid lõikuvad punktis O. Leia järgmised vektorid.

a) $\vec{AB} - \vec{BC}$ b) $\vec{AB} - \vec{AO}$ c) $\vec{BC} - \vec{OC}$
d) $\vec{AO} - \vec{OB}$ e) $\vec{AO} - \vec{AO}$ f) $\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CA}$
g) $\vec{AB} - \vec{CB}$ h) $\vec{BC} - \vec{DC}$ i) $(\vec{AB} - \vec{CB}) - \vec{DC}$
j) $\vec{AO} - \vec{OA}$ k) $\vec{BA} - (\vec{BC} + \vec{CD})$ l) $\vec{AC} + \vec{CB} + \vec{AO}$
m) $\vec{AO} - \vec{AB} + \vec{DA}$ n) $\vec{CO} - \vec{DO} - \vec{BC}$

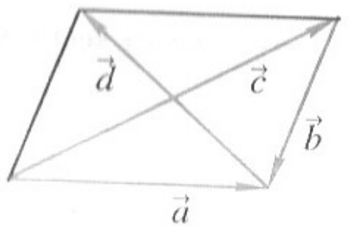


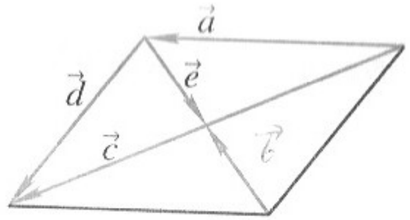
1034. Tõesta, et iga k, l, $\vec{u}$ ja $\vec{v}$ korral kehtivad võrdused

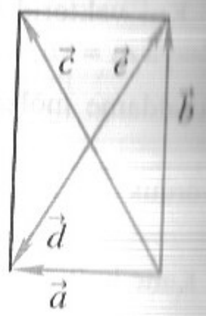
a) $k(l\vec{v}) = (kl)\vec{v}$ b) $k(\vec{u} + \vec{v}) = k\vec{u} + k\vec{v}$

c) $k(\vec{u} - \vec{v}) = k\vec{u} - k\vec{v}$.

1035. Leia $\vec{a} - \vec{b}$.







1036. $ABCDE$ on viisnurk. Leia vektor.

1) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AE}$ 2) $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD}$ 3) $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BC}$

4) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE} - \overrightarrow{AD}$ 5) $\overrightarrow{EC} - \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}$ 6) $\overrightarrow{BE} + \overrightarrow{DC} - \overrightarrow{BC}$

7) $\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{DE} - \overrightarrow{EC} - \overrightarrow{AB}$ 8) $\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{BD} - \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{CA} - \overrightarrow{EA}$

1037. On antud vektorid $\vec{a} = (4; -1)$, $\vec{b} = (2; 8)$, $\vec{c} = (-3; -5)$. Leia vektor.

1) $3\vec{a} + 4\vec{b} + 2\vec{c}$ 2) $5\vec{a} - 2\vec{b} + 3\vec{c}$ 3) $4\vec{c} + 5\vec{b} - 2\vec{a}$

1038. On antud punktid $A(3; 2)$, $B(-4; 1)$, $C(2; -5)$, $D(-3; -2)$. Leia vektor.

1) $2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{BC} + 4\overrightarrow{CD}$ 2) $5\overrightarrow{DA} + 2\overrightarrow{CB} - 3\overrightarrow{AC}$

3) $3\overrightarrow{DC} - 4\overrightarrow{CA} - 2\overrightarrow{BD}$ 4) $\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA}$

1039. Leia kolm antud vektoriga kollineaarset vektorit.

a) $(2; 1)$ b) $(-4; 3)$ c) $(\frac{4}{5}; \frac{1}{2})$ d) $(0{,}5; -2)$ e) $(0; 1)$.

1040. Kas vektorid $\vec{u}$ ja $\vec{v}$ on kollineaarsed?

a) $\vec{u} = (6; -4)$ $\vec{v} = (9; -6)$ b) $\vec{u} = (-2; 3)$ $\vec{v} = (8; -12)$

c) $\vec{u} = (3{,}7; 5{,}4)$ $\vec{v} = (1{,}11; 1{,}62)$ d) $\vec{u} = (\frac{2}{3}; \frac{3}{2})$ $\vec{v} = (4; -9)$

e) $\vec{u} = (3; -5)$ $\vec{v} = (-4{,}5; 7{,}5)$ f) $\vec{u} = (-2; 0)$ $\vec{v} = (3; 0)$

g) $\vec{u} = (0; 2)$ $\vec{v} = (1; -1)$ h) $\vec{u} = (2; -1)$ $\vec{v} = (0; 0)$

1041. Teades, et $\vec{u} \parallel \vec{v}$, leia parameeter s.

a) $\vec{u} = (6; 4)$ $\vec{v} = (s; -6)$ b) $\vec{u} = (2; -s)$ $\vec{v} = (3; -6)$

c) $\vec{u} = (6; -4)$ $\vec{v} = (9; 1 + s)$ d) $\vec{u} = (1; 2)$ $\vec{v} = (s; -7)$

1042. Lihtsusta avaldis. Kontrolli, kas vastuste summa on nullvektor.

1) $\vec{a} - 3\vec{b} + 2(3\vec{a} - 4\vec{b}) + 8\vec{a}$;

2) $\vec{a} - 3(2\vec{b} - \vec{a}) + 2(4\vec{a} - 3\vec{b}) + 7\vec{a}$;

3) $1{,}5(4\vec{a} - 3\vec{b}) - 0{,}5(6\vec{a} - 5\vec{b})$;

4) $-3(2\vec{a} - 5\vec{b} + \vec{c}) + 2(1{,}5\vec{a} + 3\vec{b}) - 6(5\vec{a} - 0{,}5\vec{c})$.

8.8. LÕIGU KESKPUNKTI KOORDINAADID

Vaatleme lõiku, mille otspunktid on $A(x_1; y_1)$ ja $B(x_2; y_2)$. Selle lõigu keskpunkt olgu $C(x_c; y_c)$. Avaldame lõigu keskpunkti koordinaadid otspunktide koordinaatide kaudu. Et C on lõigu AB keskpunkt, siis $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}$. Seega

$(x_c - x_1; y_c - y_1) = (x_2 - x_c; y_2 - y_c)$.

Et vastavate vektorite vastavad koordinaadid on võrdsed, siis saame:

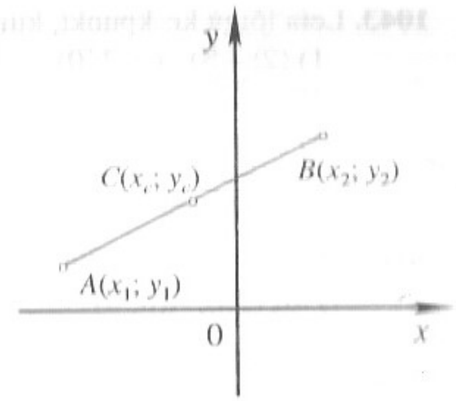
$x_c - x_1 = x_2 - x_c$

ja

$y_c - y_1 = y_2 - y_c$.

Avaldades nendest võrdustest x_c ja y_c, saame

$x_c = \frac{x_1 + x_2}{2}$ ja $y_c = \frac{y_1 + y_2}{2}$.

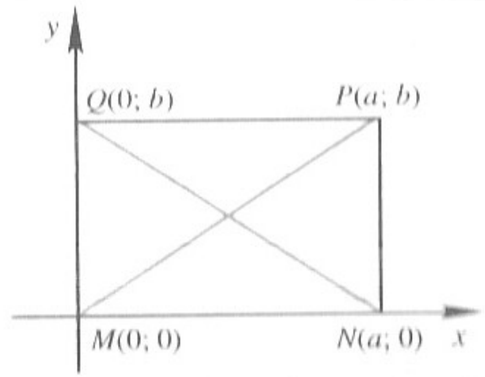


Kui punktid $A(x_1; y_1)$ ja $B(x_2; y_2)$ on lõigu otspunktid, siis selle lõigu keskpunkti $C(x_c; y_c)$ koordinaadid on $x_c = \frac{x_1 + x_2}{2}$ ja $y_c = \frac{y_1 + y_2}{2}$

Seega võib öelda, et lõigu keskpunkti koordinaadid on tema otspunktide vastavate koordinaatide aritmeetilised keskmised.

Näide 1. Leida lõigu KL keskpunkt M, kui $K(1; 2)$ ja $L(-3; 4)$. Keskpunkt on

$M(\frac{1 + (-3)}{2}; \frac{2 + 4}{2}) = M(-1; 3)$



Näide 2. Näitame, et ristküliku diagonaalid poolitavad teineteist. Iga ristküliku saab paigutada teljestikku nii, et üks tipp oleks koordinaadistiku alguspunktis ja küljed oleksid paralleelsed telgedega (vt. joonis). Olgu ristküliku küljed a ja b. Tippude koordinaadid on siis $M(0; 0)$, $N(a; 0)$, $P(a; b)$ ja $Q(0; b)$.

Lõigu MP keskpunkt on siis $\left(\frac{0+a}{2};\frac{0+b}{2}\right)=\left(\frac{a}{2};\frac{b}{2}\right)$.

Lõigu NQ keskpunkt on siis $\left(\frac{a+0}{2};\frac{0+b}{2}\right)=\left(\frac{a}{2};\frac{b}{2}\right)$.

Et diagonaalidel on ühine keskpunkt, siis nad poolitavad teineteist.

1043. Leia lõigu keskpunkt, kui on antud otspunktid.

1) $(2;-3)$, $(-2;0)$ 2) $(3;2)$, $(-1;-2)$ 3) $(5;-1)$, $(-1;5)$
4) $(a;n)$, $(d;y)$ 5) $(2b;3)$, $(4;-5)$ 6) $(2{,}3;3{,}7)$, $(1{,}5;-2{,}9)$
7) $(a;4)$, $(a+2;0)$ 8) $(4;\sqrt{3})$, $(2;-\sqrt{3})$ 9) $(\sqrt{3};-1)$, $(1;\sqrt{3})$
10) $(3a;-2b)$, $(-a;2b)$ 11) $(t;2)$, $(t+4;-4)$ 12) $(\frac{1}{2};1)$, $(\frac{3}{4};\frac{1}{3})$

1044. M on lõigu AB keskpunkt. Leia punkti B koordinaadid.

1) $M(1;3)$, $A(0;0)$ 2) $M(4;-2)$, $A(4;4)$ 3) $M(1;-3)$, $A(5;1)$
4) $M(0;0)$, $A(a;b)$ 5) $M(4;4)$, $A(4;-2)$ 6) $M(a;b)$, $A(0;0)$
7) $M(r;s)$, $A(t;v)$ 8) $M(0;-e)$, $A(e;0)$ 9) $M(5z;3y)$, $A(-3z;y)$

1045. Leia kolmnurga ABC külgede keskpunktide koordinaadid, kui $A(-4;-5)$, $B(2;-6)$ ja $C(-1;5)$. Joonesta kolmnurk ABC ja kolmnurk, mille saad nende külgede keskpunktide ühendamisel. Mitu sarnast kolmurka on joonisel?

1046. Sirglõik AB on jaotatud mingi punktiga C kaheks osaks. Nende osade keskpunktide vaheline kaugus on 5,6 cm. Kui pikk on lõik AB?

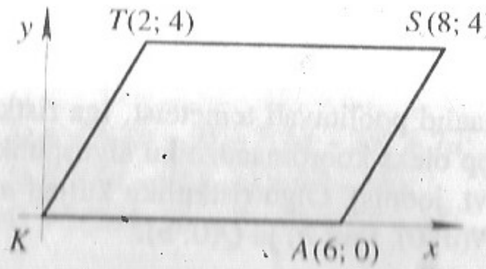
1047. $A(0;0)$, $B(6;0)$, $C(0;8)$ on täisnurkse kolmnurga kolm tippu. Näita, et hüpotenuusi keskpunkt on võrdsel kaugusel kõigist tippudest.

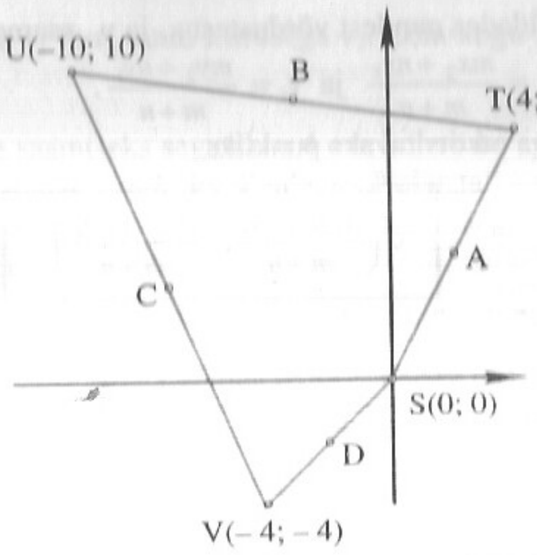
1048. Trapetsil on antud 4 tippu. Leia kesklõigu otspunktide koordinaadid ja kesklõigu pikkus.

a) $A(-3;-1)$, $B(-3;2)$, $C(1;4)$, $D(1;-10)$
b) $K(-4;-3)$, $L(-1;4)$, $M(4;4)$, $N(7;-3)$

1049. Joonisel on kujutatud nelinurk $KAST$.

1) Näita, et $KA = TS$ ja $KT = AS$.
2) Milline nelinurk on $KAST$?
3) Leia diagonaalide KS ja TA keskpunktid.
4) Kui diagonaalide keskpunktid ühtivad, siis sõnasta põhikoolist tuntud lause. Kuidas on see lause seotud ülesandega?





1050. Nelinurgal $STUV$ on tipud S, T, U ja V.

1) Leia külgede keskpunktid A, B, C ja D.
2) Leia lõikude AC ja BD keskpunktid.
3) Milline on nelinurk $ABCD$? Kas selline tulemus sõltub punktide S, T, U ja V valikust?

1051. Tõesta, et lõik, mis ühendab kolmnurga kahe külje keskpunkte, on paralleelne kolmnurga kolmanda küljega ja ta pikkus on pool kolmanda külje pikkusest. (Näpunäide: paiguta kolmnurk nii, et üks tipp oleks koordinaatide alguses ja teine tipp x-teljel mingis punktis $(a;0)$. Tähista kolmnurga kolmanda tipu koordinaadid $(b;c)$. Tõestamisel võta eeskuju selle teema teisest näitest.)

Lisaks põhikursusele

6.6. LÕIGU JAOTAMINE ANTUD SUHTES

On antud punktid $A(x_1;y_1)$ ja $B(x_2;y_2)$. Tuleb leida nende punktide vahelisel lõigul punkt, mis jaotab lõigu suhtes $\frac{m}{n}=k$. Olgu otsitavaks punktiks $C(x_c;y_c)$. Et see punkt jaotab lõigu AB suhtes $\frac{m}{n}=k$, siis peab kehtima võrdus:

$\frac{AC}{CB}=\frac{m}{n}$ ehk $AC\cdot n = CB\cdot m$ ehk

$(x_c-x_1;\ y_c-y_1)m=(x_2-x_c;\ y_2-y_c)m$.

Siit saame

$[(x_c-x_1)n;\ (y_c-y_1)n]=[(x_2-x_c)m;\ (y_2-y_c)m]$,

$(x_cn-x_1n;\ y_cn-y_1n)=(x_2m-x_cm;\ y_2m-y_cm)$.

Kuna vektorid on omavahel võrdsed parajasti siis, kui nende vastavad koordinaadid on võrdsed, siis

$x_cn-x_1n=x_2m-x_cm$

ja

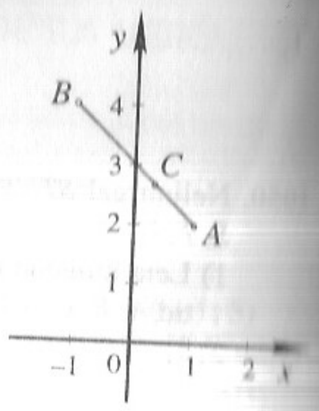
$y_cn-y_1n=y_2m-y_cm$.

Avaldades nendest võrdustest x_c ja y_c, saame

$$x_c = \frac{mx_2 + nx_1}{m+n} \text{ ja } y_c = \frac{my_2 + ny_1}{m+n}.$$

Seega on otsitavaks punktiks

$$C\left(\frac{mx_2 + nx_1}{m+n};\ \frac{my_2 + ny_1}{m+n}\right).$$



Näide 1. Leia punkt C, mis jaotab punktide $A(1; 2)$ ja $B(-1; 4)$ vahelise lõigu suhtes $1 : 2$.

Kasutades leitud valemeid, saame

$$x_c = \frac{1\cdot(-1) + 2\cdot 1}{1+2} = \frac{1}{3} \text{ ja } y_c = \frac{1\cdot 4 + 2\cdot 2}{1+2} = \frac{8}{3}.$$

Seega on otsitavaks punktiks $C\left(\frac{1}{3};\ \frac{8}{3}\right)$.

1052. Leia punkt C, mis jaotab punktide A ja B vahelise lõigu suhtes $m : n$.

1) $A(2; 1)$, $B(7; 11)$, $\frac{m}{n} = \frac{2}{3}$ 2) $A(0; 0)$, $B(101; 101)$, $\frac{m}{n} = \frac{1}{100}$

3) $A(7; 11)$, $B(2; 1)$, $\frac{m}{n} = \frac{3}{2}$ 4) $A(-100; -100)$, $B(1; 1)$, $\frac{m}{n} = \frac{100}{1}$

1053. Leia punktid, mis jaotavad punktide $(3; 4)$ ja $(-3; 1)$ vahelise lõigu kolmeks võrdseks osaks.

1054. Kolmnurga EOF tipud on E, O ja F. Leia selle kolmnurga külgede keskpunktid ja mediaanide lõikepunkt.

a) $E(0; 18)$, $O(0; 0)$, $F(6; 6)$ b) $E(-2;1)$, $O(2; -1)$, $F(4; 3)$

1055. Proovi leida punkti C, kui $A(2; -3)$, $B(8; 9)$ ja

1) $\frac{m}{n} = \frac{2}{1}$ 2) $\frac{m}{n} = \frac{1}{2}$ 3) $\frac{m}{n} = \frac{-2}{1}$ 4) $\frac{m}{n} = \frac{-1}{2}$

Tee iga juhtumi korral joonis. Mis juhtub, kui jagatis $\frac{m}{n} < 0$?

1056. Olgu lõik jaotatud suhtes $\frac{m}{n} = \lambda$. Mis juhtub, kui

a) $\lambda > 0$ b) $-1 < \lambda < 0$ c) $\lambda < -1$?

1057. Kolmnurga kaks tippu on $A(2; 1)$ ja $B(4; -3)$. Mediaanide lõikepunkt on $M(3; 1)$. Leia kolmas tipp.

1058. Algkoolis on 2 klassi. Neist ühes klassis on 12 õpilast, teises 8 õpilast. Esimese klassi õpilaste tunnistuse keskmine hinne on 4,5 ja teises klassis 3,5. Leia kogu kooli keskmine hinne.

1059. Ühes klassis on m õpilast keskmise hindega h_1, teises klassis on n õpilast keskmise hindega h_2. Leia kahe klassi õpilaste keskmine hinne.

1060. Buss sõitis 2 tundi kiirusega 60 km/h ja seejärel 3 tundi kiirusega 40 km/h. Leia kogu sõidu keskmine kiirus.

1061. Auto sõitis t_1 tundi kiirusega v_1 ja t_2 tundi kiirusega v_2. Leia kogu sõidu keskmine kiirus.

1062. Kohvikul on firmakohv, mille saamiseks segatakse 4 osa kohviube „Araabika" — hinnaga 36 krooni/kg ühe osa kohviubadega „Robusta" — hinnaga 26 krooni/kg. Leia firmakohvi kilogrammi omahind, kui segamisele läinud töökulu mitte arvestada.

1063. Segatakse kahte ainet: m kilogrammi ainet hinnaga r krooni/kg (või tihedusega r kg/m^3) ja n kilogrammi ainet hinnaga s krooni/kg (või tihedusega s kg/m^3). Leia segu ühe kilogrammi omahind (või segu tihedus).

1064. Mille poolest on ülesanded 1058 — 1063 omavahel sarnased? Mille poolest on need ülesanded sarnased lõigu jaotamisega antud suhtes, mille poolest erinevad?

Uuri ÜNEKE-sest või mõnest muust teatmeteosest, mis on kaalutud keskmine.

1065. Koolis on kümme klassi, klasside õpilaste arv ja klassi keskmine hinne on toodud järgmises tabelis.

I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X
25	23	26	23	21	22	28	31	25	26
4,5	4,3	4,0	4,2	3,9	3,6	3,5	3,4	3,5	3,7

Leia kogu kooli keskmine hinne.

1066. Kirjuta arvutiprogramm, mis võimaldaks arvutada õpilase, klassi ja kooli keskmisi hindeid. Kasuta vajaduse korral aritmeetilist, vajadusel kaalutud keskmist. Tulemused olgu väljatrükitavad sobival kujul.

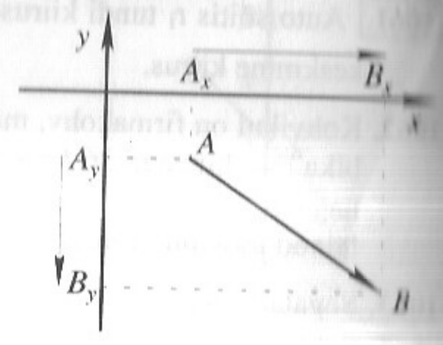
1067. Kaks ühesuguse ristlõikega raudlatti, mille pikkused on a ja b, on ühest otsast täisnurga all kokku keevitatud. Kus on sellise, L-tähe kujulise detaili raskuskese?

6.7. VEKTORI PROJEKTSIOONID KOORDINAATTELGEDEL. VEKTORI KOMPONENDID

Võtame tasandil vektori $\vec{AB}$, mille alguspunkt on punktis $A(a_x; a_y)$ ja lõpp-punkt on punktis $B(b_x; b_y)$. Punktide A ja B projektsioonid x-teljel on A_x ja B_x, projektsioonid y-teljel on A_y ja B_y.

Vektori $\vec{AB}$ projektsioonivektoriks x-teljel on vektor $\vec{A_xB_x}$ ja vektori $\vec{AB}$ projektsioonivektoriks y-teljel on vektor $\vec{A_yB_y}$. Nende projektsioonivektorite

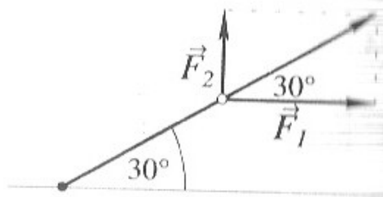
koordinaadid on $\overrightarrow{A_xB_x} = (b_x - a_x; 0)$ ja $\overrightarrow{A_yB_y} = (0; b_y - a_y)$. Leiame vektorite $\overrightarrow{A_xB_x}$ ja $\overrightarrow{A_yB_y}$ summa.



Geomeetriliselt liites võib panna need vektorid lähtuma ühest punktist — punktist A, summavektor on siis $\overrightarrow{AB}$. Algebraliselt liites saaksime $\overrightarrow{A_xB_x} + \overrightarrow{A_yB_y} = (b_x - a_x; b_y - a_y)$, mis on sellesama vektori $\overrightarrow{AB}$ koordinaadid.

Kokkuvõtteks: oleme esitanud ühe tasandil vabalt valitud vektori $\overrightarrow{AB}$ kahe vektori $\overrightarrow{A_xB_x}$ ja $\overrightarrow{A_yB_y}$ summana. Need vektorid on vektori $\overrightarrow{AB}$ ***x*-telje sihiline komponent*** $(\overrightarrow{A_xB_x})$ ja ***y*-telje sihiline komponent*** $(\overrightarrow{A_yB_y})$.

Vektori lahutamine erinevate sihtidega komponentideks leiab sageli rakendamist.



Näide 1. Paat on kinnitatud köie abil kaldasse löödud vaia külge. Paadile mõjub jõevool jõuga $\vec{F}_1$ ja puhuv tuul jõuga $\vec{F}_2$, kusjuures tuule suund on risti jõe voolu suunaga. Nurk paadi ja kalda vahel on 30°. Paadile mõjuva resultantjõu määramiseks on paadi ja köie vahel dünamomeeter. Dünamomeetri näit on 400 N. Leiame jõudude $\vec{F}_1$ ja $\vec{F}_2$ suurused.

Kui paat seisab paigal, siis kõigi paadile mõjuvate jõudude summa on null. Jõude $\vec{F}_1$ ja $\vec{F}_2$ tasakaalustab köie elastsusjõud, mida mõõdab dünamomeeter.

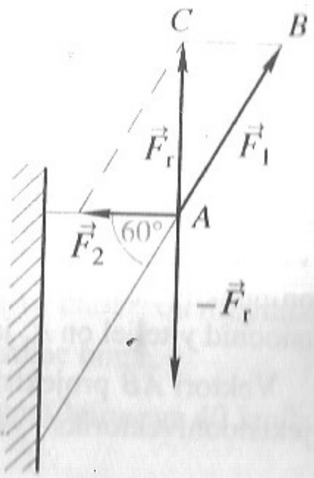
$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_{el} = \vec{O} \Rightarrow \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = -\vec{F}_{el}$$

Seega $|\vec{F}_1 + \vec{F}_2| = |\vec{F}_{el}| = 400$ N. Määrame nüüd jõudude $\vec{F}_1$ ja $\vec{F}_2$ suurused

$$|\vec{F}_1| = |\vec{F}_1 + \vec{F}_2| \cdot \cos 30° = 346{,}4 \text{ N} \approx 350 \text{ N}.$$

$$|\vec{F}_2| = |\vec{F}_1 + \vec{F}_2| \cdot \sin 30° \approx 200 \text{ N}.$$

Näide 2. Latern massiga 10 kg on kinnitatud kronsteini külge. Kronstein koosneb risttoest ja kaldtoest. Leiame tugedes tekkivad elastsusjõud, kui risttoe ja kaldtoe vaheline nurk on 60°. Lambi raskusjõud $\vec{F}_r$ on tasakaalustatud kahe elastsusjõuga $\vec{F}_1$ ja $\vec{F}_2$. $\vec{F}_1$ on elastsusjõud kokkusurutud kaldtoes ja $\vec{F}_2$ on elastsusjõud väljavenitatud rõhttoes.



$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_r = \vec{O} \Rightarrow \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = -\vec{F}_r.$$

Seega $|\vec{F}_1 + \vec{F}_2| = |\vec{F}_r| = mg = 98{,}1 \text{ N} \approx 98 \text{ N}$.

Kolmnurgast ABC saame

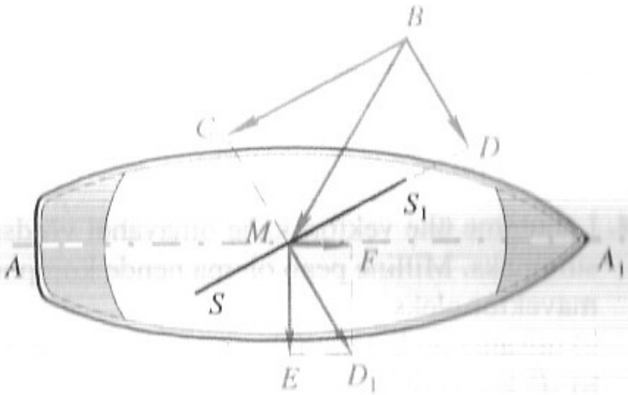
$$|\vec{F}_1| = \frac{|-\vec{F}_r|}{\sin 60°} = 113 \text{ N}.$$

$$|\vec{F}_2| = \frac{|-\vec{F}_r|}{\tan 60°} = 56{,}5 \text{ N} = 57 \text{ N}.$$

Näide 3. Uurime seda, kuidas on võimalik purjepaadiga liikuda vastu tuult. Olukorra analüüsimisel kasutame kaks korda jõu lahutamist komponentideks. Tuul puhugu suunas BM jõu $\overrightarrow{BM}$ mõjul. Paadi teljeks olgu AA_1, purje teljeks olgu SS_1.

Jõuvektori $\overrightarrow{BM}$ võib lahutada kaheks komponendiks $\overrightarrow{BC}$ ja $\overrightarrow{BD}$. Neist üks komponent $(\overrightarrow{BD})$ olgu risti purje pinnaga SS_1, teine komponent $(\overrightarrow{BC})$ olgu purje pinnaga paralleelne. Purjele mõjub neist ainult jõud $\overrightarrow{BD}$.

Jõu $\overrightarrow{BD}$ rakendame punkti M, seal tekib vektor $\overrightarrow{MD_1} = \overrightarrow{BD}$. Vektori $\overrightarrow{MD_1}$ lahutame kaheks komponendiks, neist üks $(\overrightarrow{ME})$ on risti paadi teljega AA_1, teine $(\overrightarrow{MF})$ on paralleelne paadi teljega. Komponentjõud $\overrightarrow{ME}$ paadi liikumist oluliselt ei mõjuta, kuna paadi piklik kuju ja vee takistus segab. Paati edasi viivaks jõuks jääb jõud $\overrightarrow{MF}$.

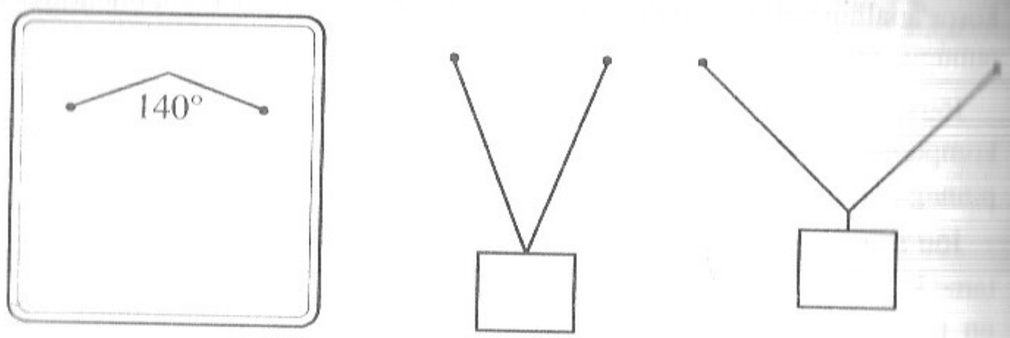


1068. Esita antud vektorid kahe komponendi summana, kui komponentide sihid on punktiirjoonega ette antud.

1069. Kaldpinnal seisab keha, mille kaal on 100 N. Kaldpinna kaldenurk on 20°. Leia toe reaktsioon ja seisuhõõrdejõud.

1070. 5 kg massiga peegli tagaküljele on kinnitatud kahest punktist nöör, mille abil on see peegel riputatud seinale. Nöör moodustab riputuskoha juures nurga 140°. Leia elastsusjõud, mis tekivad nööri mõlemas pooles. Kas need elastsusjõud on arvväärtuselt suuremad kui peegli kaal?

1071. Lahenda sama ülesanne, kui nurk peegli riputuskoha juures on 90°. Mis juhtub, kui nurk on 60°, 0°, 120°?



1072. Rippugu kahest punktist kinnitatud trossi otsas koormus. Kumba riputusviisi korral on vaja tugevamat trossi? Trossi pikkus ja koormuse mass on mõlemal juhul ühesugune.

1073. Lahutame mingi vektori komponentide summaks. Kas need komponendid on alati pikkuselt väiksemad kui see vektor? Kui ei ole, siis millal ei ole?

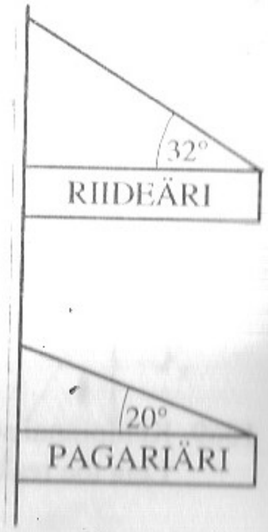
1074. Lahutame ühe vektori kahe omavahel võrdse pikkusega erisihilise vektori summaks. Milline peab olema nende komponentide vaheline nurk, et summavektor oleks

a) niisama pikk, kui mõlemad komponendid;

b) $\sqrt{2}$ korda pikem komponendi pikkusest;

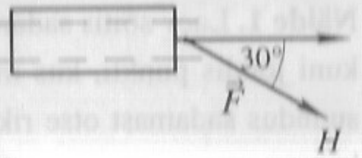
c) $\sqrt{3}$ korda pikem komponendi pikkusest?

1075. Joonisel on kaks ärisilti, mis on ühepikkused ja üheraskused, kinnitatud ühesuguse trossiga. Kumb silt on paremini kinnitatud? Põhjenda.

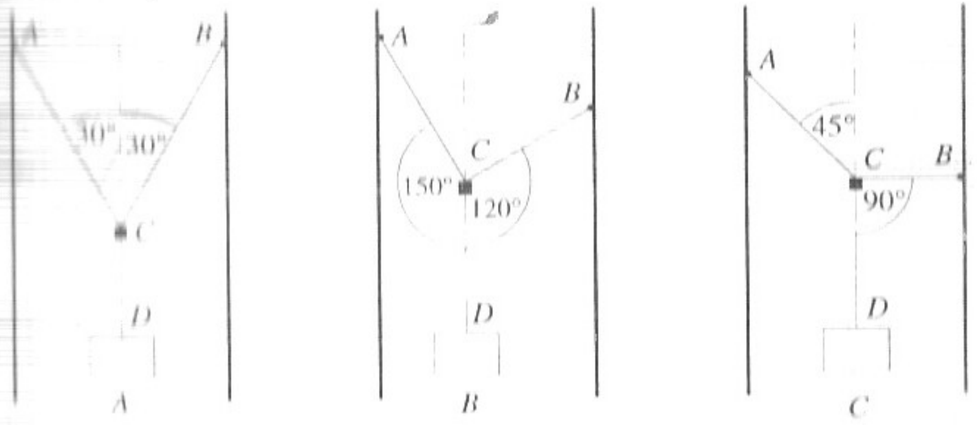


1076. Auto, mille mass on 1800 kg, on pargitud kaldpinnal, mis moodustab horisontaaltasapinnaga nurga 10°. Leia minimaalne seisuhõõrdejõud, mis hoiaks autot kaldpinnal paigal.

1077. Olgu rööbastele asetatud vagun, mida veab hobune, käies mingil kindlal kaugusel rööbaste kõrval. Vedagu hobune vagunit jõuga $\vec{F}$. Nurk vaguni telje ja veojõu suuna vahel olgu 30°. Kui suur osa veojõust kulub vaguni liigutamiseks ja kui suur osa veojõust (liikumise suunaga risti olev osa) läheb raisku? Kas hobuse töö kasutegur paraneks, kui me pikendaksime nööri?



1078. Iga joonisel näidatud koormus on kinnitatud nööri otsa punktis C. Punkt C on ühendatud kinnituskohtadega A ja B samasuguse nööri abil. Leia nöörides CA, CB ja CD tekkinud elastsusjõud. Missugune nöör võib kõige kergemini katkeda? Missugune nööridest peaks kõige kauem vastu?

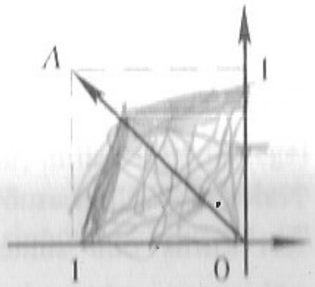


Lisaks põhikursusele

6.8. VEKTORI POLAARKOORDINAADID

Vektorit saab esitada ristkoordinaadistiku koordinaatidega, aga lisaks sellele on veel teine võimalus — saab kasutada ära vektori pikkust ja suunda. Lähtugu teljestiku alguspunktist vektor $\vec{OA} = (-1; 1)$. Selle vektori pikkus on $\sqrt{2}$ ja nurk x-teljega on 135°. Need kaks arvu võib märkida üles kui vektori $\vec{OA}$ **polaarkoordinaadid**. $\vec{OA} = (\sqrt{2}\ ;\ 135°)$.

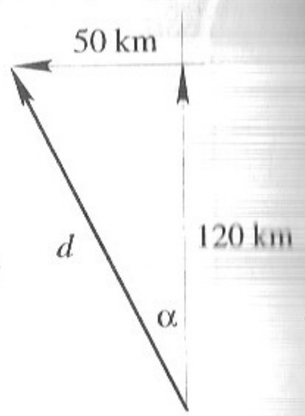
Matemaatikas võetakse polaarteljeks tavaliselt x-telg, **polaarnurgaks** e. **asimuudiks** on nurk, mida loetakse sellest teljest lähtudes vastupäeva. Geograafias võetakse polaarteljeks põhjasuund ja nurka loetakse päripäeva. Seega oleks geograafile vektori $\vec{OA}$ koordinaatideks $(\sqrt{2}\ ;\ 315°)$. Et paljud selle teema ülesanded on seotud orienteerumisega looduses, siis selle teema ulatuses kasutame geograafide tähistusviisi.



Näide 1. Laev sõitis sadamast 120 km põhja suunas ja sealt 50 km lääne suunas, kuni jõudis punkti, kus mootor läks rikki. Laevale sõitis appi puksiirlaev, mis suundus sadamast otse rikkekohale. Leia kaugus õnnetuskohani ja puksiirlaeva kurss.

1) Kauguse rikkekohani leiame Pythagorase teoreemi abil

$$d = \sqrt{120^2 + 50^2} = \sqrt{14400 + 2500} =$$
$$= \sqrt{16900} = 130 \text{ (km)}.$$



2) Nurk põhjasuunaga

$\tan\alpha = \frac{50}{120}$, $\alpha \approx 22°37'$.

Asimuut

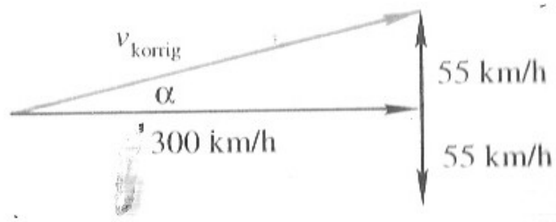
$\beta = 360° - \alpha = 337°23'$.

Vastus: Kaugus ja kurss oleksid (130; 337°).

Näide 2. Lennuk pidi lendama kiirusega 300 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ ida suunas. Puhus põhjatuul kiirusega 55 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$. Selleks, et püsida trassil ja mitte jääda lennugraafikust maha, pidi lendur tegema kursiparanduse ja suurendama lennukiirust. Leida lenduri poolt hoitav kurss ja kiirus.

Lahendus. Piloot peab hoidma kurssi suunas tuule poole, s.t. sellise vektori suunas, mis oleks planeeritud lennuvektori (300; 90°) ja tuule vektori (55; 180°) vastandvektori summa. Otsitav vastandvektor oleks (55°; 0°).

$|\vec{v}_{\text{korrig}}| = \sqrt{300^2 + 55^2} = 305$ km/h.



Nurk idasuunaga $\tan\alpha = \frac{55}{300}$,

$\alpha \approx 10°23' \approx 10°$.

Asimuut $\varphi = 90° - 10° = 80°$.

Seega $\vec{v}_{\text{korrigeeritud}} = (305; 80°)$.

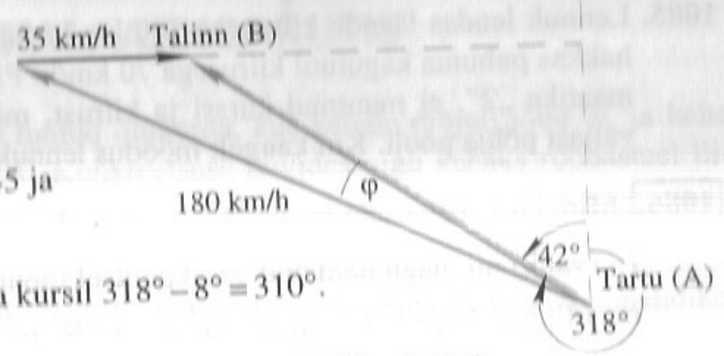
Näide 3. Tallinn asub Tartust suunas 318°. Puhub läänetuul 35 km/h. Helikopteri kiirus õhu suhtes on 180 km/h. Leia helikopteri poolt valitav kurss põhjasuuna suhtes ning helikopteri kiirus maa suhtes.

Sinusteoreemist

$\frac{\sin 132°}{180 \text{ km/h}} = \frac{\sin\varphi}{35 \text{ km/h}}$,

$\sin\varphi = \frac{35 \sin 132°}{180} \approx 0{,}1445$ ja

$\varphi = 8°18' \approx 8°$.



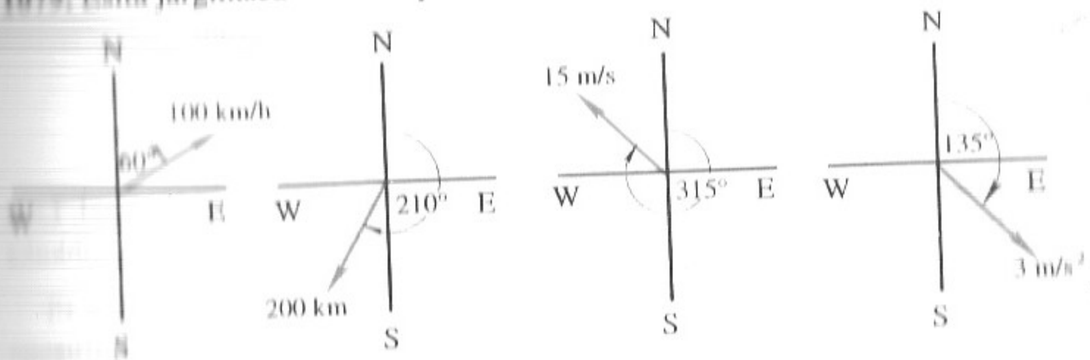
Seega tuleb Tartust väljuda kursil $318° - 8° = 310°$.

Kiirus maa suhtes

$AB^2 = 180^2 + 35^2 - 2 \cdot 180 \cdot 35 \cdot \cos(180° - 132° - 8°18') = 23930$.

$AB \approx 155$ km/h.

1079. Esita järgmised vektorid polaarkoordinaatides.



1080. Esita järgmised vektorid ristkoordinaatides.

a) (4; 135°) c) (5; 0°) e) (2; – 30°) f) (3; – 90°)
b) (6; 210°) d) (8; – 120°) f) (7; 180°) h) (1,2; 40°)

1081. Esita järgmised vektorid polaarkoordinaatides.

a) (6; 6) c) (0; 3) e) $(5\sqrt{3}; -5)$ g) (2; 5)
b) $(-4; 4\sqrt{3})$ d) (3; – 3) f) (– 4; 0) h) (– 5; – 4)

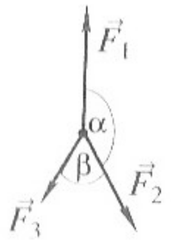
1082. Poiss tahab ujuda üle 200 m laiuse jõe, mille voolu kiirus on 2 km/h. Ta teab, et seisvas vees jaksaks ta ujuda kiirusega 5 km/h. Millise kursi peaks ta valima, et jõuda vastaskaldale täpselt selle koha vastas, kus ta vette astus?

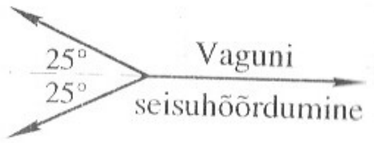
1083. Lennuk hoidis kurssi põhja suunas, kusjuures kiirus õhu suhtes oli 400 km/h. Leia kiirus maa suhtes ja lennuki liikumise suund, kui puhus ida-tuul kiirusega 40 km/h.

1084. Peegli tagaküljele on kinnitatud kahest punktist nöör, mille abil on peegel riputatud seinale. Leia peegli kaal, kui nööri mõlemale poolele, mõjub elastsusjõud 100 N. Nurk, mille moodustab nöör riputuskoha juures, on 130°.

1085. Lennuk lendas läände kiirusega 500 km/h. Sihtpunktist 400 km kaugusel hakkas puhuma kagutuul kiirusega 70 km/h. Piloot, kellel koolis oli matemaatika „2", ei muutnud kurssi ja kiirust, mistõttu möödus oma lennuväljast põhja poolt. Kui kaugelt möödus lennuk oma lennuväljast?

1086. Mingile koormusele mõjusid korraga kolm jõudu $\vec{F}_1$ (luik), $\vec{F}_2$ (haug) ja $\vec{F}_3$ (vähk) nii, nagu näidatud vasakpoolsel joonisel. Leia, mis suunas koormus liigub, kui $|\vec{F}_1| = 50$ N, $|\vec{F}_2| = 30$ N ja $|\vec{F}_3| = 10$ N. $\alpha = 150°$ ja $\beta = 60°$.





1087. Kaks härga veavad vagunit nii, nagu näidatud parempoolsel joonisel. Leia minimaalne jõud, millega peab tõmbama kumbki härg, et vagun nihkuks paigalt. Vaguni seisuhõõrdejõud on 2000 N.

1088. Aerodroomilt stardivad üheaegselt 2 lennukit. Üks neist lendab kiirusega 192 km/h kirdesuunas, teine kiirusega 256 km/h suunas, mis moodustab põhjasuunaga nurga 337°. Kui kaugel on lennukid teineteisest kahe tunni pärast?

1089. Laev liigub ühtlase kiirusega sirgjoonelisel kursil. Kell 12.00 paistab laevalt majakas kursi suhtes 18° nurga all, kell 14.00 aga nurga 35° nurga all. Mis kell on majakas laeva traaversis? (Traaversiks nimetatakse laeva kursiga ristuvat suunda.)

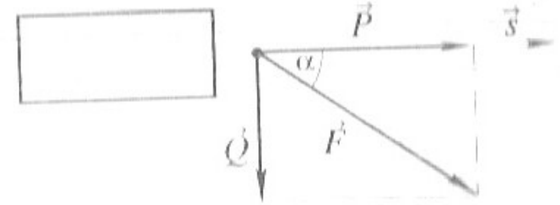
1090. Laev väljus sadamast ja liikus kiirusega 24 km/h, kapten hoidis kurssi suunas 40°, laevale mõjus samaaegselt ka hoovus kiirusega 1 km/h ja suunas 220°. Pärast 24-tunnist sõitu oli laeval mootoririke ja laev jäi hoovuse meelevalda. Üks tund pärast rikkemomenti sõitis laevale appi sadamast teine niisama kiire laev. Millisel kursil pidi see laev liikuma ja kui kiiresti jõudis ta hädasoleva laevani? Lahenda sama ülesanne, kui hoovuse suund on 40°.

1091. Kas polaarkoordinaatidega antud vektoreid saab liita nagu ristkoordinaatidega antud vektoreid? Kui $\vec{u} = (r_1; \varphi_1)$ ja $\vec{v} = (r_2; \varphi_2)$, kas siis $\vec{u} + \vec{v} = (r_1 + r_2; \varphi_1 + \varphi_2)$? Põhjenda.

8.8. VEKTORITE SKALAARKORRUTIS

Vaatleme füüsikakursusest tuntud olukorda, kus kehale mõjub jõud $\vec{F}$ ja keha teab selle jõu mõjul nihke $\vec{s}$. Konkreetsuse huvides olgu kehaks rööbasteel liikuv vagun. Jõud $\vec{F}$ mõjugu vagunile rööbastee suhtes nurga α all (näiteks veame vagunit trossiga järel).

Arvutame töö, mille teeb jõud $\vec{F}$. Lahutame selle jõu kaheks komponendiks. Olgu rööbastee sihiline komponent $\vec{P}$ ja rööbastee sihiga risti olev komponent $\vec{Q}$. Komponent $\vec{Q}$, mis on liikumise sihiga risti, tööd vaguni edasinihutamiseks ei tee, sest vagun ei saa liikuda rööbastee suunale ristiolevas suunas. Vaguni teejuhiks jääb seega komponent $\vec{P}$. Selle vektori pikkus $|\vec{P}| = |\vec{F}| \cdot \cos\alpha$.



Et jõu $\vec{P}$ tööd saab arvutada valemist $A = |\vec{P}| \cdot |\vec{s}|$, siis $A = |\vec{F}| \cdot |\vec{s}| \cdot \cos\alpha$. Avaldis $|\vec{F}| \cdot |\vec{s}| \cdot \cos\alpha$ on kolme skalaari korrutis ja järelikult ise skalaar. Matemaatikas nimetatakse sellist avaldist vektorite $\vec{F}$ ja $\vec{s}$ **skalaarkorrutiseks**. Vektorite skalaarkorrutist tähistatakse $\vec{F} \cdot \vec{s}$. Kirjapaneku $|\vec{F}| \cdot |\vec{s}| \cdot \cos\alpha$ asemel kasutatakse tihti ka kirjutamisviisi $F \cdot s \cdot \cos\alpha$.

Vektorite $\vec{u}$ ja $\vec{v}$ skalaarkorrutiseks nimetatakse nende vektorite pikkuste ja vektorite vahelise nurga koosinuse korrutist.

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos\alpha$$

Pöördume tagasi vaguni näite juurde. Et $|\vec{F}| \cos\alpha$ kujutab endast vektori $\vec{F}$ projektsiooni vektori $\vec{s}$ sihil, siis võib öelda, et kahe vektori skalaarkorrutis on ühe vektori pikkuse korrutis teise vektori projektsiooniga esimese vektori sihil.

Kui $\alpha = 0°$, siis $\cos\alpha = 1$ ja $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}|$.
Kui $\alpha = 180°$, siis $\cos\alpha = -1$ ja $\vec{u} \cdot \vec{v} = -|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|$.
Kui $\alpha = 90°$, siis $\cos\alpha = 0$ ja $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$[1].

Samasuunaliste vektorite skalaarkorrutis võrdub vektorite pikkuste korrutisega. Vastassuunaliste vektorite skalaarkorrutis võrdub vektorite pikkuste korrutise vastandarvuga. Ristuvate vektorite skalaarkorrutis on null.

[1] Saab näidata ka vastupidist, s.o. kui $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$, siis $\vec{u} \perp \vec{v}$.

Vektori $\vec{u}$ skalaarkorrutist iseendaga nimetatakse selle vektori **skalaarruuduks** ja tähistatakse $(\vec{u})^2$ või $\vec{u}^2$.

$\vec{u}\cdot\vec{u} = |\vec{u}|\cdot|\vec{u}|\cdot\cos 0° = |\vec{u}||\vec{u}| = |\vec{u}|^2$.

Vektori skalaarruut on võrdne vektori pikkuse ruuduga.

Näide 1. Leida vektorite $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ skalaarkorrutis, kui $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 8$ ja nurk nende vektorite vahel on 60°.

$\vec{a}\cdot\vec{b} = a\cdot b\cdot\cos\alpha = 3\cdot 8\cdot\cos 60° = 12$.

Näide 2. Leida vektorite $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ skalaarkorrutis, kui nende vektorite pikkused on vastavalt 5 ja 12 ja nende vektorite vaheline nurk on 150°.

$\vec{a}\cdot\vec{b} = a\cdot b\cdot\cos\alpha = 5\cdot 12\cdot\cos 150° = 5\cdot 12\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -30\sqrt{3}$.

Näide 3. Kahe vektori skalaarkorrutis on 2,5 ja nende vektorite pikkused on 10 ja 0,5. Leida vektorite vaheline nurk.

$\cos\alpha = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\,|\vec{v}|} = \frac{2,5}{10\cdot 0,5} = 0,5$

$\alpha = 60°$.

1092. Leia skalaarkorrutis $\vec{a}\cdot\vec{b} = a\cdot b\cdot\cos\varphi$, kui

1) $a = 3$, $b = 5$; $\varphi = 30°$
2) $a = 4,5$, $b = 2,7$, $\varphi = 60°$
3) $a = 8$, $b = 6$, $\varphi = \frac{\pi}{3}$
4) $a = 5$, $b = 4$, $\varphi = \frac{2\pi}{3}$
5) $a = 2$, $b = 7$, $\varphi = \frac{\pi}{6}$
6) $a = \frac{3}{8}$, $b = \frac{3}{4}$, $\varphi = 135°$
7) $a = 32,1$, $b = 0,05$, $\varphi = 90°$
8) $a = 365$, $b = 471$, $\varphi = \pi$
9) $a = 235$, $b = 172$, $\varphi = 150°$
10) $a = 6$, $b = 3$, $\varphi = 1$ rad
11) $\vec{a} = (0; 6)$, $\vec{b} = (-5; 0)$
12) $\vec{a} = (-2; 0)$, $\vec{b} = (0; 4)$
13) $\vec{a} = (4; 0)$, $\vec{b} = (3; 3)$
14) $\vec{a} = (0; 5)$, $\vec{b} = (2; 2)$
15) $a = 7$, $\vec{b} = 2\vec{a}$
16) $a = 4$, $b = 12$, $|\vec{a} - \vec{b}| = 10$.

1093. Leia vektorite vaheline nurk.

1) $\vec{a}\cdot\vec{b} = -16$ $a = 4$ $b = 8$
2) $\vec{a}\cdot\vec{b} = 2,4$ $a = 1,2$ $b = 4$
3) $\vec{a}\cdot\vec{b} = -\sqrt{2}$ $a = 2$ $b = 1$
4) $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$ $a = 5$ $b = 7$
5) $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$ $a = 2,5$ $b = 7,0$
6) $\vec{a}\cdot\vec{b} = -\sqrt{3}$ $a = 4$ $b = 0,5$

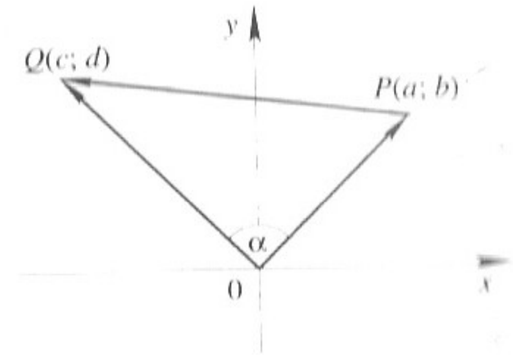
1094. Tõesta, et kui vektorite $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ vaheline nurk on teravnurk, siis nende vektorite skalaarkorrutis on positiivne, kui see nurk on aga nürinurk, siis on see skalaarkorrutis negatiivne.

8.10. VEKTORITE SKALAARKORRUTISE ARVUTAMINE VEKTORITE KOORDINAATIDE ABIL. NURK KAHE VEKTORI VAHEL

Teoreem. Kui $\vec{u} = (a; b)$ ja $\vec{v} = (c; d)$, siis $\vec{u}\cdot\vec{v} = ac + bd$.
Kahe vektori skalaarkorrutis on võrdne nende vektorite vastavate koordinaatide korrutiste summaga.

Teine joonise, pannes need vektorid $\vec{u}$ ja $\vec{v}$ lähtuma koordinaatide alguspunktist. Tekib kolmnurk OPQ, mille tipu O juures olev nurk on olgu α. Koosinusteoreemist saame:

$|\vec{PQ}|^2 = |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 - 2|\vec{u}||\vec{v}|\cos\alpha$.



Siin

$|\vec{u}||\vec{v}|\cos\alpha = \frac{|\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 - |\vec{PQ}|^2}{2}$.

Võrduse paremal poolel kasutame kahe punkti vahelise kauguse valemit ja vektori pikkuse valemit, saame asendada

$|\vec{u}| = \sqrt{a^2 + b^2}$,

$|\vec{v}| = \sqrt{c^2 + d^2}$,

$|\vec{PQ}| = \sqrt{(c-a)^2 + (d-b)^2}$.

Seega

$|\vec{u}||\vec{v}|\cos\alpha = \frac{a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - (c-a)^2 - (d-b)^2}{2}$

ehk lihtsustades

$|\vec{u}||\vec{v}|\cos\alpha = ac + bd$.

Et viimase võrduse vasak pool kujutab endast vektorite $\vec{u}$ ja $\vec{v}$ skalaarkorrutist, siis $\vec{u}\cdot\vec{v} = ac + bd$. ■

Näide 1. Olgu $\vec{m} = (5; -2)$ ja $\vec{n} = (3; -1)$. Leiame $\vec{m}\cdot\vec{n}$.

$\vec{m}\cdot\vec{n} = 5\cdot 3 + 2\cdot(-1) = 13$.

Võrdusest $\vec{u}\cdot\vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}|\cos\alpha$ saab avaldada $\cos\alpha$:

$$\cos\alpha = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|}.$$

Sõnastame tulemuse: **Kahe vektori vahelise nurga koosinus võrdub nende vektorite skalaarkorrutise ja pikkuste korrutise suhtega.**

Näide 2. Leiame vektorite $\vec{a} = (1; -2)$ ja $\vec{b} = (1; 3)$ vahelise nurga:

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|} = \frac{1\cdot 1+(-2)\cdot 3}{\sqrt{1^2+(-2)^2}\sqrt{1^2+3^2}} = \frac{-5}{\sqrt{5}\sqrt{10}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$\varphi = 180° - 45° = 135°$.

Näide 3. Leiame arvu a, mille korral vektor $\vec{s}$ on risti vektoriga $\vec{t}$, kui $\vec{s} = (2; 3)$ ja $\vec{t} = (a; -4)$.

$\vec{s}\cdot\vec{t} = 2\cdot a + 3\cdot(-4)$. Et $\vec{s}\perp\vec{t}$, siis $\vec{s}\cdot\vec{t} = 0$,
seega $2a - 12 = 0$, millest järeldub, et $a = 6$.

Järgmine näide on neile, kes on tuttavad polaarkoordinaatidega ja vektori esitusega polaarkoordinaatides.

Näide 4. Leiame vektorite $\vec{k} = (4; 30°)$ ja $\vec{l} = (5; 150°)$ skalaarkorrutise.
Nurk nende vektorite vahel on $150° - 30° = 120°$.

$\vec{k}\cdot\vec{l} = 4\cdot 5\cdot\cos 120° = -10$.

Skalaarkorrutist kasutatakse vahel ka majandusmatemaatiliste ülesannete lahendamisel. Seal ei vaadelda vektorit ainult sirglõiguna, millel on kindel siht, suund ja pikkus, vaid järjestatud arvude kogumina.

N-mõõtmeliseks aritmeetiliseks vektoriks nimetatakse n järjestatud arvu kogumit $(x_1; x_2; \ldots; x_n)$.

Selliste arvukogumite jaoks defineeritakse liitmine ja arvuga korrutamine:

$(x_1; x_2; \ldots; x_n) + (y_1; y_2; \ldots; y_n) = (x_1 + y_1; x_2 + y_2; \ldots; x_n + y_n)$
$k(x_1; x_2; \ldots; x_n) = (kx_1; kx_2; \ldots; kx_n)$.

Skalaarkorrutist võib n-mõõtmelise aritmeetilise vektori korral defineerida järgmiselt:

$$(x_1; x_2; \ldots; x_n)\cdot(y_1; y_2; \ldots; y_n) = x_1\cdot y_1 + x_2\cdot y_2 + \ldots + x_n\cdot y_n.$$

Kujutame ette asutust, kus on kümme töötegijat, kellele makstakse ühe tunni töö eest järgmiselt (andmed on kirjas kroonides vektorina):

$\vec{p} = (1{,}0;\ 2{,}5;\ 1{,}5;\ 4{,}0;\ 1{,}8;\ 2{,}4;\ 4{,}5;\ 5{,}0;\ 1{,}8;\ 3{,}0)$.

Ühes nädalas olid nendesamade inimeste töötunnid (samas järjestuses!) kirjas vektorina

$\vec{t} = (40;\ 36;\ 40;\ 35;\ 32;\ 42;\ 48;\ 0;\ 20;\ 50)$.

Asutuse töötegijaile makstavate nädalapalkade summa arvutamiseks leiame nende vektorite skalaarkorrutise:

$$\vec{p}\cdot\vec{t} = 1{,}0\cdot 40 + 2{,}5\cdot 36 + 1{,}5\cdot 40 + \ldots + 3{,}0\cdot 50 = 890{,}4.$$

Too veel näiteid selle kohta, kus saaks aritmeetiliste vektorite skalaarkorrutist kasutada.

1095. Leia vektorite skalaarkorrutis.

a) $\vec{a} = (2; 1)$, $\vec{b} = (1; 3)$ b) $\vec{a} = (-3; 1)$, $\vec{b} = (2; 1)$
c) $\vec{a} = (-2; 1)$, $\vec{b} = (3; 2)$ d) $\vec{a} = (-1; 2)$, $\vec{b} = (-3; -3)$
e) $\vec{a} = (0; 2)$, $\vec{b} = (-3; 4)$ f) $\vec{a} = (0; 4)$, $\vec{b} = (0; 4)$

1096. Leia vektorite vaheline nurk.

1) $\vec{a} = (2; 1)$, $\vec{b} = (1; 3)$ 2) $\vec{a} = (-3; 1)$, $\vec{b} = (2; 1)$
3) $\vec{a} = (-2; 1)$, $\vec{b} = (3; 2)$ 4) $\vec{a} = (3; 3)$, $\vec{b} = (-4; 4)$
5) $\vec{a} = (4; 3)$, $\vec{b} = (0; 5)$ 6) $\vec{a} = (2; 3)$, $\vec{b} = (4; 1)$
7) $\vec{a} = (-5; 5\sqrt{3})$, $\vec{b} = (2; 2)$ 8) $\vec{a} = (-3; 4)$, $\vec{b} = (5; 12)$

1097. Leia m väärtus nii, et vektorid oleksid risti.

1) $\vec{a} = (5; 3)$, $\vec{b} = (m; 5)$ 2) $\vec{a} = (-6; 4)$, $\vec{b} = (m; 1)$
3) $\vec{a} = (m; 3)$, $\vec{b} = (2m; -6)$ 4) $\vec{a} = (1; 2m)$, $\vec{b} = (m; 15)$
5) $\vec{a} = (-m; 8)$, $\vec{b} = (m; -1)$ 6) $\vec{a} = (5; m)$, $\vec{b} = (m; 2m)$

1098. Näita, et vektorid $\vec{AB}$ ja $\vec{CD}$ on risti, kui $A(6; 3)$, $B(-3; 0)$, $C(1; 3)$ ja $D(2; 6)$.

1099. Leia vektorite skalaarkorrutis ja vektorite vaheline nurk.

a) $(4; 60°)$ ja $(2; 150°)$ b) $(3; 60°)$ ja $(8; 105°)$
c) $(8; 40°)$ ja $(2; 105°)$ d) $(4; 60°)$ ja $(5; 150°)$
e) $(7; 30°)$ ja $(2; 30°)$ f) $(5; -20°)$ ja $(2; 40°)$

1100. Tõesta, et $\vec{i}\cdot\vec{i} = \vec{j}\cdot\vec{j} = 0$, kui $\vec{i} = (1; 0)$ ja $\vec{j} = (0; 1)$.

1101. Kas kehtib valem $\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}$? Põhjenda.

1102. Kas kehtib valem $\vec{a}\cdot(\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{a}\cdot\vec{c}$? Põhjenda.

1103. Kas kehtib valem $\vec{a}\cdot(r\vec{b}) = (r\vec{a})\cdot\vec{b} = r(\vec{a}\cdot\vec{b})$, kui $r\in\mathbb{R}$? Põhjenda.

1104. Kas on võimalik kolme vektori skalaarkorrutis? Põhjenda oma otsust.

1105. Kui palju tööd teeb 50 kg massiga noormees, kes ronib 40 m mäekülge mööda üles, kui mäenõlv on 60° nurga all horisondiga?

1106. Kui palju tööd tehakse, kui tõstetakse 1,0 t massiga telliskivikoorem ehitatava maja vahelaele, mis on maapinnast 8 m kõrgusel,

1) tõstukiga vertikaalselt üles,
2) vedades mööda kaldpinda, mille kaldenurk on 30°?

1107. Sputnik massiga 1,0 t liigub ringikujulisel orbiidil ümber Maa. Sputnikule mõjub ainult kesktõmbejõud. Kui palju tööd teeb see jõud ühe täistiiru jooksul; poole täistiiru jooksul?

1108. Kirjuta arvutiprogramm, mis võimaldaks pärast vektorite koordinaatide sisestamist arvutada kahe vektori skalaarkorrutist.

1109. Mida teeb järgmine programm?

```
10 PRINT "SISESTA X1";:INPUT X1
20 PRINT "SISESTA Y1";:INPUT Y1
30 PRINT "SISESTA X2";:INPUT X2
40 PRINT "SISESTA Y2";:INPUT Y2
50 S=X1*X2+Y1*Y2
60 A=SQR(X1*X1+Y1*Y1):B=SQR(X2*X2+Y2*Y2)
70 C=S/(A*B)
80 R=3.1416/2-ATN(C/SQR(1-C*C))
90 F=(180*R)/3.1416
100 PRINT "NURK ON ";F;" KRAADI"
110 END
```

Mida tähistatakse selles programmis suurustega S, A, B, C, R ja F?

KORDAMISÜLESANDED JA -KÜSIMUSED

1110. Mis on punkti projektsioonid koordinaattelgedel?

1111. Kuidas leitakse kahe punkti $M(m_1; m_2)$ ja $N(n_1; n_2)$ vaheline kaugus?

1112. Millised suurused on vektoriaalsed suurused?

1113. Millised suurused on skalaarsed suurused? Too näiteid.

1114. Kuidas on defineeritud vektor?

1115. Millal on kaks vektorit võrdsed?

1116. Kuidas saadakse vektori koordinaadid?

1117. Kuidas leitakse vektori pikkus?

1118. Sõnasta vektorite liitmise kolmnurgareegel, rööpkülikureegel ja hulknurgareegel.

1119. Millised vektorid on kollineaarsed vektorid? Kuidas on seotud omavahel kahe kollineaarse vektori koordinaadid?

1120. Kuidas leitakse kahe vektori vahe?

1121. Kuidas leitakse vektori $\vec{a}$ ja arvu c korrutis? Mida võib öelda tulemuse kohta, kui a) $c > 1$; b) $0 < c < 1$; c) $-1 < c < 0$; d) $c < -1$; e) $c = 0$?

1122. Kuidas leitakse lõigu keskpunkti koordinaadid, kui otspunktide koordinaadid on teada?

1123. Mis on vektorite $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ skalaarkorrutis?

1124. Millega võrdub skalaarkorrutis, kui vektorid on:
a) samasuunalised;
b) vastassuunalised;
c) ristuvad?

1125. Kuidas leitakse vektorite skalaarkorrutis, kui on teada vektorite koordinaadid?

1126. Kuidas saab arvutada kahe vektori vahelist nurka?

1127. Kolmnurga tipud on $A(-1; -3)$, $B(3; 5)$, $C(3; -5)$.
a) Kanna punktid A, B ja C teljestikku.
b) Leia lõikude AB, BC ja AC pikkused.
c) Näita Pythagorase teoreemi abil, et ΔABC on täisnurkne.
d) Leia vektorite $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ ja $\overrightarrow{AC}$ koordinaadid ja pikkused.
e) Millega võrdub: 1) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = (\ldots; \ldots)$
2) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CB} = (\ldots; \ldots)$ 3) $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = (\ldots; \ldots)$
4) $\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{AB} = (\ldots; \ldots)$ 5) $\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA} = (\ldots; \ldots)$
6) $\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB} = (\ldots; \ldots)$ 7) $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{CB} = (\ldots; \ldots)$?
Kontrolliks: Vastuste summa on nullvektor.
f) Leia järgmiste vektorite koordinaadid: $\overrightarrow{AU} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$;

$\overrightarrow{BV} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC})$ ja $\overrightarrow{CW} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB})$.

g) Leia saadud punktide U, V ja W koordinaadid. Mida märkad?
h) Leia vektorite skalaarkorrutis. 1) $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA}$ 2) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ 3) $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$.
i) Leia ΔABC nurgad.

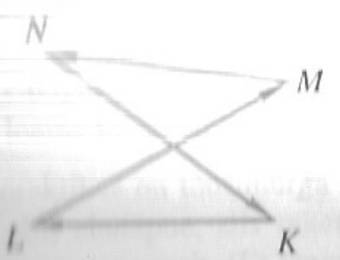
1128. Leia vektori $(2; -3)$ lõpp-punkt, kui alguspunkt on
a) $(5; 2)$ b) $(2; -3)$ c) $(0; 0)$ d) $(-3; 2)$.

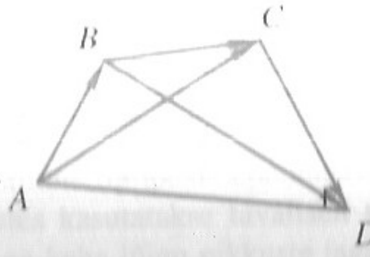
1129. Leia vektori $(-3; 4)$ alguspunkt, kui lõpp-punkt on
a) $(-3; 4)$ b) $(0; 0)$ c) $(2; -1)$ d) $(-6; 8)$.

1130. Lihtsusta.
a) $3(2; 5) + 2(3; -1)$ b) $2(-4; 3) + 3(4; -5)$
c) $4(1; -2) - (3; -2)$ d) $3(-2; 5) - 2(4; 3)$.

1131. Leia vektori pikkus
a) $(4; 3)$ b) $(5; 12)$ c) $(-8; 15)$ d) $(11; -7)$.

1132. Millega võrdub $\overrightarrow{KL} + \overrightarrow{LM} + \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NK}$ (vt. vasakpoolset joonist)? Kas selle tulemuse teadasaamiseks on vaja joonist?





1133. Tõesta parempoolse joonise abil, et $\overrightarrow{AB} + (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}) = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) + \overrightarrow{CD}$. Kas selline võrdus kehtib ainult vektorite liitmise korral?

1134. Vektoritele $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ ja $\vec{b} = \overrightarrow{AD}$ on ehitatud rööpkülik $ABCD$. Avalda vektorite $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ kaudu vektorid $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{MD}$ ja $\overrightarrow{MC}$, kus M on rööpküliku diagonaalide lõikepunkt.

1135. Avalda rööpküliku $ABCD$ diagonaalide $\overrightarrow{AC} = \vec{a}$ ja $\overrightarrow{BD} = \vec{b}$ kaudu vektorid $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$ ja $\overrightarrow{DA}$.

1136. Kujund $ABCDEF$ on korrapärane kuusnurk, milles $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ ja $\overrightarrow{AF} = \vec{v}$. Avalda järgmised vektorid vektorite $\vec{u}$ ja $\vec{v}$ kaudu.

1) $\overrightarrow{BF}$ 2) $\overrightarrow{FC}$ 3) $\overrightarrow{CB}$
4) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{FE}$ 5) $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{DC}$ 6) $\overrightarrow{ED} - \overrightarrow{EF}$
7) $\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{DC}$ 8) $\overrightarrow{FA} - \overrightarrow{BC}$ 9) $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AF} - \overrightarrow{EF}$

1137. Nelinurk $ABCD$ on trapets. Olgu trapetsil märgitud vektorid $\overrightarrow{AD} = \vec{d}$ ja $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$ (alustel). Diagonaalidel on vektorid $\overrightarrow{CA} = \vec{c}$ ja $\overrightarrow{DB} = \vec{d}$. Esita vektor $\vec{d}$ vektorite $\vec{a}$, $\vec{b}$ ja $\vec{c}$ kaudu.

1138. Antud on lõigu otspunktide koordinaadid, leia lõigu keskpunkt.

a) $(6; -3)$ ja $(2; 2)$ b) $(2; -5)$ ja $(-6; 5)$ c) $(k; l)$ ja $(-k; l)$

1139. On antud lõigu üks otspunkt $A(5; -4)$ ja lõigu keskpunkt $C(1, -1)$. Leia lõigu teise otspunkti B koordinaadid.

1140. Esita antud vektor kahe komponendi summana. Komponentide sihid on määratud punktiirjoontega.

1141. Leia vektorite $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ skalaarkorrutis, kui

a) $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = 5$, vektorite vaheline nurk on $\varphi = \frac{\pi}{3}$;

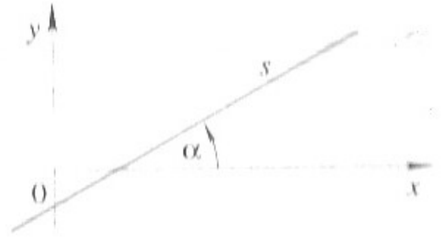
b) $\vec{a} = (3; -1)$, $\vec{b} = (-3; 8)$.

8.11. SIRGJOONE TÕUSUNURK JA SIRGE TÕUS

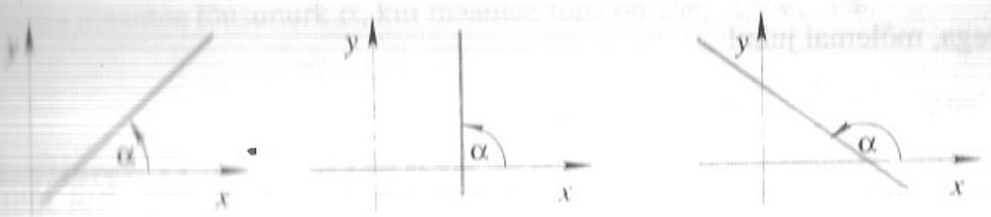
Kui tee ehitaja rajab uut maanteed või raudteeliini, siis on tal vaja teada, *kui järsult tõuseb* maantee või raudtee; *kui suur on kalle* mäenõlval, mida tee ületab.

Kui projekteerida kanalisatsiooni või lahendada muid vee juurde- ja äravoolu-ga seotud küsimusi, siis peab teadma, *kui järsult langeb* jõesäng, kanalisatsioo-nitoru, jõujaama veetunnel. Valades pesuköögi põrandat või pannes üles sari-kaid, peab teadma, *kui palju on kaldu* pesuköögi põrand ja maja katus. Tõus, tõus ja kalle on kolm erinevat nimetust, aga mõiste, mis nende nimetuste taga peitub, on üks. Matemaatikud kasutavad termineid „tõus" ja „tõusunurk".

Võtame koordinaatteljestikus sirgjoone, mis lõikab x-telge. Selle sirge **tõusunurgaks** nimetatakse nurka x-telje positiivse suuna ja sirge vahel (nurka mõõdetakse x-telje positiivsest suunast lugedes vastupäeva).

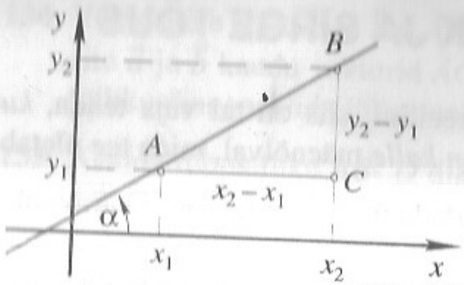


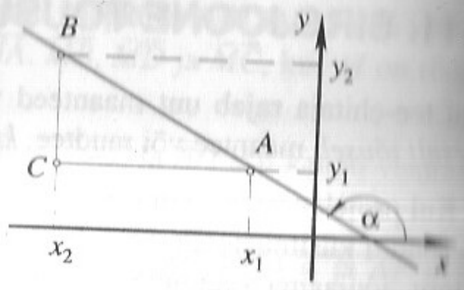
Seega võib öelda, et tõusunurk on alati $0°$ ja $180°$ vahel. Tähistame sirgjoone tõusunurka tähega α. Arvestades sirgjoone võimalikke asendeid x-telje suhtes, näeme, et nurk α on kas teravnurk, täisnurk või nürinurk.



Kui tõusunurk on *teravnurk*, siis öeldakse, et *sirge tõuseb*, kui tõusunurk on *nürinurk*, siis öeldakse, et *sirge langeb*. Kui sirgjoon ei lõika x-telge, siis ta on x-teljega paralleelne ja me loeme tõusunurgaks $0°$.

Et praktikas on tõusunurga mõõtmine tihtipeale ebamugav ja sihi märkimine malli abil ebatäpne, siis rakendustes kasutatakse tavaliselt tõusunurga asemel tõusunurga tangensit. (Et tangens on kahe lõigu pikkuste jagatis, siis saab tema abil mõõta nurka, mõõtes lõikude pikkust.)





Olgu meil teljestikus sirge, mis lõikub nii x- kui ka y-teljega. Sirge tõusunurk olgu α. Olgu sellel sirgel kaks punkti $A(x_1; y_1)$ ja $B(x_2; y_2)$. Konstrueerime täisnurkse kolmnurga ABC nii, et AC oleks paralleelne x-teljega ja BC y-teljega.

Siis $\angle\alpha = \angle BAC$ (tõusva sirge korral)

ja $\angle\alpha = 180° - \angle BAC$ (langeva sirge korral).

Seega, tõusva sirge korral

$$\tan\alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

ja langeva sirge korral

$$\tan\alpha = \tan(180° - \angle BAC) = -\tan\angle BAC = -\frac{y_2 - y_1}{x_1 - x_2} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Seega, mõlemal juhul

$$\tan\alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Sirge tõusuks nimetatakse selle sirge tõusunurga tangensit. Kui tähistada tõusu tähega k, siis

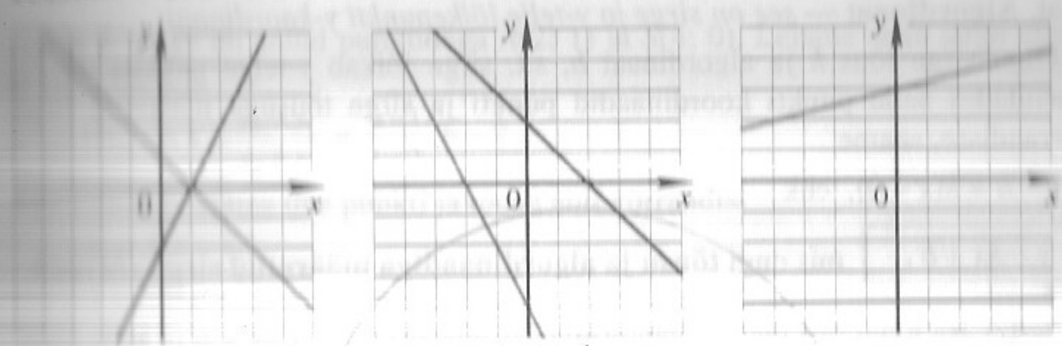
$$k = \tan\alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

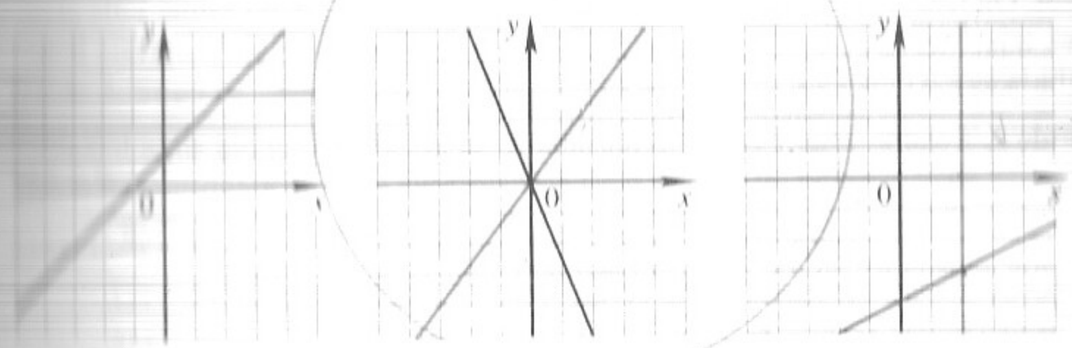
Kui $\alpha < 90°$, siis $\tan\alpha > 0$ } *Tõusva sirge tõus on positiivne*
Kui $90° < \alpha < 180°$, siis $\tan\alpha < 0$ } *Langeva sirge tõus on negatiivne.*

Kui sirge on paralleelne x-teljega, siis $\alpha = 0°$ ja $k = 0$. Kui sirge on paralleelne y-teljega, siis $\alpha = 90°$. Et tan 90° ei oma arvulist väärtust, siis sirge tõus ei ole määratud.

Kui meil on kaks paralleelset sirget, siis on nende tõusunurgad võrdsed ja järelikult on neil sirgetel ka ühesugune tõus.

1141. Leia iga joonisel toodud sirge tõus.





1143. Mägiraudtee tõuseb tee pikkuse iga 60 meetri kohta 2 m võrra. Leia raudtee tõusunurk.

1144. Maantee tõus määratakse sageli protsentides maanteelõigu pikkusest. Arvuta maantee tõusunurk α, kui maantee tõus on 2%; 2,5%; 4%.

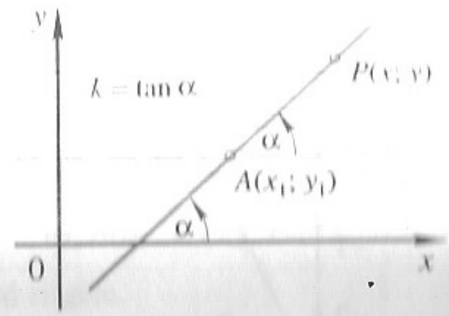
6.12. PUNKTI JA TÕUSUGA MÄÄRATUD SIRGE VÕRRAND. TÕUSU JA ALGORDINAADIGA MÄÄRATUD SIRGE VÕRRAND.

Olgu sirge määratud punktiga $A(x_1; y_1)$ ja tõusuga k. Valime sirgel vabalt punkti $P(x; y)$. Asendades need väärtused sirge tõusu valemisse, saame

$k = \frac{y - y_1}{x - x_1}$, kust

$$y - y_1 = k(x - x_1),$$

mis ongi **punkti ja tõusuga määratud sirge võrrand**.



Proovime nüüd leida sirge võrrandi, kui on teada selle sirge tõus ja algordinaat. **Algordinaat** — *see on sirge ja y-telje lõikepunkti y-koordinaat.*

Olgu sirge tõus k ja algordinaat b, s.t. sirge lõikab y-telge punktis $(0; b)$. Asendades selle punkti koordinaadid punkti ja sirge tõusuga määratud sirge võrrandisse, saame

$y - b = k(x - 0)$, ehk

$$\boxed{y = kx + b},$$ mis ongi **tõusu ja algordinaadiga määratud sirge võrrand.**

Eelmistes klassides olete õppinud lineaarfunktsiooni $y = ax + b$ ja selle graafikut. On teada, et lineaarfunktsiooni graafikuks on sirge. Nüüd saime selle graafiku teisel teel ja oskame määratleda lineaarfunktsiooni avaldises olevate konstantide a ja b tähendust — a on sirge tõus ja b on algordinaat.

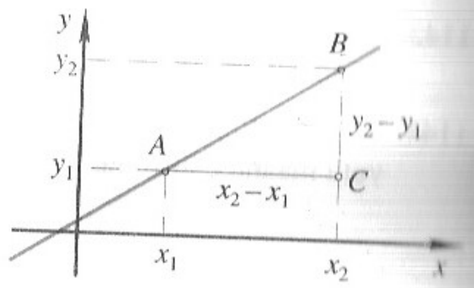
Näide 1. Leiame sirge $y = 2x - 3$ tõusunurga ja punkti, kus antud sirge lõikab y-telge. Et sirge võrrand on kujul $y = kx + b$, siis tõus $k = 2$ ja algordinaat $b = -3$. Seega on lõikepunkt y-teljega $(0; -3)$. Et $\tan\alpha = 2$, siis saame $\alpha = 63°26'$.

Vastus: tõusunurk on $63°26'$ ja lõikepunkt y-teljega on $(0; -3)$.

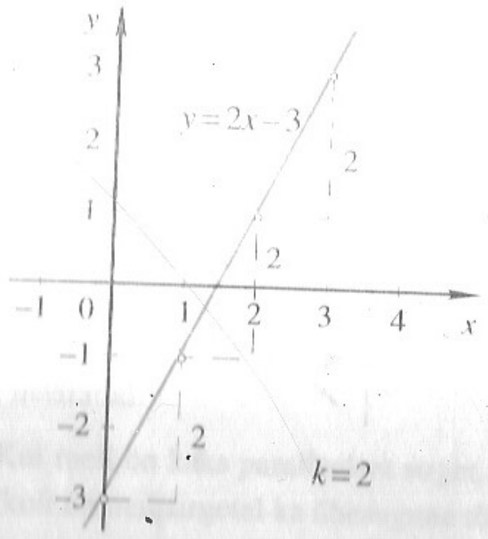
Sirge tõusule saab anda veel ühe tõlgenduse. Vaatame kõrvalolevat joonist.

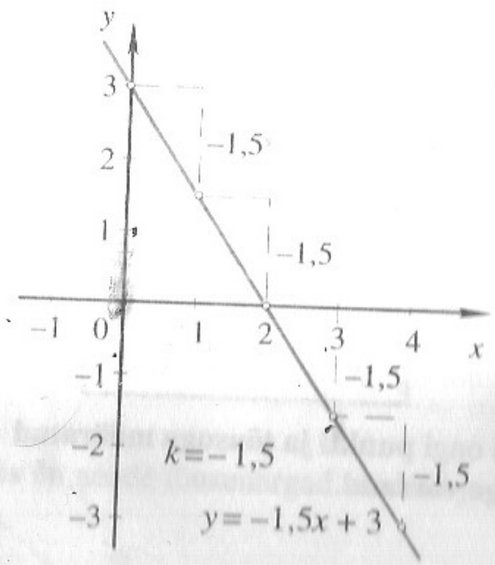
Kui $AC = 1$, siis

$$\tan\alpha = \frac{BC}{AC} = BC.$$



Seega, *sirge tõus näitab, kui palju muutub sirgel liikuva punkti y-koordinaat, kui x-koordinaat kasvab ühe ühiku võrra.* Näiteks joonisel on kujutatud sirgete $y = 2x - 3$ ja $y = -1{,}5x + 3$ graafikud.





Sirge tõusu selle tähenduse teadmine hõlbustab vahel sirge graafiku joonestamist.

Näide 2. Sirge on antud punktidega $R(2; 1)$ ja $S(4; 0)$. Leiame selle sirge tõusu ja algordinaadi.

Sirge tõus on $k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{0 - 1}{4 - 2} = -\frac{1}{2}$.

Algordinaadi leiame ühe punkti ja tõusu abil võrrandist

$y - y_1 = k(x - x_1)$,

$y - 1 = -\frac{1}{2}(x - 2)$, kust $y = -\frac{1}{2}x + 2$.

Seega algordinaat on 2.

Näide 3. Sirge on antud punktiga $A(1; -4)$ ja tõusunurgaga $135°$. Leiame selle sirge võrrandi.

Et $k = \tan 135° = -1$, siis sirge võrrand on $y + 4 = -1(x - 1)$ ehk $y = -x - 3$.

1145. Leia kahe punktiga määratud sirge tõus, kui need punktid on

1) $(1; 2)$ ja $(3; 4)$
2) $(1; 2)$ ja $(-2; -5)$
3) $(1; 2)$ ja $(-2; 5)$
4) $(0; 0)$ ja $(5; 1)$
5) $(7; 2)$ ja $(2; 7)$
6) $(3; 3)$ ja $(3; 7)$
7) $(6; -6)$ ja $(-6; -6)$
8) $(6; -6)$ ja $(4; 3)$
9) $(0; 2a)$ ja $(2b; 0)$
10) $(p; q)$ ja $(-m; n)$
11) $(r; s)$ ja $(t; v)$
12) $(-e; f)$ ja $(-d; f)$.

Missugused neist sirgetest on tõusvad, missugused langevad sirged?

1146. Leia punkti ja tõusuga määratud sirge võrrand. Tee joonis.

1) $(-3; 2)$, $k = 1$
2) $(-2; 0)$, $k = -2$
3) $(0; 0)$, $k = 3$
4) $(4; 1)$, $k = -\frac{1}{3}$
5) $(1; -1)$, $k = \frac{2}{3}$
6) $(-2; 4)$, $k = -\frac{5}{3}$
7) $(3; 2)$, $k = 1{,}25$
8) $(-3; 5)$, $k = -2{,}5$
9) $(0; 0)$, $k = 0$
10) $(-1; -2)$, $k = 0$
11) $(3; -2)$, k puudub
12) $(0; 0)$, k puudub

1147. Kirjuta välja tõusu ja algordinaadiga määratud sirge võrrand.

1) $k = 2$, $b = -3$
2) $k = 4$, $b = -2$
3) $k = -2$, $b = -4$
4) $k = 0$, $b = 3$
5) $k = -1$, $b = 0$
6) $k = -\frac{4}{5}$, $b = 2{,}8$
7) $k = 2$, $b = 300$
8) $k = 0$, $b = -2$
9) $k = 0$, $b = 0$

1148. Leia parameetri t väärtus, et punkt C oleks punktidega A ja B ühel sirgel.

a) $A(5; 3)$, $B(3; 2)$, $C(-3; t + 1)$
b) $A(-2; 4)$, $B(0; 2)$, $C(3; t - 1)$

1149. Leia veel kolm punkti, mis kuuluvad antud sirgele.

a) $k = \frac{2}{3}$, $(0; 0)$
b) $k = -\frac{5}{2}$, $(-3; 7)$
c) $k = 2$, $(1; 1)$
d) $k = -3$, $(-2; -1)$

1150. Punktid A ja B on ühel sirgel, mille tõus on k. Leia punkti B puuduv koordinaat.

a) $k = \frac{2}{3}$, $A(2; 3)$, $B(10; ?)$ b) $k = -\frac{5}{2}$, $A(7; -4)$, $B(?; 6)$

c) $k = t$, $A(p; q)$, $B(r; ?)$

1151. Sirgjoon läbib punkte $(-2; -1)$ ja $(4; 3)$. Leia punktid, kus see sirge lõikab x-telge ja y-telge.

1152. Sirgel, mis läbib punkte $K(3; 1)$ ja $L(5; t)$, on tõusunurk 60°. Kui suur on t?

1153. Leia sirge võrrand, kui see sirge läbib punkti $(-5; 6)$ ja

a) selle sirge tõus on 4;

b) sirge on paralleelne x-teljega;

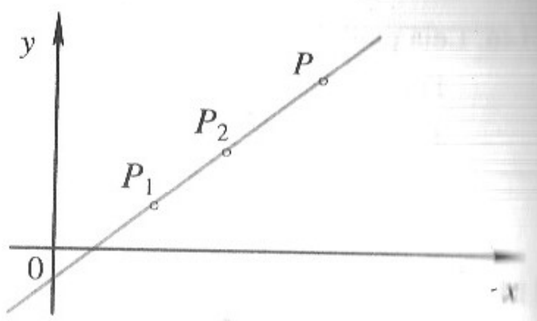
c) sirge on paralleelne y-teljega.

1154. Leia sirge võrrand, kui sirge läbib punkti $(a; 0)$ ja sirge tõus on k.

1155. Telegrammi saatmisel maksti vanasti 10 kopikat põhimaksu ja 3 kopikat iga sõna eest. Esita valemina x-sõnast koosneva telegrammi maksumus. Missugune seos kehtib praegu?

6.13. KAHE PUNKTIGA MÄÄRATUD SIRGE VÕRRAND

Olgu sirgjoon s määratud oma kahe punktiga $P_1(x_1; y_1)$ ja $P_2(x_2; y_2)$. Koostame sirge võrrandi. Selleks võtame sirgel suvalise punkti $P(x; y)$. Leiame lõikude P_1P ja P_1P_2 tõusud.



Lõigu P_1P tõus on $\frac{y - y_1}{x - x_1}$.

Lõigu P_1P_2 tõus on $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

Et mõlemad lõigud asetsevad ühel ja samal sirgel, siis peavad mõlemad tõusud olema võrdsed. Seega $\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

Vahetades võrde siseliikmed, saame:

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}.$$

Saadud võrrand on **kahe punktiga määratud sirge võrrand**.

Näide 1. Sirge on määratud punktidega $A(1; 3)$ ja $B(5; -2)$. Leiame selle sirge võrrandi.

$\frac{x - 1}{5 - 1} = \frac{y - 3}{-2 - 3} \Rightarrow \frac{y - 3}{-5} = \frac{x - 1}{4} \Rightarrow 4(y - 3) = -5(x - 1)$.

Viies kõik liikmed ühele poole, saame $5x + 4y - 17 = 0$.

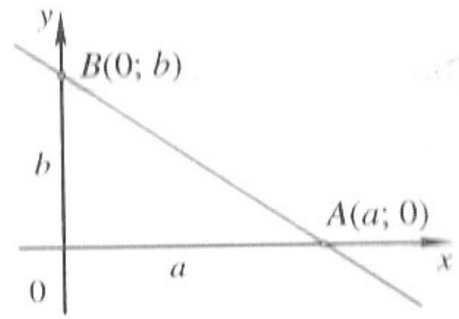
Kirjutades punktide järjekorda, saaksime

$\frac{x - 5}{1 - 5} = \frac{y + 2}{3 + 2} \Rightarrow \frac{y + 2}{5} = \frac{x - 5}{-4} \Rightarrow -4(y + 2) = 5(x - 5) \Rightarrow 5x + 4y - 17 = 0$.

Olgu sirge määratud punktidega, milles see sirge lõikab koordinaattelgi $A(a; 0)$ ja $B(0; b)$. Sel juhul saame sirge võrrandiks $\frac{y - 0}{b - 0} = \frac{x - a}{0 - a}$.

Lihtsustades saame

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$



Arve a ja b nimetatakse selle sirge **telglõikudeks** ja saadud võrrandit **sirge võrrandiks telglõikudes**.

Telglõikude abil on mugav konstrueerida sirgjoont.

Näide 2. Joonestame sirgjoone, mille võrrand on $5x - 7y - 35 = 0$.

Teisendame seda võrrandit

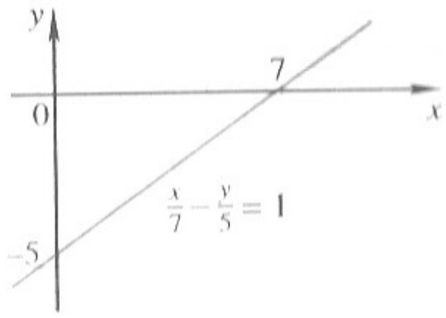
$5x - 7y = 35$

$\frac{5x}{35} - \frac{7y}{35} = 1$

$\frac{x}{7} + \frac{y}{(-5)} = 1$.

Seega on telglõigud 7 ja (-5).

Teeme joonise:



1156. Leia punktidega K ja L määratud sirge võrrand.

1) $K(2; 3)$ $L(4; 6)$ 2) $K(5; 1)$ $L(2; -3)$ 3) $K(0; 5)$ $L(3; 0)$

4) $K(6; 4)$ $L(-5; 4)$ 5) $K(-3; -2)$ $L(-6; 7)$ 6) $K(-3; 1)$ $L(2; -5)$

7) $K(0; 0)$ $L(a; b)$ 8) $K(-2; 1)$ $L(-2; 4)$ 9) $K(a; 0)$ $L(0; a)$

10) $K(\sqrt{3}; 1)$ $L(2\sqrt{3}; -4)$ 11) $K(2; 3)$ $L(2; 3)$

1157. Sirge läbib punkte $F(-4; 2)$ ja $G(-2; 10)$. Leia selle sirge võrrand. Leia veel kolm punkti, mis oleksid sellel sirgel.

1158. Kirjuta sirge võrrand telglõikudes ja joonesta see sirge, kui

1) $A(-2; 0)$ ja $B(0; 3)$
2) $A(0; -5)$ $B(-4; 0)$
3) sirge võrrand on $-5x + 3y = 15$
4) sirge võrrand on $3x - 7y + 21 = 0$
5) sirge võrrand on $y = 2x - 5$
6) $A(3; -4)$ ja $B(-6; 2)$.

1159. Sirge läbib punkti $(4; -1)$ ja lõikab y-telge samas punktis, kus sirge $2x + 3y = 6$. Leia selle sirge võrrand.

1160. Leia sirge võrrand, kui on teada, et see sirge lõikab x-telge samas punktis, kus sirge s ja y-telge samas punktis, kus sirge t.

a) s: $2x - 5y = 10$; t: $4x - 3y - 12 = 0$
b) s: $x + 3y - 1 = 0$ t: $5x - 3y - 15 = 0$

1161. Kas telglõikude abil saab esitada

a) koordinaatide alguspunkti läbiva sirge võrrandit;
b) x-teljega paralleelse sirge võrrandit;
c) y-teljega paralleelse sirge võrrandit?

1162. Leia sirge võrrand, kui sirge läbib punkte $(a, 3)$ ja $(a; 7)$. Kuidas paikneb selline sirge koordinaatteljestikus?

1163. Leia sirge võrrand, kui sirge läbib punkte $(0; b)$ ja $(100; b)$. Kuidas paikneb selline sirge koordinaatteljestikus?

> y-teljega paralleelse sirge võrrand on $x = a$.

Selline sirge lõikub x-teljega punktis $(a; 0)$.

> x-teljega paralleelse sirge võrrand on $y = b$.

Selline sirge lõikub y-teljega punktis $(0; b)$.

1164. Leia x-telje ja y-telje võrrandid.

1165. Kuidas paikneb sirge koordinaatteljestikus, kui sirge võrrand on

1) $x = 4$ 2) $y = 2$ 3) $x = -5$ 4) $2x = 8$
5) $-2y = 5$ 6) $-3x = -12$ 7) $3x - 9 = 0$ 8) $-3y = 0$?

1166. Leia peast sirgete vaheline kaugus, kui nende võrrandid on

1) $x = 2$ ja $x = 6$ 2) $y = 3$ ja $y = -7$
3) $2x = 4$ ja $4x = 8$ 4) $5y = 2$ ja $2y = 10$
5) $-5x + 20 = 0$ ja $x = -3$ 6) $5x = -15$ ja $-4x = 20$.

1167. Rombi diagonaalid on 4 ja 10 ühikut, paiknevad koordinaattelgedel. Leia rombi külgede võrrandid.

1168. Ruudu üks tipp asetseb koordinaatide alguses ja selle vastastipp punktis $(-4; 4)$. Leia ruudu külgede ja diagonaalide võrrandid.

1169. Leia sirge, mis asetseb kummastki antud sirgest võrdsel kaugusel.

1) $x = -5$ ja $y = 3$ 2) $x = -5$ ja $x = -1$
3) $x = 101$ ja $x = 2$ 4) $y = 2x - 3$ ja $y = 2x + 5$

1170. Leia sirgjoon, mis asetseb joonele $y = 5$ kolm korda lähemal, kui joonele $y = 1$.

1171. Temperatuuril 15°C on metallvarda pikkus 72,6 cm. 95°C juures on selle varda pikkus 72,8 cm. Kui pikk on see varras, kui temperatuur on 75°C?

1172. Suletud anumas olevat gaasi soojendatakse 0°C kuni 100°C-ni. Gaasi rõhk mõõdetakse mõlema temperatuuri juures. Tulemused on kõrvalolevas tabelis. Gaasi rõhk y (kPa) sõltub gaasi temperatuurist lineaarselt. Leia see sõltuvus ja joonista selle graafik. Määra graafikult, milline rõhk vastab temperatuurile – 100°C.

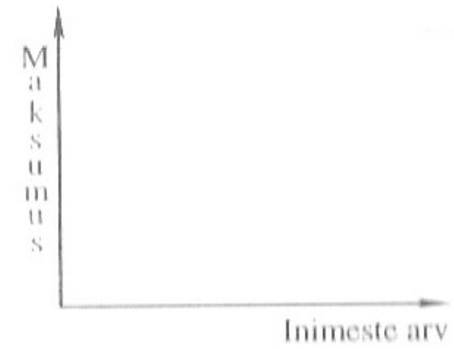
Temp. (°C)	Rõhk (kPa)
0	85
100	116

1173. Arvuteid tootev firma tahtis riigis turustada oma arvuteid. Küsitelu põhjal sai selgeks, et kui ühe arvuti hinnaks määrata 2000$, siis ostetaks 200 arvutit, kui aga hinnaks määrata 3000$, siis ostetaks 100 arvutit. Oletatakse, et ostetavate arvutite arv (y) sõltub lineaarselt arvuti hinnast (x).

1) Leia seos y ja x vahel.
2) Mis peaks olema arvuti hind, et neid ostetaks 160 tk.?
3) Mitu arvutit ostetaks, kui ühe arvuti hind oleks 2750$?

1174. Kell 8.30 möödus rong kümnendast kilomeetripostist ja kell 9.30 kuuekümnendast. Eeldame, et rongi liikumise kiirus on ühtlane. Leia rongi poolt läbitud tee pikkuse sõltuvus kellaajast. Kas kella kümneks jõuab rong üheksakümne viienda kilomeetriposti juurde?

1175. Hotellis „Hilton" on banketisaal 300 inimesele. Kulud banketile koosnevad ruumi üürist ja kulutustest toidule ning jookidele. On teada, et bankett 50 inimesele maksaks 800$, bankett 100 inimesele maksaks 1250$.



a) Kujuta graafiliselt seost banketi külaliste arvu ja banketi maksumuse vahel.
b) Leia see seos valemina.
c) Kui palju maksaks bankett 200 inimesele?
d) Kui palju võib kutsuda külalisi, kui raha on 1700$?
e) Mida näitab graafiku tõus, mida algordinaat?
f) Miks vaatleme graafikut ainult esimeses veerandis?

Programminäide: Koostame arvutiprogrammi, mis trükib sirge võrrandi tõusu ja algordinaadiga, kui on antud kaks punkti sellel sirgel. Selleks, et niisugust programmi kirjutada, peab leidma algebralised avaldised, mis esitavad sirge tõusu ja algordinaadi nende punktide koordinaatide abil.

Olgu punktide koordinaadid $(x_1; y_1)$ ja $(x_2; y_2)$. Kahe punktiga määratud sirge võrrand on $\frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{x-x_1}{x_2-x_1}$. Avaldades siit $y - y_1$, saame:

$$y - y_1 = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1).$$

Avaldades siit y, saame:

$$y = \left(\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\right)x - \left(\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\right)x_1 + y_1 = \left(\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\right)x + \left(\frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2-x_1}\right).$$

Et sirge võrrand tõusu ja algordinaadiga on $y = kx + b$, siis

$$k = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} \quad \text{ja} \quad b = \frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2-x_1}.$$

Neid tuletatud valemeid on kasutatud alljärgnevas programmis:

```
10 PRINT"Programm leiab sirge võrrandi tõusu ja algordinaadiga"
20 PRINT"kui sisestada selle sirge kahe punkti koordinaadid"
30 PRINT
40 PRINT "Sisesta X1 ja Y1";:INPUT X1,Y1
50 PRINT "Sisesta X2 ja Y2";:INPUT X2,Y2
60 K=(Y2-Y1)/(X2-X1)
70 B=(X2*Y1-X1*Y2)/(X2-X1)
80 PRINT
90 PRINT "y=(";K;")x+(";B;")"
100 END
```

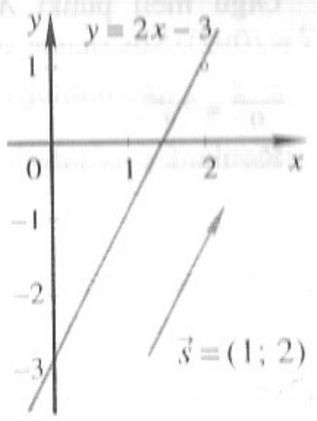
1176. Näita, et kui sirge läbib punkte $(x_1; y_1)$ ja $(x_2; y_2)$, siis selle sirge võrrandi võib kirja panna kujul

$$(y_2 - y_1)x + (x_1 - x_2)y + (x_2y_1 - x_1y_2) = 0.$$

Kirjuta programm, mis trükiks välja sirge võrrandi sellisel kujul.

8.14. PUNKTI JA SIHIVEKTORIGA MÄÄRATUD SIRGE VÕRRAND

Sirge sihivektoriks nimetatakse iga vektorit, mille sihi langeb kokku sirge sihiga.



Näiteks, kui meil on sirge $y = 2x - 3$, siis selle sirge sihivektoriks on vektor $\vec{s} = (1; 2)$, aga ka vektorid $3\vec{s} = (3; 4)$, $-3\vec{s} = (-3; -6)$, $\frac{1}{2}\vec{s} = (\frac{1}{2}; 1)$ ja $99\vec{s} = (99; 198)$.

Sirge sihivektori saab alati asetada nii, et ta alguspunkt ja lõpp-punkt on üiõlemad sellel sirgel, mille sihivektoriga on meil tegu. Ka võib öelda, et kui sirgel on mingid kaks erinevat punkti, siis vektor, mis neid punkte ühendab, on sirgele sihivektoriks.

Olgu meil sirge s, mis on määratud kahe punktiga $P_1(x_1; y_1)$ ja $P_2(x_2; y_2)$. Sirgjoone võrrand on siis $\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1}$. Kui panna kirja vektori $\overrightarrow{P_1P_2}$ koordinaadid $\overrightarrow{P_1P_2} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1)$, siis näeme, et selle vektori koordinaadid on sirgjoone võrrandis olemas. Nimelt on x-koordinaat esimese murru nimetajas ja y-koordinaat teise murru nimetajas. Et vektor $\overrightarrow{P_1P_2}$ paikneb sirge s sihil, siis võib teda lugeda ka selle sirge üheks sihivektoriks. Tähistades vektorit $\overrightarrow{P_1P_2} = \vec{s}$ ja selle vektori koordinaate s_x ja s_y, saame võrduse

$$\boxed{\frac{x-x_1}{s_x} = \frac{y-y_1}{s_y}}$$

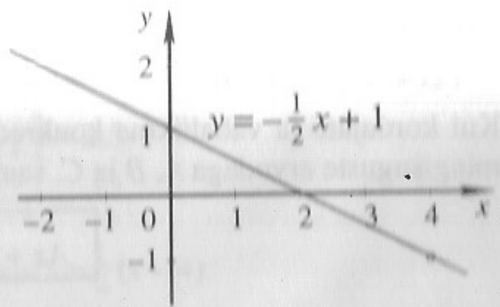
See võrdus ongi **punkti** ja **sihivektoriga määratud sirge võrrand**.

Näide 1. Olgu sirgel antud punkt $A(4; -1)$ ja sihivektor $(-2; 1)$.

Leiame selle sirge võrrandi. Sirge võrrand on $\frac{x-4}{-2} = \frac{y+1}{1}$ ehk

$1(x-4) = -2(y+1)$, kust

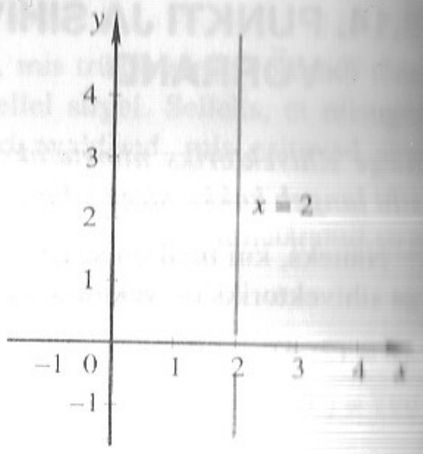
$y = -\frac{1}{2}x + 1$.



Mis saab aga juhul, kui sirge sihivektori üks koordinaat on null? Nulliga jagada ei saa. Vaatame üht konkreetset näidet.

Olgu meil punkt $A(2;\ 3)$ ja sihivektor $\vec{s} = (0;\ 2)$. Siis saame sirge võrrandi

$$\frac{x-2}{0} = \frac{y-3}{2}.$$



Kasutades võrde põhiomadust, saame $2(x-2) = 0(y-3)$, millest $2x-4=0 \Rightarrow x=2$. Saime y-teljega paralleelse sirge võrrandi. Juhul kui sirge sihivektori y-koordinaat oleks null, siis saaksime loomulikult x-teljega paralleelse sirge võrrandi.

1177. Leia punktiga ja sihivektoriga määratud sirge võrrand.

1) $A(3;-4)$ ja $\vec{v} = (-2;\ 3)$
2) $A(2;\ 4)$ ja $\vec{v} = (2;-2)$
3) $A(-3;-2)$ ja $\vec{v} = (-5;-3)$
4) $A(-7;\ 4)$ ja $\vec{v} = (5;\ 6)$
5) $A(3;-4)$ ja $\vec{v} = (0;-3)$
6) $A(-2;\ 1)$ ja $\vec{v} = (2;\ 0)$
7) $A(0;\ 0)$ ja $\vec{v} = (-2;\ 0)$
8) $A(2;\ 4)$ ja $\vec{v} = (0;\ 0)$

1178. Leia punkti ja sihivektoriga määratud sirge võrrand. Vii see võrrand kujule $y = kx + b$.

1) $A(2;\ 3)$ ja $\vec{v} = (3;\ 4)$
2) $A(2;\ 3)$ ja $\vec{v} = (6;\ 8)$
3) $A(-4;\ 1)$ ja $\vec{v} = (2;-3)$
4) $A(-4;\ 1)$ ja $\vec{v} = (-2;\ 3)$
5) $A(5;-2)$ ja $\vec{v} = (1;\ 1)$
6) $A(5;-2)$ ja $\vec{v} = (-2;-2)$
7) $A(5;-2)$ ja $\vec{v} = (-5;-5)$
8) $A(5;-2)$ ja $\vec{v} = (100;\ 100)$

Võrdle lõpptulemusi. Kas neist saab midagi järeldada?

6.15. SIRGE ÜLDVÕRRAND

Kui koostasime sirgjoone võrrandeid tõusu ja algordinaadi järgi, siis saime tihti tulemuseks murruliste kordajatega võrrandi, näiteks $y = -\frac{4}{5}x + \frac{7}{3}$.

Korrutame võrrandi mõlemat poolt arvuga 15, saame

$$15y = -12x + 21.$$

Viime kõik liikmed ühele poole, saame

$$12x + 15y - 21 = 0.$$

Kui kordajate ja vabaliikme konkreetsed väärtused 12, 15 ja (-21) asendame mingisuguste arvudega A, B ja C, saame võrrandi

$$Ax + By + C = 0 \qquad (1)$$

Meie tähistuses antud võrrand on *kahe muutujaga esimese astme võrrand* ehk **kahe muutujaga lineaarvõrrand**.

Kuna sellisele võrrandile vastab graafikuna sirgjoon, siis nimetatakse saadud võrrandit ka **sirge üldvõrrandiks**.

Vaatame nüüd, et sellest sirge üldvõrrandist võib saada kordajate A, B ja C mingi väärtuste korral sirgjoone võrrandi mitmesuguseid erijuhtumeid.

1) Kui $A \neq 0$, $B \neq 0$ ja $C \neq 0$, siis saab selle võrrandi teisendada tõusu ja algordinaadiga antud sirge võrrandiks. Selleks avaldame võrrandist (1) muutuja y:

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}.$$

Tähistades $-\frac{A}{B} = k$ ja $-\frac{C}{B} = b$, saamegi võrrandile kuju $y = kx + b$.

2) Kui $A = 0$, siis on võrrandil (1) kuju $By + C = 0$, millest $y = -\frac{C}{B}$.

Asendades $-\frac{C}{B} = b$, saame $y = b$. Sirge on paralleelne x-teljega.

3) Kui $B = 0$, siis on võrrandil (1) kuju $Ax + C = 0$, millest $x = -\frac{C}{A}$.

Asendades $-\frac{C}{A} = a$, saame $x = a$. Sirge on paralleelne y-teljega.

4) Kui $C = 0$, siis on võrrandil (1) kuju $Ax + By = 0$, millest $y = -\frac{A}{B}x$.

Asendades $-\frac{A}{B} = k$, saame $y = kx$. Sirge läbib koordinaatide alguspunkti.

5) Kui $A = 0$ ja $C = 0$, siis on võrrandil (1) kuju $By = 0$, millest $y = 0$. Saame x-telje võrrandi.

6) Kui $B = 0$ ja $C = 0$, siis on võrrandil (1) kuju $Ax = 0$, millest $x = 0$. Saame y-telje võrrandi.

Sirge, pea meeles: sirge üldvõrrandiks on lineaarvõrrand $\boldsymbol{Ax + By + C = 0}$, kus A, B ja C on konstandid ja kus A ja B ei võrdu samaaegselt nullidega.

Näide 1. Leida sirge $2x + 4y - 7 = 0$ tõus ja algordinaat.

Teisame antud sirge võrrandi kujul $y = kx + b$.

$$2x + 4y - 7 = 0 \rightarrow 4y = -2x + 7 \rightarrow y = -\frac{1}{2}x + \frac{7}{4}.$$

1179. Teisenda järgmised võrrandid üldkujulisteks:

1) $\frac{x}{3} + \frac{y}{-7} = 1$;
2) $\frac{y-6}{x+2} = 2{,}5$;
3) $\frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{2}$;
4) $\frac{x+1}{-4} = \frac{y}{-3}$;
5) $y - 3 = 2(x+1)$;
6) $y + 5 = \frac{1}{2}(x-4)$.

1180. Täida järgmine tabel.

Võrrand	$y = kx + b$	tõus	algordinaat
$3x + y = 7$			
$x + 2y = 4$			
$2x + 3y = 9$			
$4x - y = 5$			
$3x - 2y = -4$			
$2x + 6y - 5 = 0$			
$4x - 3y + 2 = 0$			
$5y - 4x - 1 = 0$			
$3x + 2y = 0$			
$y + 7 = 0$			

1181. Teisenda järgmised üldkujulised võrrandid tõusu ja algordinaadiga määratud võrranditeks ning valmista joonis:

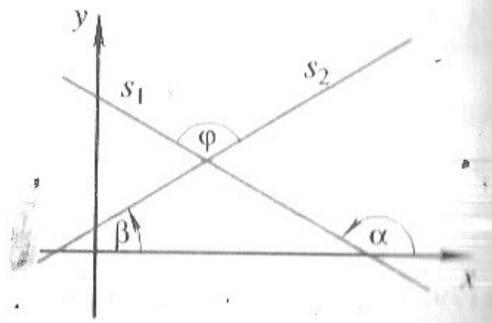
1) $2x - 3y + 1 = 0$;
2) $-3x + 5y + 15 = 0$;
3) $4x + 6y + 9 = 0$;
4) $-x - y + 5 = 0$.

1182. Teisenda eelmises ülesandes antud üldkujulised võrrandid

1) punkti ja sihivektoriga määratud sirge võrranditeks;
2) kahe punktiga määratud sirge võrranditeks;
3) sirge võrranditeks telglõikudes;
4) punkti ja tõusuga määratud sirge võrranditeks.

6.16. NURK KAHE SIRGE VAHEL

On antud kaks sirget s_1 ja s_2. Sirgete tõusunurgad olgu α ja β, sirgete tõusud aga $\tan\alpha = k_1$ ja $\tan\beta = k_2$. Kui need sirged lõikuvad, siis on sirgete vaheline nurk $\varphi = \alpha - \beta$. Kasutades kahe nurga vahe tangensi valemit, saame:



$$\tan\varphi = \tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha \cdot \tan\beta} = \frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 k_2}.$$

Kahe sirge lõikumisel tekib kaks paari võrdseid nurki. Kui ühe nurga suurus on φ, siis tema kõrvunurga suurus on $180° - \varphi$. On kokku lepitud lugeda kahe sirge vaheliseks nurgaks neist kahest nurgast seda, mis on teravnurk.

Kuna $\tan\varphi = -\tan(180° - \varphi)$, siis teravnurga tangensi saame, kui võtame murrust absoluutväärtuse. Saame valemi[1]

$$\tan\varphi = \left|\frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 k_2}\right|$$

Erijuhul, kui $\varphi = 0°$, siis $\tan\varphi = 0$ ja järelikult $k_1 - k_2 = 0$. Sealt $k_1 = k_2$. Seega . . .

Paralleelsete sirgete tõusud on võrdsed. $k_1 = k_2$

Erijuhul, kui sirged on risti, siis $\varphi = 90°$ ja $\tan\varphi$ ei ole määratav. Siis on $\tan\varphi$ valemis nimetaja null. See tähendab, et $1 + k_1 k_2 = 0$ ehk $k_1 k_2 = -1$.

Ristuvate sirgete tõusude korrutis võrdub –1-ga. $k_1 \cdot k_2 = -1$

Näide 1. Koostada sirge võrrand, teades, et sirge läbib punkti $(2; -3)$ ja on risti sirgega $4x - 3y - 6 = 0$.

Lahendus. Antud sirge tõus on $\frac{4}{3}$, seega on otsitava sirge tõus $-\frac{3}{4}$. Järelikult on otsitav võrrand $y - (-3) = -\frac{3}{4}(x - 2)$, mida lihtsustades saame $3x + 4y + 6 = 0$.

1183. Leia nurk sirgete vahel, kui sirgete võrrandid on

1) $y = 2x + 3$ ja $y = x - 2$
2) $y = 3x + 1$ ja $y = 2x - 7$
3) $3x - 3y + 6 = 0$ ja $x + 5y - 2 = 0$
4) $3x - y + 5 = 0$ ja $x - y + 4 = 0$
5) $4x + 6y = 0$ ja $x - 3y + 5 = 0$
6) $3x + y - 7 = 0$ ja $x - y + 6 = 0$
7) $y = 3$ ja $y = 3x + 1$
8) $x = -2$ ja $y = -2x + 3$
9) $y = 0$ ja $x = 0$
10) $y = 2x + 2$ ja $y = -\frac{1}{2}x - 3$.

1184. Kas sirgete hulgas on paralleelseid või ristuvaid sirgeid?

a) $3x - 2y + 7 = 0$
b) $6x - 4y - 9 = 0$
c) $6x + 4y - 5 = 0$
d) $2x + 3y - 6 = 0$
e) $x - y + 8 = 0$
f) $x + y - 12 = 0$
g) $2x + 2y - 4 = 0$
h) $-2x + 3y = 0$

1185. Leia nurk sirge $2x - 3y + 6 = 0$ ja punkte $(4; -5)$ ja $(-3; 2)$ läbiva sirge vahel.

[1] Sellist valemit ei saa rakendada, kui üks sirgetest, näiteks sirge s_2, on risti x-teljega. Siis leiame otsitava nurga valemist $\varphi = |90° - \alpha|$.

1186. Kaks sirget lõikuvad punktis (2; – 1). Üks sirgetest läbib koordinaatide alguspunkti, teine punkti (5; 1). Leia teravnurk nende sirgete vahel.

1187. Nelinurk *BECK* on romb, mille kaks tippu on $B(3; 5)$ ja $C(7; -3)$. Leia diagonaali *EK* tõus ja võrrand.

1188. Leia võrrand sirgele, mis läbib antud punkti ja on paralleelne antud sirgega:

a) $P(2; -3)$ ja $y = \frac{1}{2}x - 1$ b) $A(-4; -3)$ ja $y - 4 = 2(x + 3)$

1189. Leia võrrand sirgele, mis läbib antud punkti ja on risti antud sirgega:

a) $P(1; -2)$ ja $y = -3x + 4$ b) $A(-1; 2)$ ja $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$.

1190. Rööpküliku kolm tippu on $A(-3; 3)$, $B(0; 1)$ ja $C(3; 3)$. Leia neljanda tipu *D* koordinaadid.

1191. Tõesta, et kolmnurk tippudega $A(-3; -4)$, $B(6; -1)$ ja $C(3; 2)$ on täisnurkne.

1192. Leia sirge võrrand, kui sirge läbib punkti $O(0; 0)$ ja

1) on paralleelne sirgega $y = 4x - 3$;

2) on risti sirgega $y = \frac{1}{2}x + 1$;

3) lõikub sirgega $y = 2x + 5$ 45° nurga all;

4) lõikub sirgega $y = x - 1$ 60° nurga all.

1193. Leia kolmnurga tipust *A* tõmmatud kõrguse ja mediaani võrrandid.

1) $A(8; -10)$, $B(-5; 2)$ ja $C(-1; -6)$

2) $A(-1; -2)$, $B(8; -1)$ ja $C(2; 5)$.

1194. Leia kolmnurga *ABC* kõrguste võrrandid.

1) $A(3; 5)$, $B(5; -3)$ ja $C(0; -1)$

2) $A(2; -2)$, $B(1; -1)$ ja $C(-4; -4)$

1195. Tuleta sirgete ristseisu tunnus $k_1 \cdot k_2 = -1$, kasutades selleks valemi $\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha \cdot \tan\beta}$ asemel skalaarkorrutise definitsiooni.

1196. Seinal rippuva pildi alumine äär on põrandast 1,4 m ja ülemine äär põrandast 3,0 m kõrgusel. Kui suure vaatenurga all (vertikaaltasandis) näeb seda pilti inimene, kes seisab seinast 5,0 m kaugusel ja kelle silmade kõrgus põrandast on 1,6 m?

1197. Kirjuta arvutiprogramm, mis arvutab kahe sirge vahelise nurga, kui sisestada sirgete tõusud.

8.17. KAHE SIRGE LÕIKEPUNKT

Olgu tasandil kaks sirget $ax + by + c = 0$ ja $dx + ey + f = 0$. Nende sirgete lõikepunkt asub mõlemal sirgel. Selle punkti koordinaadid rahuldavad järelikult mõlemat võrrandit. Seega on lõikepunkti koordinaadid võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ dx + ey + f = 0 \end{cases}$$ lahendiks.

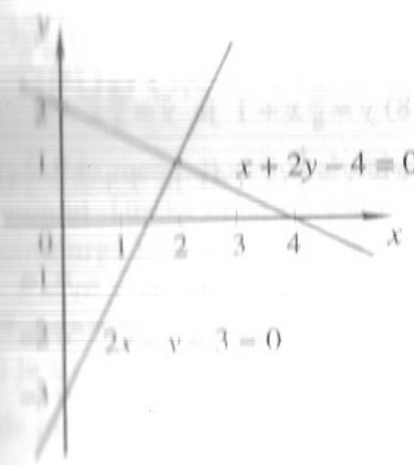
Võrrandisüsteeme saab teadupoolest lahendada mitmel erineval viisil (liitmisvõte, asendusvõte, determinantide abil), meie kasutame neist alljärgnevates näidetes liitmisvõtet.

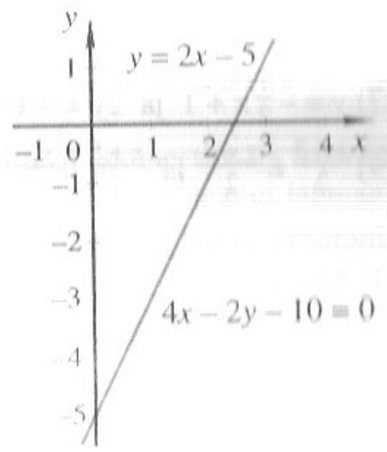
Näide 1. Leiame sirgete $2x - y - 3 = 0$ ja $x + 2y - 4 = 0$ lõikepunkti (vasakpoolne pool):

$$\begin{cases} 2x - y - 3 = 0 & | \cdot 2 \\ x + 2y - 4 = 0 \end{cases} \quad \left| \begin{array}{l} 4x - 2y - 6 = 0 \\ + \quad x + 2y - 4 = 0 \\ \hline 5x - 10 = 0 \\ x = 2 \end{array} \right.$$

Tuues asendame esimeses võrrandis x arvuga 2 ja leiame y väärtuse:

$2 \cdot 2 - y - 3 = 0 \Rightarrow y = 1$. Seega on sirgete lõikepunkt (2; 1).



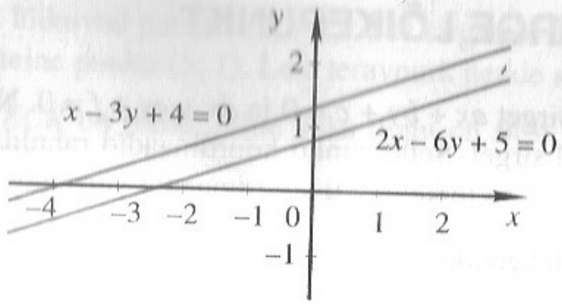


Näide 2. Leiame sirgete $y = 2x - 5$ ja $4x - 2y - 10 = 0$ lõikepunkti (parempoolne pool):

$$\begin{cases} y = 2x - 5 \\ 4x - 2y - 10 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - y - 5 = 0 & | \cdot (-2) \\ 4x - 2y - 10 = 0 \end{cases} \quad \left| \begin{array}{l} -4x + 2y + 10 = 0 \\ + \quad 4x - 2y - 10 = 0 \\ \hline 0 = 0 \end{array} \right.$$

Tekkis samasus $0 = 0$, kusjuures mõlemad muutujad koondusid välja. Seega on võrrandisüsteemil lõpmata palju lahendeid. Sisuliselt on siin tegemist üheainsa võrrandiga, mida me näeme, kui teise võrrandi jagame kahega. Sirged ühtivad.

Ülesande lahendiks on selle sirge iga punkt, näiteks $A(0; -5)$, $B(2; -1)$, $C(4; 3)$ jne.



Näide 3. Leiame sirgete $x - 3y + 4 = 0$ ja $2x - 6y + 5 = 0$ lõikepunkti (vt. ülal olevat joonist).

$$\begin{cases} x - 3y + 4 = 0 & 1\cdot(-2) \\ 2x - 6y + 5 = 0 \end{cases} \quad \Bigg| \quad \begin{array}{r} -2x + 6y - 8 = 0 \\ +\quad 2x - 6y + 5 = 0 \\ \hline -3 = 0 \end{array}$$

Mõlemad muutujad koondusid välja ja tekkis vastuolu $-3 = 0$. Seega, antud võrrandisüsteemil pole lahendeid ja antud sirgetel pole ühiseid punkte. Need sirged on paralleelsed.

1198. Leia kahe sirge lõikepunkt. Kui sirged ei lõiku, siis tee kindlaks, kas sirged on paralleelsed või ühtivad.

1) $2x + 3y - 12 = 0$ ja $x - y - 1 = 0$
2) $3x - 2y - 4 = 0$ ja $x + 3y - 5 = 0$
3) $y = 3x - 2$ ja $3x - y - 2 = 0$
4) $2x - 5y + 8 = 0$ ja $4x - 10y - 3 = 0$
5) $x + y = 5$ ja $2x + 2y = 3$
6) $2x - 3y = 4$ ja $4x - 6y = 8$
7) $y = -\frac{1}{2}x + 1$ ja $2y = -x + 2$
8) $y = \frac{6}{8}x + 1$ ja $y = \frac{3}{4}x - 5$
9) $\frac{x-3}{3} = \frac{y+2}{2}$ ja $\frac{x+5}{2} = \frac{y-1}{-3}$
10) $y - 3 = \frac{1}{2}(x - 4)$ ja $y + 2 = \frac{3}{2}(x - 2)$

1199. Joonesta sirged ja leia nende lõikepunkt.

1) $6x - y = 11$ ja $2x + y = 5$
2) $2x + 3y = 6$ ja $4x + 6y = 3$
3) $6m - 9n = 24$ ja $2m - 3n = 8$
4) $7r - 3s = -6$ ja $3r - s = -6$
5) $x + 3y = 8$ ja $y = x$
6) $\frac{x}{3} + \frac{y}{-2} = 1$ ja $\frac{x}{-6} + \frac{y}{4} = 2$

1200. Leia A ja B, et antud võrrand läbiks antud punkte.

1) $Ax + By = 10$; $(2; -1)$ ja $(6; 2)$
2) $Ax + By = 5$; $(3; -1)$ ja $(-8; 13)$
3) $y = Ax^2 + Bx$; $(1; -1)$ ja $(-2; -10)$
4) $y = Ax^2 + Bx$; $(-1; -4)$ ja $(2; 5)$

1201. Grupp turiste väljus laagrist kell 12 päeval ja võttis suuna lähimale mäetipule. Turistid liikusid keskmiselt 3 km tunnis. Samal päeval kell 14 väljus laagrist ja järgnes neile grupist mahajäänud turist keskmise kiirusega 4,5 km tunnis. Leia graafiliselt, mis kella ajal ja kui kaugel laagrist jõudis hiljem väljunud turist grupile järele.

1202. Tallinnast suundub Tapale linnalähedane rong keskmise kiirusega 35 km/h. Pool tundi hiljem väljub Tapalt rong Tallinna poole keskmise kiirusega 50 km/h.

Vektor tasandil. Joone võrrand

Joonesta nende liikumiste graafikud ja määra graafikult, kui kaugel Tallinnast rongid kohtuvad, kui Tallinna ja Tapa vaheline kaugus on 70 km. Kui kaua on kohtumise momendiks teel olnud rong, mis väljus Tallinnast?

1203. Milliste k väärtuste korral lõikuvad sirged $2x + 3y = k$ ja $x + y = 6$ punktis, mille koordinaadid on positiivsed?

1204. On antud 5 punkti nii, et neli neist ei asetse ühel tasapinnal. Kas nende hulgas leidub 3 punkti, mis asetsevad ühel ja samal sirgel?

1205. Tasandil on n sirget, kusjuures neist mistahes 3 sirget ei lõiku ühes punktis ning mistahes 2 sirget ei ole paralleelsed. Mitmeks osaks jaotavad need sirged tasandi?

1206. Koosta arvutiprogramm, mis pärast kahe sirge üldvõrrandis olevate kordajate sisestamist leiaks nende sirgete lõikepunkti või teataks, kas need sirged ühtivad või on paralleelsed. Näpunäide: soovitav on võrrandisüsteem lahendada determinantide abil.

8.10. KUIDAS LAHENDADA KOLMNURKA, MILLE TIPUD ON ANTUD KOORDINAATIDEGA?

Koordinaatide meetodi abil saab lahendada paljusid geomeetria- ja trigonomeetriaülesandeid. Üheks neist on kolmnurga lahendamine, s.t. teatud lähteandmete järgi kolmnurga külgede, nurkade ja pindala leidmine.

Näide 1. Lahendame kolmnurga, kui kolmnurga tippude koordinaadid on $A(-3; 0)$, $B(1; 4)$ ja $C(5; -2)$.

Külgede pikkuste leidmiseks kasutame kahe punkti vahelise kauguse valemit.

$$AB = \sqrt{(1 - (-3))^2 + (4 - 0)^2} = \sqrt{16 + 16} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2},$$

$$BC = \sqrt{(5 - 1)^2 + (-2 - 4)^2} = \sqrt{16 + 36} = \sqrt{54} = 2\sqrt{13},$$

$$AC = \sqrt{(5 - (-3))^2 + (-2 - 0)^2} = \sqrt{64 + 4} = \sqrt{68} = 2\sqrt{17}.$$

Nurkade leidmiseks on mitu võimalust. Nurki võib leida siinus- ja koosinusteoreemide abil, kasutades vektorite skalaarkorrutist või kahe sirge vahelise nurga tangensi valemit. Meie kasutame antud näites esimest lahendusviisi.

$$\cos\angle A = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2 \cdot AC \cdot AB} = \frac{32 + 68 - 52}{2\sqrt{68 \cdot 32}} = \frac{48}{16\sqrt{34}} = \frac{3}{\sqrt{34}} \approx 0{,}5145$$

$\angle A = 59°02'$.

Siinusteoreemist saame, et

$$\sin\angle B = \frac{AC\cdot\sin\angle A}{BC} = \frac{\sqrt{68}\sin 59°02'}{\sqrt{52}} \approx 0{,}9806,$$

$$\angle B = 78°41',$$

$$\angle C = 180° - \angle A - \angle B = 42°17'.$$

Kolmnurga pindala leiame kahe külje ja nende külgede vahelise nurga siinuse abil.

$$\sin\angle A = \sqrt{1-\cos^2\angle A} = \frac{5}{\sqrt{34}};\quad S = \frac{1}{2}AB\cdot AC\cdot\sin\angle A = \frac{\sqrt{32}\cdot\sqrt{68}\cdot 5}{2\sqrt{34}} = 20.$$

See vastus on täpne. Miks?

Kontrolliks võib proovida leida kolmnurga külgi ja nurki mõnel muul viisil. Õige lahenduse korral peaks tulemus olema sama.

1207. Lahenda kolmnurk, kui on antud kolmnurga tippude koordinaadid.

a) $A(-5;\,2)$, $B(6;\,-1)$ ja $C(1;\,4)$ b) $A(5;\,1)$, $B(-1;\,2)$ ja $C(3;\,6)$
c) $A(-4;\,0)$, $B(1,\,3)$, $C(3;\,-1)$ d) $A(1;\,4)$, $B(5;\,-2)$ ja $C(-2;\,-4)$

1208. Leia eelmises ülesandes antud kolmnurga

a) külgede võrrandid;
b) mediaanide võrrandid ja lõikepunkt;
c) kõrguste võrrandid.

1209. Tõesta, et kolmnurk tippudega $A(-3;\,-1)$, $B(1;\,-5)$ ja $C(4;\,2)$ on võrdhaarne.

1210. Kolmnurga tipud on $A(2;\,-2)$, $B(6;\,4)$ ja $C(2;\,6)$. Leia kolmnurga mediaanide lõikepunkt.

1211. Kolmnurga tipud on $K(3;\,-5)$, $L(-1;\,-1)$ ja $M(0;\,6)$. Leia ümberringjoone keskpunkt ja raadius.

1212. Lahenda kolmnurk, kui on antud kolmnurga külgede võrrandid.

1) $5x + 27y - 27 = 0$; $x + 6y - 11 = 0$ ja $x - y + 3 = 0$
2) $x + 7y = 0$; $x - y - 2 = 0$ ja $3x + y - 2 = 0$.

1213. Kirjuta arvutiprogramm, mis leiaks kolmnurga küljed, nurgad ja pindala, kui on antud kolmnurga tippude koordinaadid.

6.10. RINGJOONE VÕRRAND

Ringjooneks nimetatakse antud punktist jääval kaugusel asetsevate punktide hulka tasandil.

Antud punkti nimetatakse seejuures **ringjoone keskpunktiks** ja jäävat kaugust **ringjoone raadiuseks**.

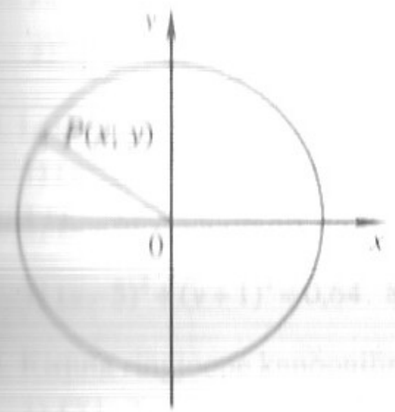
Koostame ringjoone võrrandi, kui ringjoone keskpunkt on koordinaatide alguspunkt ja raadius on 6. Olgu $P(x;\,y)$ ringjoonel vabalt valitud punkti koordinaadid. Kaugus punktist $O(0;\,0)$ ja $P(x;\,y)$ vahel on 6 ühikut.

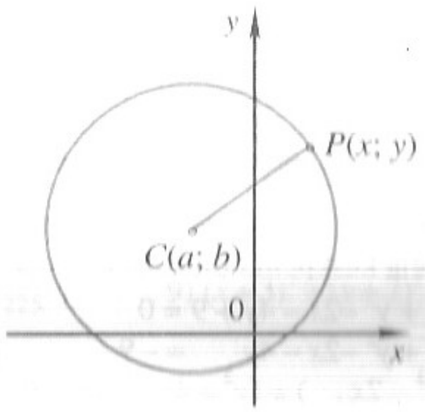
Kahe punkti vahelise kauguse valemist saame:

$$\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2} = 6$$

$$\sqrt{x^2+y^2} = 6$$

$$x^2 + y^2 = 36,$$ mis ongi otsitava ringjoone võrrand.





Analoogiliselt sellele näitele leitakse ringjoone võrrand siis, kui selle ringjoone keskpunkt on tasandi vabalt valitud punktis $C(a;\,b)$ ja raadius on r.

$$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2} = r$$

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

> Ringjoone võrrand, kui ringjoone keskpunkt on $(a;\,b)$ ja raadius r:
> $$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2.$$

Nii esitatud ringjoone võrrandit nimetatakse vahel ka ***ringjoone kanooniliseks võrrandiks***. Sõna *kanooniline* tähendab siin enneköike tavakohast (lad. k. *canonicus* — seaduspärane, tavakohane).

Erijuhul, kui ringjoone keskpunkt on punktis $O(0;\,0)$, siis saab ringjoone võrrand kuju

$$x^2 + y^2 = r^2$$

Kui avada ringjoone kanoonilises võrrandis sulud ja viia kõik liikmed ühele poole, siis saame ringjoone võrrandi viia kujule

$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - r^2 = 0.$

Tähistame siin $-2a = d$; $-2b = e$ ja $a^2 + b^2 - r^2 = f$. Saame võrrandi

$x^2 + y^2 + dx + ey + f = 0,$

mida nimetame ka ringjoone võrrandi üldkujuks.

Püstitame järgmise küsimuse: Kui meil on mingi teise astme võrrand, mille kuju on: $x^2 + y^2 + dx + ey + f = 0$, kas siis see võrrand osutub alati ringjoone võrrandiks?

Vastamaks sellele küsimusele vaatame kõigepealt kolme näidet.

Näide 1. Kas võrrand $x^2 + y^2 + 4x - 8y + 11 = 0$ on ringjoone võrrand? Kui on, siis leia keskpunkt $(a; b)$ ja raadius.

Kasutame täisruudu eraldamise võtet:

$x^2 + y^2 + 4x - 8y + 11 = 0$
$x^2 + y^2 + 4x - 8y = \mathbf{-11}$
$(x^2 + 4x\ \ ) + (y^2 - 8y\ \ ) = -11$
$(x^2 + 4x + \mathbf{4}) + (y^2 - 8y + \mathbf{16}) = -11 + \mathbf{4} + \mathbf{16}$
$(x + 2)^2 + (y - 4)^2 = 9.$

See võrrand on ringjoone võrrand, keskpunkt on $(-2; 4)$ ja $r = 3$.

Näide 2. Kas võrrand $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 9 = 0$ on ringjoone võrrand? Kui on, siis leia keskpunkt $(a; b)$ ja raadius.

$x^2 + y^2 - 2x - 4y + 9 = 0$
$x^2 + y^2 - 2x - 4y = \mathbf{-9}$
$(x^2 - 2x\ \ ) + (y^2 - 4y\ \ ) = -9$
$(x^2 - 2x + \mathbf{1}) + (y^2 - 4y + \mathbf{4}) = -9 + \mathbf{1} + \mathbf{4}$
$(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = -4$

See võrdus ei kehti reaalarvude vallas, kuna ruutude summa ei saa olla negatiivne. Kui tulemust vaadelda ringjoonena, siis selle ringjoone raadius peaks olema $\sqrt{-4}$. Sellist arvu reaalarvude vallas ei leidu.[1]

Näide 3. Kas võrrand $x^2 + y^2 - 10x + 8y + 41 = 0$ on ringjoone võrrand? Kui on, siis leia keskpunkt $(a; b)$ ja raadius.

$x^2 + y^2 - 10x + 8y = \mathbf{-41}$
$(x^2 - 10x\ \ ) + (y^2 + 8y\ \ ) = -41$
$(x^2 - 10x + \mathbf{25}) + (y^2 + 8y + \mathbf{16}) = -41 + \mathbf{25} + \mathbf{16}$
$(x - 5)^2 + (y + 4)^2 = 0$

Ringjoone keskpunkt on $(5; -4)$, raadius aga . . . null?! Seega võib öelda, et sel juhtumil rahuldavad lähtevõrrandit ainult ühe punkti $(5; -4)$ koordinaadid.

[1] $\sqrt{-4}$ kuulub nn. imaginaarsete arvude hulka ja seetõttu nimetatakse sellist ringjoont ka imaginaarseks ringjooneks.

Pane tähele huvitavat korrapära:

esimeses näites $d = 4$; $e = -8$ ja keskpunkt $(-2; 4)$;
teises näites $d = -2$; $e = -4$ ja keskpunkt $(1; 2)$;
kolmandas näites $d = -10$; $e = 8$ ja keskpunkt $(5; -4)$.

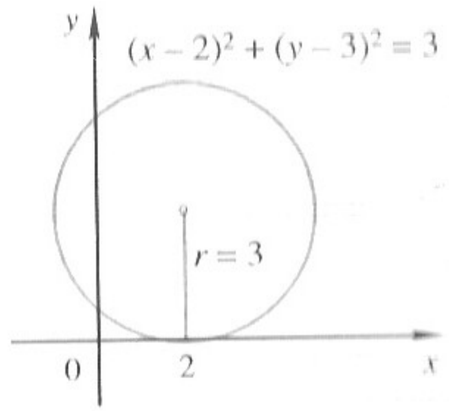
Kas siit järeldub mingi üldine seaduspärasus?

Tugevamatele matemaatikutele iseseisev ülesanne. *Mis tingimust peavad rahuldama võrrandis $x^2 + y^2 + dx + ey + f = 0$ kordajad d, e ja f, et see võrrandi esitaks positiivse raadiusega ringjoont?*

Näide 4. Ring raadiusega 3 paikneb I ja II veerandis. Leia ringjoone võrrand, kui see ringjoon puutub x-telge punktis $(2; 0)$.

Kuna see ringjoon puutub x-telge punktis $(2; 0)$, siis selle ringjoone keskpunkt paikneb sirgel $x = 2$. Et ringi raadius on 3, siis on keskpunkt punktis $(2; 3)$. Seega

$(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 9.$



1314. Leia ringjoone keskpunkt ja raadius.

1) $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 4$ 2) $x^2 + y^2 = 121$ 3) $(x + 1)^2 + y^2 = 1$
4) $(x + 3)^2 + y^2 = 7^2$ 5) $2x^2 + 2y^2 = 288$ 6) $x^2 + (y - 5)^2 = \frac{1}{4}$
7) $(x - 5)^2 + (y + 1)^2 = 0{,}64$ 8) $x^2 + y^2 = \frac{196}{225}$ 9) $(x + 3)^2 + (y + 7)^2 = 8$

1315. Kirjuta ringjoone kanooniline võrrand.

1) $C(1; 2)$, $r = 3$ 2) $C(-2; 5)$, $r = 7$ 3) $C(8; -3)$, $r = 12$
4) $C(2; -1)$, $r = \sqrt{2}$ 5) $C(0; 2)$, $r = \sqrt{3}$ 6) $C(-2; 0)$, $r = \frac{1}{2}$
7) $C(-1; -1)$, $r = 0{,}7$ 8) $C(0; 5)$, $r = \frac{13}{16}$ 9) $C(j; k)$, $r = n$

1316. Leia ringjoone pikkus ja ringi pindala, kui ringjoone võrrand on

1) $x^2 + y^2 = 9$ 2) $(x - 100)^2 + (y + 1)^2 = 6^2$ 3) $x^2 + y^2 = 0{,}81$
4) $3x^2 + 3y^2 - 675$ 5) $(x - 1)^2 + (y - 0{,}1)^2 = 10$ 6) $x^2 + y^2 = \frac{625}{361}$

1317. Leia ringjoone võrrand, kui on antud keskpunkt ja ümbermõõt või pindala.

1) $K(2; 3)$ ja $C = 8\pi$ 2) $K(-3; -1)$ ja $C = 12\pi$
3) $K(0; 2)$ ja $S = 25\pi$ 4) $K(-5; 0)$ ja $S = 1{,}21\pi$

1318. Tee kindlaks, kas antud võrrand on ringjoone võrrand. Ringjoone korral leia keskpunkt ja raadius.

1) $x^2 + y^2 - 16 = 0$ 2) $x^2 + y^2 + 4 = 0$ 3) $x^2 + y^2 - 4x = 0$
4) $x^2 + y^2 + 2x - 6y = 0$ 5) $x^2 + y^2 = -4x$ 6) $x^2 + y^2 = 2y$

7) $x^2+y^2-4x+2y=-6$ 8) $x^2+y^2+6x-4y-3=0$
9) $x^2+y^2-x-5y+3=0$ 10) $x^2+y^2-2x+5y+9=0$
11) $2x^2+2y^2-6x-2y+3=0$ 12) $3x^2+3y^2+2x-4y=0$

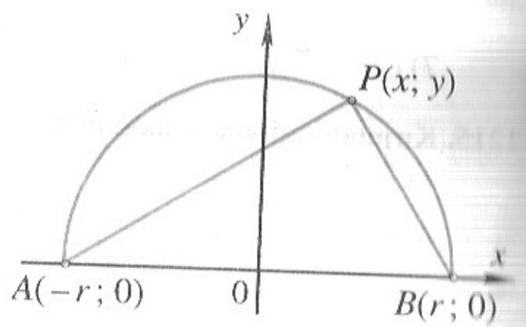
1219. Leia järgmiste ringjoonte võrrandid.
1) Keskpunkt (2; 0); läbib koordinaatide alguspunkti.
2) Keskpunkt (3; 0); läbib punkti (7; –3).
3) Keskpunkt I veerandis; $r=3$, puutub y-telge punktis (0; 1).
4) Keskpunkt (5; 5); puutub mõlemat telge.
5) Keskpunkt joonel $y=2$; puutub x-telge punktis (3; 0).
6) Keskpunkt joonel $x+y=6$; puutub x-telge punktis (2; 0).
7) Diameetri otspunktid on (–2; 3) ja (6; 5).
8) Puutub mõlemat koordinaattelge; $r=2$.

1220. On antud ringjoon võrrandiga $x^2+y^2-10x-2y+1=0$ ja punktid $A(5; 1)$, $B(8; 5)$, $C(3; 4)$, $D(5; 8)$, $E(4; 3)$, $F(1; 5)$. Missugused neist punktidest on ringi sees, väljaspool ringi või ringjoonel?

1221. Leia ringjoone võrrand, kui $r=5$ ja ringjoon puutub $y=|x|$ graafikut kahes punktis.

1222. Leia sellise joone võrrand, mille moodustavad kõigi niisuguste ringjoonte keskpunktid, mis puutuvad sirgega $y=2x+2$ punktis $(1; 4)$.

1223. Tõesta teoreem. *Diameetrile toetuv piirdenurk on täisnurk.* Kasuta tõestuses joonist. Punkt $P(x; y)$ on suvaline punkt ringjoonel. Esita y x ja r kaudu ja näita, et lõigud AP ja BP on risti.



1224. Antud on kaks punkti $O(0; 0)$ ja $A(0; 6)$. Leia võrrand kõigi nende punktide $N(x; y)$ jaoks, mille korral $\angle ONA$ on täisnurk.

1225. Võrrand $(x\pm4)^2+(y\pm4)^2=16$ kirjeldab nelja erinevat ringjoont.
a) Joonesta need ringjooned.
b) Leia sellise ringjoone võrrand, mille sisse mahuvad need ringjooned ja mis puutub kõiki nelja ringjoont.
c) Leia sellise ringjoone võrrand, mis puutub kõiki ringjooni, aga ei mis ei hõlma neid ringjooni.

1226. Kolm erineva suurusega münti on laual ja puutuvad vastu üksteist. Müntide keskpunktid moodustavad täisnurkse kolmnurga. Kui suured on müntide mõõtmed, kui on teada, et nad on täisarvud ja väiksema mündi raadius on 1?

1227. Ringjooned raadiustega r ja R puutuvad teineteist väliselt. Puutepunkti kaugus nende ringjoonte ühisest puutujast on d. Tõesta, et $\frac{1}{r}+\frac{1}{R}=\frac{2}{d}$.

1228. Ringi, mille raadius on R, on joonestatud kolm võrdse raadiusega ringjoont, mis puutuvad nii välist ringjoont kui ka paarikaupa teineteist. Leia kõigi kolme ringjoone poolt piiratud kujundi pindala.

Näide 8. Leiame ringjoone võrrandi, kui ringjoon läbib punkte $(-5; 2)$, $(-3; 4)$ ja $(1; 2)$.

Nende punktide koordinaadid peavad rahuldama ringjoone võrrandi üldkuju, s.o. võrrandit $x^2+y^2+dx+ey+f=0$.

Seega

$$\begin{cases} 25+4-5d+2e+f=0 \\ 9+16-3d+4e+f=0 \\ 1+4+d+2e+f=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -5d+2e+f=-29 \\ -3d+4e+f=-25 \\ d+2e+f=-5 \end{cases}$$

Lahendades saame, et $d=4$; $e=-2$; $f=-5$.
Seega on ringjoone võrrand $x^2+y^2+4x-2y-5=0$.
Viies selle võrrandi kanoonilisele kujule, saame
$(x+2)^2+(y-1)^2=10$.

1229. Leia ringjoone võrrand, kui ringjoon läbib punkte
1) $(-1; 2)$, $(3; 4)$, $(2; 3)$ 2) $(-2; -2)$, $(10; -8)$, $(7; 1)$
3) $(3; -2)$, $(-1; -4)$, $(2; -5)$ 4) $(-1; -1)$, $(1; 3)$, $(2; 5)$.

1230. Leia kolmnurga ümberringjoone võrrand. Kolmnurga tippude koordinaadid on
1) $(7; 7)$, $(0; 8)$, $(-2; 4)$ 2) $(0; 4)$, $(1; 2)$, $(3; -2)$.

1231. Olgu $P(x_1; y_1)$ mingi ringjoonest $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ väljaspool olev punkt. Tõesta, et sellest punktist antud ringjoonele tõmmatud puutujalõikude pikkust saab arvutada valemiga
$d=\sqrt{(x_1-a)^2+(y_1-b)^2-r^2}$.

1232. Kirjuta arvutiprogramm, mis võimaldaks otsustada pärast ringjoone üldvõrrandis $x^2+y^2+dx+ey+f=0$ olevate kordajate d, e ja f sisestamist, kas antud joon on ringjoon. Juhul kui tegu on ringjoonega, leidku programm ringjoone keskpunkt ja raadius.

Lisaks põhikursusele

6.20. PARABOOL. PARABOOLI KANOONILINE VÕRRAND

Kuidas leida joone võrrandit, kui on teada, et selle joone iga punkti kaugused sirgest $y = -2$ ja punktist $F(0; 2)$ on võrdsed?

Tähistame joonel oleva vabalt valitud punkti $P(x; y)$. Selle punkti kaugus punktist F, s.t. lõigu FP pikkus on võrdne selle punkti kaugusega sirgel olevast punktist D, mille koordinaadid on $D(x; -2)$. Seega

$$FP = DP,$$

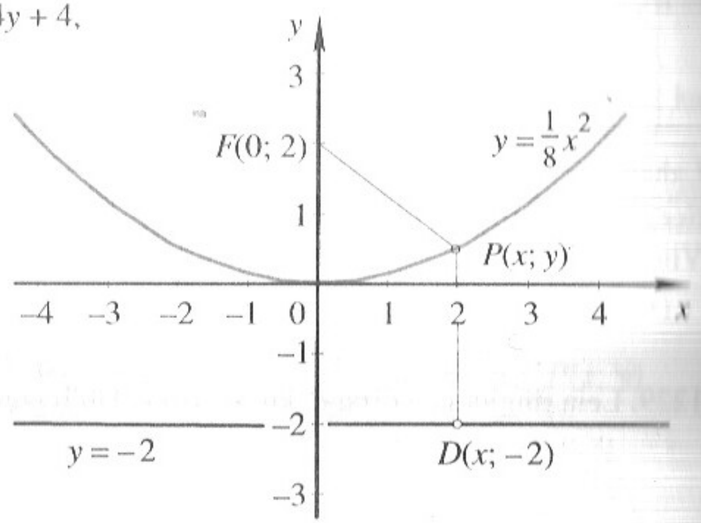
$$\sqrt{(x-0)^2 + (y-2)^2} = \sqrt{(x-x)^2 + (y+2)^2},$$

$$x^2 + (y-2)^2 = (y+2)^2,$$

$$x^2 + y^2 - 4y + 4 = y^2 + 4y + 4,$$

$$x^2 = 8y,$$

$$y = \frac{1}{8}x^2.$$



Saime ühe **parabooli** võrrandi. Selle parabooli haripunkt on koordinaatide algus-punktis, parabooli sümmeetriateljeks on y-telg ja parabool avaneb ülespoole.

Paraboliks nimetatakse sellist punktihulka tasandil, mille iga punkti kaugused mingist kindlast punktist ja kindlast sirgest on võrdsed. Seda kindlat punkti nimetatakse parabooli **fookuseks**, kindlat sirget parabooli **juhtjooneks**.[1]

Näites oli fookuseks punkt $F(0; 2)$ ja juhtjooneks sirge $y = -2$.

Näide 1. Leia parabooli võrrand, kui on teada, et fookus on punktis $F(2; 0)$ ja juhtjooneks on y-telg (sirge $x = 0$).

Tähistame joonel vabalt valitud punkti $P(x; y)$. Sellele punktile vastab juhtsirgel punkt $D(0; y)$, nii et

[1] Matemaatikud kasutavad *juhtjoone* mõiste asemel vahel ka termineid *juhtsirge* ja *direktriss*. Need kolm terminit tähistavad matemaatilises mõttes üht ja sama asja.

$$FP = DP,$$

$$\sqrt{(x-2)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{(x-0)^2 + (y-y)^2},$$

$$(x-2)^2 + y^2 = x^2,$$

$$x^2 - 4x + 4 + y^2 = x^2,$$

$$y^2 + 4 = 4x.$$

Siit võib avaldada muutuja x-i või muutuja y-i:

$$x = \frac{1}{4}y^2 + 1 \qquad (1)$$

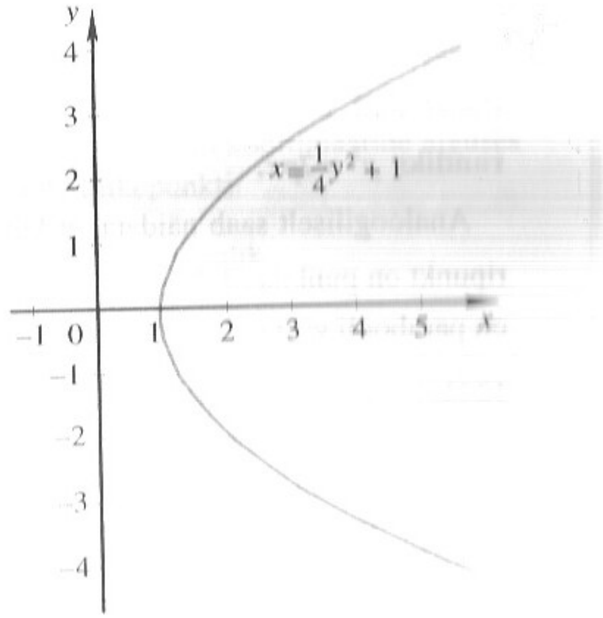
$$y = \pm\sqrt{4(x-1)} \qquad (2)$$

Saime mingi joone võrrandi. Seniõpitud paraboliga $y = ax^2 + bx + c$ siin tegu ei ole. Joonestame selle funktsiooni graafiku. Selleks arvutame valemi (1) põhjal mõned selle funktsiooni väärtused.

y	-4	-3	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	2	3	4
x	5	$3\frac{1}{4}$	2	$1\frac{1}{4}$	$\frac{17}{16}$	1	$\frac{17}{16}$	$1\frac{1}{4}$	2	$3\frac{1}{4}$	5

Ühendades punktid sujuva joonega, saame joonisel oleva kõvera.

See kõver on samuti parabool, ainult selle parabooli sümmeetria teljeks on x-telg, haripunktiks on $(1; 0)$ ja parabool avaneb paremale. Antud graafik on sarnane funktsiooni $y = \frac{1}{4}x^2 + 1$ graafikuga ja on saadav viimasest, kui me seda graafikut pöörame 90° päripäeva. Muide, võrrandist $y = \frac{1}{4}x^2 + 1$ saab võrrandi $x = \frac{1}{4}y^2 + 1$, kui muutujate tähised vahetada.



Seniõpitud paraboolid paiknevad teljestikus nii, et avanevad ainult kas üles või alla: $y = ax^2 + bx + c$ avaneb üles, kui $a > 0$, ja alla, kui $a < 0$. Ülaltoodud definitsiooni järgi võib kirjutada välja ka selliste paraboolide võrrandid, mis avanevad kõigis muudes suundades.

On olemas aga ka parabooli kanooniline võrrand. See saadakse siis, kui valitakse fookuse ja juhtsirge asukohad nii, et parabooli haripunkt oleks koordinaatide alguspunktis ja sümmeetriateljeks oleks x-telg. Fookuse ja juhtjoone vaheli-

ne kaugus tähistatakse p-ga. Kui nii teha, siis on fookus punktis $F(\frac{p}{2}; 0)$ ja juhtjooneks on sirge $x = -\frac{p}{2}$.

Olgu vabalt valitud punkt paraboolil $P(x; y)$. Seda juhtsirgel olevat punkti, mille kaugus punktist P on võrdne punktide P ja F vahelise kaugusega, tähistame tähega D. Punkti D koordinaadid on $(-\frac{p}{2}; y)$.

$$DP = FP$$

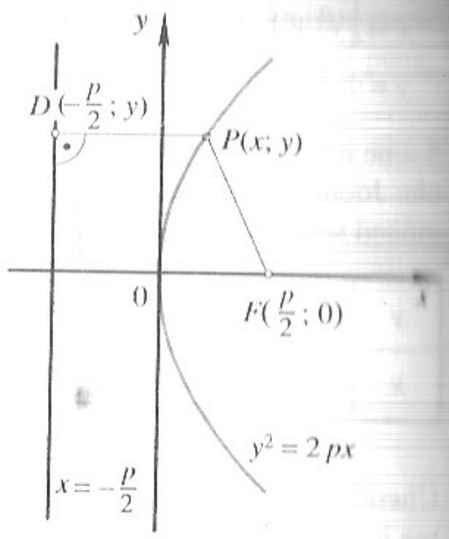
$$\sqrt{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + (y-y)^2} = \sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2 + (y-0)^2}$$

$$\left(x+\frac{p}{2}\right)^2 = \left(x-\frac{p}{2}\right)^2 + y^2$$

$$x^2 + px + \frac{p^2}{4} = x^2 - px + \frac{p^2}{4} + y^2$$

$$y^2 = 2px$$

See ongi parabooli kanooniline võrrand.



Paraboolil, mille juhtjooneks on $x = -\frac{p}{2}$ ja fookus punktis $(\frac{p}{2}; 0)$, on võrrandiks $y^2 = 2px$.

Analoogiliselt saab näidata, et kui parabooli sümmeetriateljeks on y-telg, haripunkt on punktis $(0; 0)$ ja fookuseks on punkt $(0; \frac{p}{2})$ ja juhtjooneks $y = -\frac{p}{2}$, siis on parabooli võrrandiks $x^2 = 2py$.

1233. Leia parabooli võrrand ja joonista graafik.

1) fookus $(0; 0)$; juhtjoon $x = -2$
2) fookus $(0; 0)$; juhtjoon $y = 2$
3) fookus $(2; 3)$; juhtjoon $y + 3 = 0$
4) fookus $(-2; 3)$; juhtjoon $x = 2$
5) fookus $(2; 0)$; haripunkt $(2; 2)$
6) haripunkt $(3; -1)$; juhtjoon $x + 1 = 0$
7) haripunkt $(3; 0)$; juhtjoon $y = 2$
8) fookus $(6; 2)$; haripunkt $(3; 2)$

1234. Joonista graafikud. Pea meeles, et iga graafik on pool parabooli graafikust.

1) $y = \sqrt{x}$
2) $y = -\sqrt{x+4}$
3) $y = -\sqrt{4-x}$
4) $y = \sqrt{4x+8}$

1235. Leia parabooli fookus ja juhtjoon.

1) $y^2 = 4x$
3) $y^2 = -12x$
3) $x^2 = -8y$
4) $y^2 + x = 0$
5) $x^2 = 6y$
6) $y - 2x^2 = 0$
7) $x^2 = 4y + 1$
8) $y = 0{,}25x^2$

1236. On antud punktid $A(3; -6)$, $B(0{,}5; \sqrt{6})$, $C(1; 3)$, $D(2; 2\sqrt{6})$. Millised neist asuvad paraboolil $y^2 = 12x$?

1237. Leia parabooli võrrand, kui parabooli haripunkt asub koordinaatide alguses ja
1) sümmeetriateljeks on x-telg ning parabool läbib punkti $(4; -2)$,
2) sümmeetriateljeks on y-telg ning parabool läbib punkti $(-4; -2)$.

1238. Näita, et kui parabooli haripunkt on punktis $(h; k)$ ja parabooli sümmeetriatelg on horisontaalne, siis on parabooli võrrandil kuju $x = a(y - k)^2 + h$, kus a on nullist erinev konstant. Kuhu avaneb parabool, kui $a > 0$; kuhu kui $a < 0$?

1239. Sirglõiku, mis läbib fookust ja on risti parabooli sümmeetriateljega, ning mille otspunktid on parabooli haaradel, nimetatakse **fokaallaiuseks** e. *parabooli ava laiuseks fookuse kohal*. Parabooli võrrand olgu $x^2 = 2py$. Leia parabooli fokaallaius.

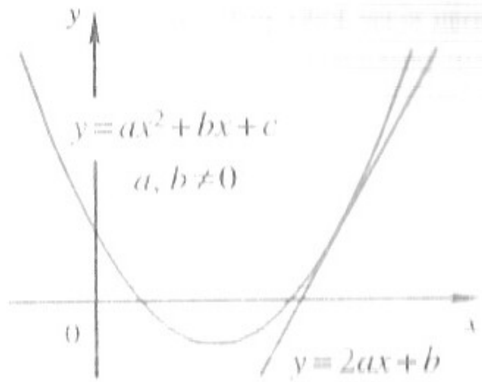
1240. Leia 24 m pikkuse silla kaare kõrgus, kui kaarel on parabooli kuju, mille võrrand on $x^2 = -48y$.

1241. Projektori peegli ristlõige on parabool. Leia fookuse asukoht, kui peegli diameeter on 60 cm ja sügavus 30 cm.

1242. Heidetud oda maandus 80 m kaugusele. Leia oda trajektoori võrrand, kui oda suurim kõrgus maapinnast oli 25 m. Eeldame, et oda liikumine on ligikaudselt kirjeldatav parabooli võrrandiga.

1243. Leia ringjoone võrrand, kui ringjoone keskpunkt on koordinaatide alguses ja ringjoon läbib joonte $y^2 = 4x$ ja $x^2 = 4y$ lõikepunkti.

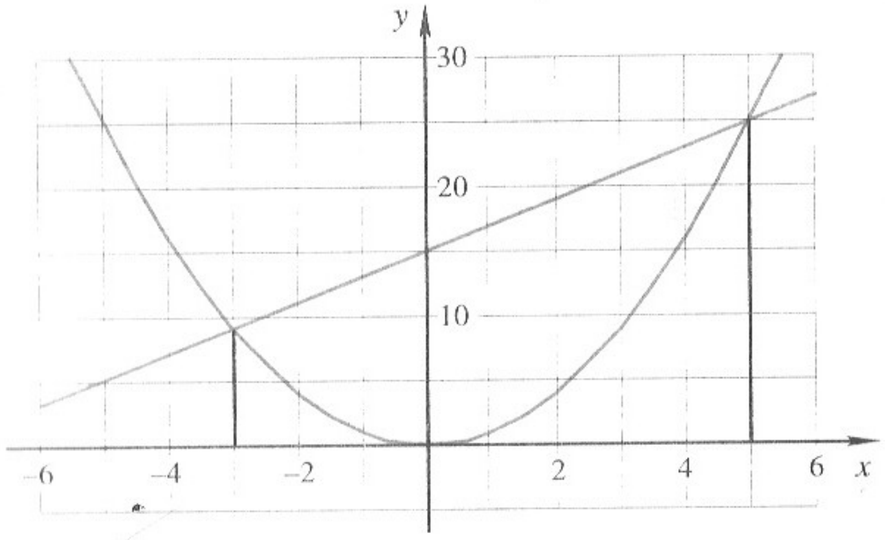
1244. Selgita, miks joonisel esitatud olukord ei ole võimalik.



1245. Selgita, kuidas sõltub parabooli $y^2 = 2px$ kuju parameetrist p.

1246. Parabooli, mille haripunkt punktis $(h; k)$ ja fookus on punktis $(h + r; k)$, juhtjoone võrrandiks on $x = h - r$. Näita, et parabooli võrrand on $x = \frac{1}{4r}(y - k)^2 + h$.

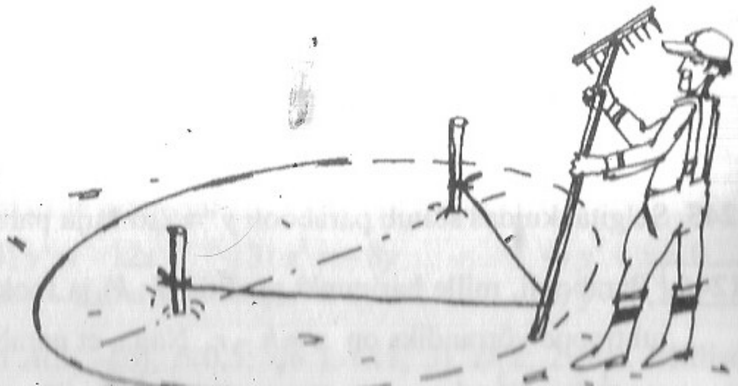
1247. „Korrutamismašin": joonesta millimeetripaberile parabool $y = x^2$. Olgu antud positiivsed arvud a ja b. Märgime paraboolil ära need punktid, mille x-koordinaadid võrduvad arvudega $(-a)$ ja b. Ühendame need punktid sirgjoonega. See sirgjoon lõikab y-telge punktis $(0; ab)$. Seega, selle sirge algordinaat ongi arvude a ja b korrutis. Selle tõestamiseks leia sellise sirge võrrand, mis läbib punkte $(-a; a^2)$ ja $(b; b^2)$.



Lisaks põhikursusele

6.21. ELLIPS. ELLIPSI KANOONILINE VÕRRAND

Aednikul on vaja rajada ovaalne lillepeenar. Kuidas seda teha? Aednik torkab maa sisse kaks pulka ja kinnitab pulkade külge nööri, mille pikkus on suurem, kui pulkade vaheline kaugus. Kolmanda pulga abil tõmbab ta nööri pingule ja liigutab seda nii, kuis pingul olev nöör lubab. Jälg, mille joonistab selle pulga ots, on ovaalne. Matemaatikud kutsuvad niiviisi saadud ovaalse kujuga joont *ellipsiks*.



Kuna nööri pikkus ellipsi joonestamisel ei muutu, siis on sellise joone korral joone suvalise punkti kauguste summa neist kahest fikseeritud punktist jääv suurus.

$F_1P + F_2P = \text{const}$

Ellipsiks **nimetatakse niisugust punktihulka tasandil, kus iga punkti kaugused kahest kindlast punktist annavad jääva suurusega summa.**

Neid kindlaid punkte nimetatakse ellipsi **fookusteks** ja neid kaugusi ellipsi **fokaalkaugusteks**.

Olgu meil ellipsi fookused punktides $F_1(-4; 0)$ ja $F_2(4; 0)$. Fokaalkauguste summa (nööri pikkus) olgu 10. Leiame selle ellipsi võrrandi.

$$F_1P + F_2P = 10$$

$$\sqrt{(x+4)^2 + (y-0)^2} + \sqrt{(x-4)^2 + (y-0)^2} = 10$$

$$\sqrt{(x+4)^2 + y^2} = 10 - \sqrt{(x-4)^2 + y^2}$$

Tõstame mõlemad pooled ruutu ja lihtsustame:

$$(x+4)^2 + y^2 = 100 - 20\sqrt{(x-4)^2 + y^2} + (x-4)^2 + y^2$$

$$20\sqrt{(x-4)^2 + y^2} = 100 + (x-4)^2 - (x+4)^2$$

$$20\sqrt{(x-4)^2 + y^2} = 100 - 16x$$

$$5\sqrt{(x-4)^2 + y^2} = 25 - 4x.$$

Tõstame veel kord ruutu ja lihtsustame:

$$25(x^2 - 8x + 16 + y^2) = 625 - 200x + 16x^2$$

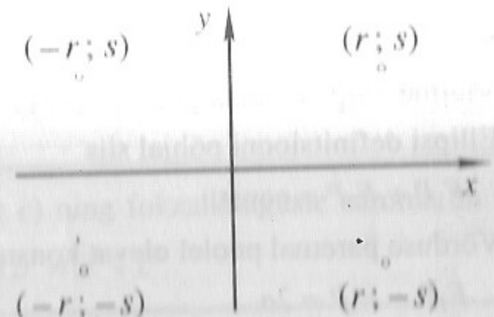
$$9x^2 + 25y^2 = 225 \quad | : 225$$

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1.$$

Selleks, et skitseerida selle joone graafikut, ei pea ilmtingimata kinnitama kahte nööpnõela joonestusploki lehele 8 cm kaugusele teineteisest (fookustevaheline kaugus!) ja ühendama need nõelad 10 cm pikkuse niidiga. On ka teine võimalus.

Vaatame võrrandit $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$. (1)

1) Kui mingi punkt $(r; s)$ rahuldab võrrandit, siis $\frac{r^2}{25} + \frac{s^2}{9} = 1$. Et $r^2 = (-r^2)$ ja $s^2 = (-s^2)$, siis ka punktid $(-r; -s)$, $(r; -s)$ ja $(-r; s)$ rahuldavad seda võrrandit. Seega, see joon on sümmeetriline nii koordinaatide alguspunkti kui ka x-telje ja y-telje suhtes.



2) Asendame y nulliga, saame $\frac{x^2}{25}=1 \Rightarrow x^2=25 \Rightarrow x=\pm 5$. Ellips lõikab x-telge punktides $x=5$ ja $x=-5$.

3) Asendame x nulliga, saame $\frac{y^2}{9}=1 \Rightarrow y^2=9 \Rightarrow y=\pm 3$. Ellips lõikab y-telge punktides $y=3$ ja $y=-3$.

4) Avaldame võrrandist y ja x-i:
$y=\pm\frac{3}{5}\sqrt{25-x^2}$ ja $x=\pm\frac{5}{3}\sqrt{9-y^2}$.

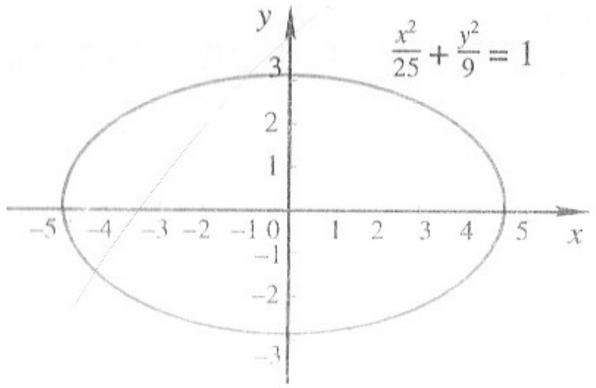
Viimastest võrdustest näeme, et y on reaalarv ainult siis, kui $|x| \le 5$, ja x on reaalarv ainult siis, kui $|y| \le 3$.

Seega, see ellips paikneb ristkülikus, mis on piiratud sirgetega $x=5$, $x=-5$, $y=3$, $y=-3$.

Seda informatsiooni arvestades koostame ellipsi joonestamiseks tabeli, kus juures y väärtused esitame kümnendiku täpsusega.

x	0	1	2	3	4	5
y	3	2,9	2,7	2,4	1,8	0

Märkinud need punktid teljestikku ja lisanud neile sümmeetrilised punktid üle-jäänud veeranditest, saame järgmise joonise:



Ellipsi kanoonilise võrrandi tuletamiseks valitakse fookuste asukohad x-teljel ja nimelt nii, et nad paikneksid sümmeetriliselt y-telje suhtes. Fookustevaheline kaugus olgu $2c$. Seega on fookuste koordinaadid $F_1(-c;\,0)$ ja $F_2(c;\,0)$.

Valime ellipsil vabalt punkti $P(x;\,y)$.

Ellipsi definitsiooni põhjal siis

$F_1P + F_2P = \text{const}$.

Võrduse paremal poolel olevat konstanti tähistame $2a$-ga. Seega

$F_1P + F_2P = 2a$.

Kasutades lõigu pikkuse valemit, saame

$$\sqrt{(x+c)^2+(y-0)^2}+\sqrt{(x-c)^2+(y-0)^2}=2a$$

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a-\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

Tõstame mõlemad pooled ruutu ja lihtsustame:

$$(x+c)^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+(x-c)^2+y^2$$

$$4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}=4a^2+(x-c)^2-(x+c)^2$$

$$4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}=4a^2-4cx$$

$$a\sqrt{(x-c)^2+y^2}=a^2-cx.$$

Tõstame veel kord ruutu ja lihtsustame:

$$a^2[(x-c)^2+y^2]=a^4-2a^2xc+x^2c^2$$

$$a^2x^2-2a^2xc+a^2c^2+a^2y^2=a^4-2a^2xc+x^2c^2$$

$$a^2x^2-x^2c^2+a^2y^2=a^4-a^2c^2$$

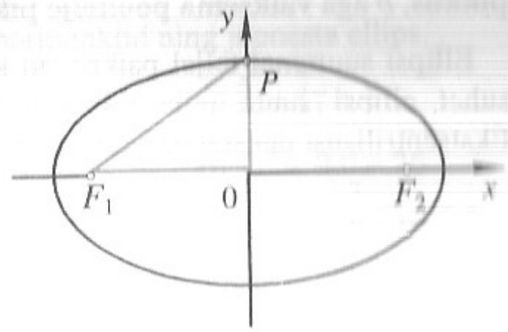
$$(a^2-c^2)x^2+a^2y^2=a^2(a^2-c^2)\ \ |:a^2(a^2-c^2)$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-c^2}=1.$$

Saadud võrrand ongi ellipsi võrrand. Uurime nimetajat (a^2-c^2). Juhul, kui ellipsil valult valitud punkt asub y-teljel, siis saame täisnurksest kolmnurgast F_1OP, kus $F_1O=c$ ja $F_1P=\frac{2a}{2}$. Pythagorase teoreemi põhjal, et $F_1P^2-F_1O^2=a^2-c^2$. Seega, vahe a^2-c^2 esitab ellipsi y-telglõigu ruutu. Edaspidi tähistame seda vahet b^2-ga.

Seega $b^2=a^2-c^2$ ja ellipsi võrrand esitub siis kujul

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$



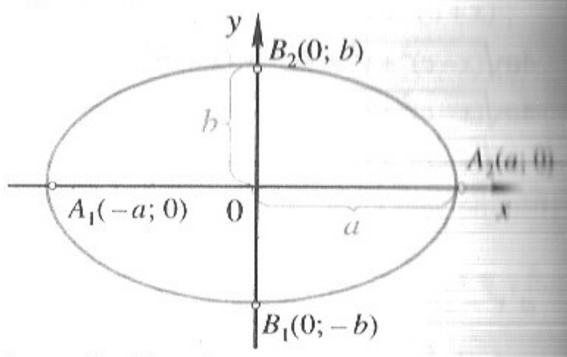
Kui ellipsi fookused on $F_1(-c;\,0)$ ja $F_2(c;\,0)$ ning fokaalkauguste summa on $2a$, siis on ellipsi võrrandiks $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, kus $b^2=a^2-c^2$.

Ellipsi fookused võivad muidugi olla ka y-teljel. Analoogiliselt ülaltooduga saadakse siis järgmine tulemus:

Kui ellipsi fookused on $F_1(0;\,-c)$ ja $F_2(0;\,c)$ ning fokaalkauguste summa on $2a$, siis on ellipsi võrrandiks $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$, kus $b^2=a^2-c^2$.

Olgu ellipsi võrrand $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, s.t. vaatleme ellipsit, mille fookused on x-teljel. Leiame punktid, kus see ellips lõikab x-telge ja y-telge. Lõikepunktid x-teljega tekivad siis, kui $y=0$; siis $\frac{x^2}{a^2}=1 \Rightarrow x^2=a^2 \Rightarrow x=\pm a$.

Seega lõikepunktid x-teljega on $(-a;\,0)$ ja $(a;\,0)$.



Lõikepunktid y-teljega tekivad siis, kui $x=0$, siis

$\frac{y^2}{b^2}=1 \Rightarrow y^2=b^2 \Rightarrow y=\pm b$.

Seega, lõikepunktid y-teljega on $(0;\,-b)$ ja $(0;\,b)$.

Punkte, kus see ellips lõikab koordinaattelgi $A_1(-a;\,0)$, $A_2(a;\,0)$, $B_1(0;\,-b)$ ja $B_2(0;\,b)$, nimetatakse ellipsi **haripunktideks**.

Sirglõike $A_1A_2=2a$ ja $B_1B_2=2b$ nimetatakse ellipsi **telgedeks**.

Arvud a ja b on ellipsi **pooltelgede pikkused**. Neist a on **suurema poolte pikkus**, b aga **väiksema pooltelje pikkus**.[1]

Ellipsi suuremal teljel paiknevad ka fookused. Ellipsi fookuste vahekauguse suhet ellipsi suure telje pikkusesse nimetatakse **ellipsi ekstsentrilisuseks**. Ekstsentrilisust tähistatakse tähega e.

$$e=\frac{2c}{2a}=\frac{c}{a}.$$

Et ellipsi puhul on alati $c<a$, siis $e<1$.

Ellipsi ekstsentrilisus on alati väiksem ühest.

Kui ekstsentrilisus e läheneb 1-le, siis $c\to a$, seega $b=\sqrt{a^2-c^2}\to 0$. Seega, mida suurem on ellipsi ekstsentrilisus, seda lamedam on ellips.

Kui aga $e\to 0$, siis $c\to 0$ ja $b=\sqrt{a^2-c^2}\to a$.

Kui $b\to a$, siis võrrandist $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ saame võrrandi $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$, mida korrutades a^2-ga saame ringjoone $x^2+y^2=a^2$ võrrandi.

Seega, *ellips ekstsentrilisusega null on ringjoon.*

[1] NB! Ellipsi pooltelged defineeritakse nii, et alati on suurema pooltelje tähiseks a ja väiksema b. Põhjuseks on see, et ellipsi võrrandis on mõlemal juhtumil (fookused x-teljel või y-teljel) arv $b^2=a^2-c^2$. Seepärast on ka $a>b$.

Näide 1. Joonistame ellipsi $4x^2+y^2=4$ ja leiame tema fookused. Kanoonilisele kujule viimiseks jagame 4-ga.

$\frac{x^2}{1}+\frac{y^2}{4}=1$.

Näeme, et

1) ellips on sümmeetriline mõlema telje ja teljestiku alguspunkti suhtes;

2) lõikepunktid x-teljega on $(-1;\,0)$ ja $(1;\,0)$, y-teljega $(0;\,-2)$ ja $(0;\,2)$;

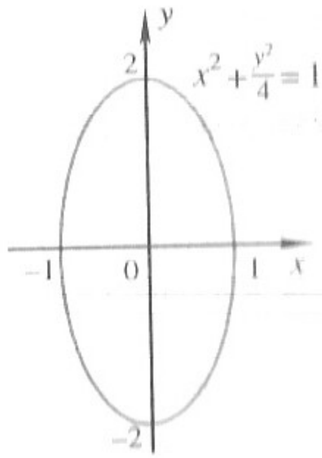
3) $x=\pm\frac{1}{2}\sqrt{1-y^2}$ ja $x=\pm\frac{1}{2}\sqrt{4-y^2}$, siis $|x|\le 1$ ja $|y|\le 2$. Teeme ellipsi joonestamiseks tabeli:

x	0	0,25	0,5	0,75	0,9	1
y	2	1,9	1,7	1,3	0,9	0

4) võrrandi $\frac{x^2}{1}+\frac{y^2}{4}=1$ jaoks $a^2=4$ ja $b^2=1$.

Seega paiknevad fookused y-teljel.

$c^2=a^2-b^2$ ja $c^2=4-1=3 \Rightarrow c=\sqrt{3}$. Seega on fookused $F_1(0;\,-\sqrt{3})$ ja $F_2(0;\,\sqrt{3})$.



1348. Leia ellipsi fookused, pooltelged ja haripunktid ning joonesta ellips.

1) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ 2) $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{1}=1$ 3) $\frac{x^2}{49}+\frac{y^2}{81}=1$

4) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{36}=1$ 5) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{25}=1$ 6) $4x^2+9y^2=36$

7) $4x^2+y^2=16$ 8) $25x^2+9y^2=36$ 9) $4x^2+y^2=1$

1349. Leia ellipsi võrrand, kui on antud fookuste asukohad ja fokaalkauguste summa.

1) $(-3;\,0)$, $(3;\,0)$; 10; 2) $(0;\,-4)$, $(0;\,4)$; 12; 3) $(0;\,-5)$, $(0;\,5)$; 14.

1350. Leia ellipsi võrrand, kui on antud

1) pikem telg 10, fookused $(4;\,0)$ ja $(-4;\,0)$;

2) pikem telg 8, fookused $(2;\,0)$ ja $(-2;\,0)$;

3) lühem telg 6, fookused $(3;\,0)$ ja $(-3;\,0)$;

4) lühem telg 8, fookused $(2\sqrt{6};\,0)$ ja $(-2\sqrt{6};\,0)$;

5) haripunktid $(5;\,0)$ ja $(-5;\,0)$, lühem pooltelg 3;

6) haripunkt $(6;\,0)$, keskpunkt $(0;\,0)$ ja fookus $(-4;\,0)$;

7) ekstsentrilisus $\frac{1}{2}$, fookustevaheline kaugus 1, keskpunkt $(0;\,0)$;

8) haripunktid (10; 0) ja (−10; 0), ekstsentrilisus $\frac{2}{5}$;

9) haripunktid (4; 0) ja (−4; 0) ja ellips läbib punkti $(2\sqrt{2}; -1)$;

10) haripunktid (0; 3) ja (0; −3) ja ellips läbib punkti (−2; −1).

1251. Ellipsi keskpunkt on koordinaatide alguses ja fookused on x-teljel.

1) Leia ellipsi võrrand, kui suur- ja väiketelje vahe on 10 ning nende suhe on 2.

2) Leia ellipsi võrrand, kui suurtelg on 16 ja ekstsentrilisus $\frac{1}{2}$.

3) Leia ellipsi võrrand, kui väiketelg on 14 ja ekstsentrilisus $\frac{3}{4}$.

4) Leia ellipsi võrrand, kui telgede summa on 16 ja fookustevaheline kaugus 8.

1252. Arvuta ellipsi $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{16} = 1$ kõõlu pikkus, kui kõõl läbib fookuse ja on risti ellipsi suurteljega.

1253. Leia ellipsi $4x^2 + 9y^2 - 180 = 0$ ekstsentrilisus.

1254. Kui ellipsi keskpunkt ei ole koordinaatide alguspunktis, vaid punktis $(h; k)$, siis

a) juhul, kui fookused paiknevad sirgel $y = k$, on ellipsi võrrandiks

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1;$$

b) juhul, kui fookused paiknevad sirgel $x = h$, on ellipsi võrrandiks

$$\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1;$$

Joonesta järgmised ellipsid:

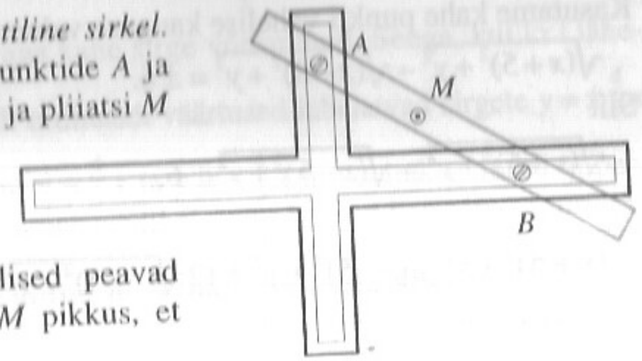
1) $\frac{(x-5)^2}{25} + \frac{(y-3)^2}{9} = 1$ 2) $\frac{x^2}{1} + \frac{(y-2)^2}{16} = 1$.

1255. Ellipsi fokaalparameeter defineeritakse järgmiselt: $p = \frac{b^2}{a}$. Näita, et ellipsi kahekordne parameeter annab fookust läbiva ja ellipsi suurteljega risti oleva kõõlu pikkuse. Seda lõiku nimetatakse ka ellipsi ava laiuseks fookuse kohal ehk *fokaallaiuseks*.

1256. Maa tiirleb ümber Päikese elliptilisel orbiidil, mille ühes fookuses asub Päike. Maa suurim kaugus Päikesest (afeel) on 152 miljonit km ja vähim kaugus (periheel) on 147 miljonit km. Arvuta Maa orbiidi ekstsentrilisus.

1257. Tehiskaaslane tiirleb ümber Maa elliptilisel orbiidil, mille üks fookus asub maakera keskpunktis. Tehiskaaslase suurim kaugus Maa pinnast (apogee) on 2500 km ja vähim kaugus (perigee) on 410 km. Arvuta tehiskaaslase orbiidi ekstsentrilisus.

1258. Joonisel on kujutatud *elliptiline sirkel*. Kruvide abil saab muuta punktide A ja B vahelise lõigu pikkust l ja pliiatsi M asukohta lõigul AB. Millised peavad olema lõigu l ja lõigu AM pikkus, et joonestada ellipsid:



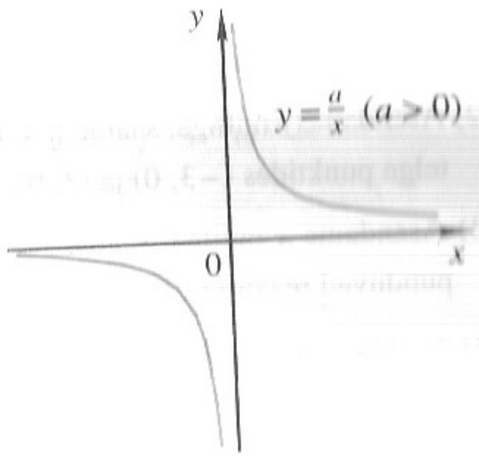
a) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$; b) $\frac{x^2}{16} + y^2 = 1$; c) $x^2 + y^2 = 25$?

Juhul kui koolis ei ole elliptilist sirklit, võiksid noormehed proovida see ise valmis teha.

Lisaks põhikursusele

8.22. HÜPERBOOL. HÜPERBOOLI KANOONILINE VÕRRAND

Varemõpitust on teada, et pöördvõrdelise sense $y = \frac{a}{x}$ graafikuks on hüperbool. Siinkohal esitame üldisema käsitluse hüperboolidest.



Hüperbooliks nimetatakse niisugust punktihulka tasandil, kus iga punkti kaugused kahest kindlast punktist annavad jääva suurusega vahe.

Neid kindlaid punkte nimetatakse hüperbooli **fookusteks** ja neid kaugusi hüperbooli **fokaalkaugusteks**.

Olgu hüperbooli fookused punktides $F_1(-5; 0)$ ja $F_2(5; 0)$ ning fokaalkauguste vahe 6. Leiame selle hüperbooli võrrandi ja joonestame graafiku. Tähistame hüperboolil oleva vabalt valitud punkti $P(x; y)$. Kui iga hüperbooli punkti korral on fokaalkauguste vahe 6, siis kehtib üks kahest võrdusest:

$F_1P - F_2P = 6$

või

$F_2P - F_1P = 6$.

Kirjapaneku lühendamise huvides vaatleme neid võrdusi koos, tehes seda järgmiselt:

$F_1P - F_2P = \pm 6$.

Kasutame kahe punkti vahelise kauguse valemit:

$$\sqrt{(x+5)^2+y^2}-\sqrt{(x-5)^2+y^2}=\pm 6.$$

Siit

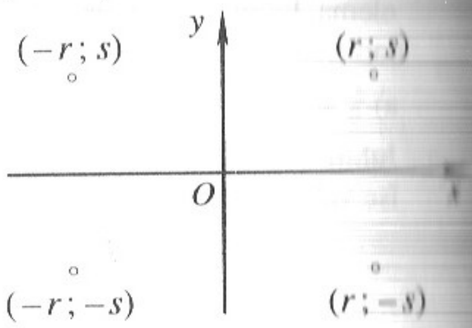
$$\sqrt{(x+5)^2+y^2}=\sqrt{(x-5)^2+y^2}\pm 6.$$

Tõstame mõlemad pooled ruutu ja lihtsustame.

$$(x+5)^2+y^2=(x-5)^2+y^2\pm 12\sqrt{(x-5)^2+y^2}+36,$$

$$20x-36=\pm 12\sqrt{(x-5)^2+y^2},$$

$$5x-9=\pm 3\sqrt{(x-5)^2+y^2}.$$



Tõstame veel kord ruutu ja lihtsustame:

$$25x^2-90x+81=9[(x-5)^2+y^2];$$

$$16x^2-9y^2=144 \quad 1:144$$

$$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1.$$

See ongi otsitava hüperbooli võrrand.

Graafiku joonestamiseks paneme tähele järgmist.

1) Kui mingi punkt $(r; s)$ rahuldab võrrandit, siis $\frac{r^2}{9}-\frac{s^2}{16}=1$. Et $r^2=(-r)^2$ ja $s^2=(-s)^2$, siis ka punktid $(-r; -s)$, $(r; -s)$ ja $(-r; s)$ rahuldavad seda võrrandit. Seega, see joon on sümmeetriline nii koordinaatide alguspunkti kui ka x-telje ja y-telje suhtes.

2) Asendame y nulliga, saame $\frac{x^2}{9}=1 \Rightarrow x^2=9 \Rightarrow x=\pm 3$. Hüperbool lõikab x-telge punktides $(-3; 0)$ ja $(3; 0)$.

3) Asendame x nulliga, saame $-\frac{y^2}{16}=1 \Rightarrow y^2=-16$. Seega $x=0$ korral y-i puuduvad reaalsed väärtused. Seega hüperbool ei lõiku x-teljega.

4) Avaldame võrrandist $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$ y ja x-i:

$y=\pm\frac{4}{3}\sqrt{x^2-9}$ ja $x=\pm\frac{3}{4}\sqrt{y^2+16}$.

Neist valemeist näeme, et y on reaalarv ainult siis, kui $|x|\geqslant 3$. Seega, hüperbooli graafiku ükski punkt ei paikne ribas, mis on sirgete $x=3$ ja $x=-3$ vahel.

5) Et $y=\pm\frac{4}{3}\sqrt{x^2-9}$ ja $|x|\geqslant 3$, siis määrame kindlaks, mis juhtub y-ga, kui $|x|$ hakkab suurenema.

Selleks esitame valemi $y=\pm\frac{4}{3}\sqrt{x^2-9}$ kujul $y=\pm\frac{4}{3}|x|\sqrt{1-\frac{9}{x^2}}$. Kui $|x|$ suureneb, siis hakkab $\frac{9}{x^2}$ väärtus järjest vähenema. Siis $\sqrt{1-\frac{9}{x^2}}$ väärtus läheneb 1-le ja y väärtus läheneb $\pm\frac{4}{3}x$-le.

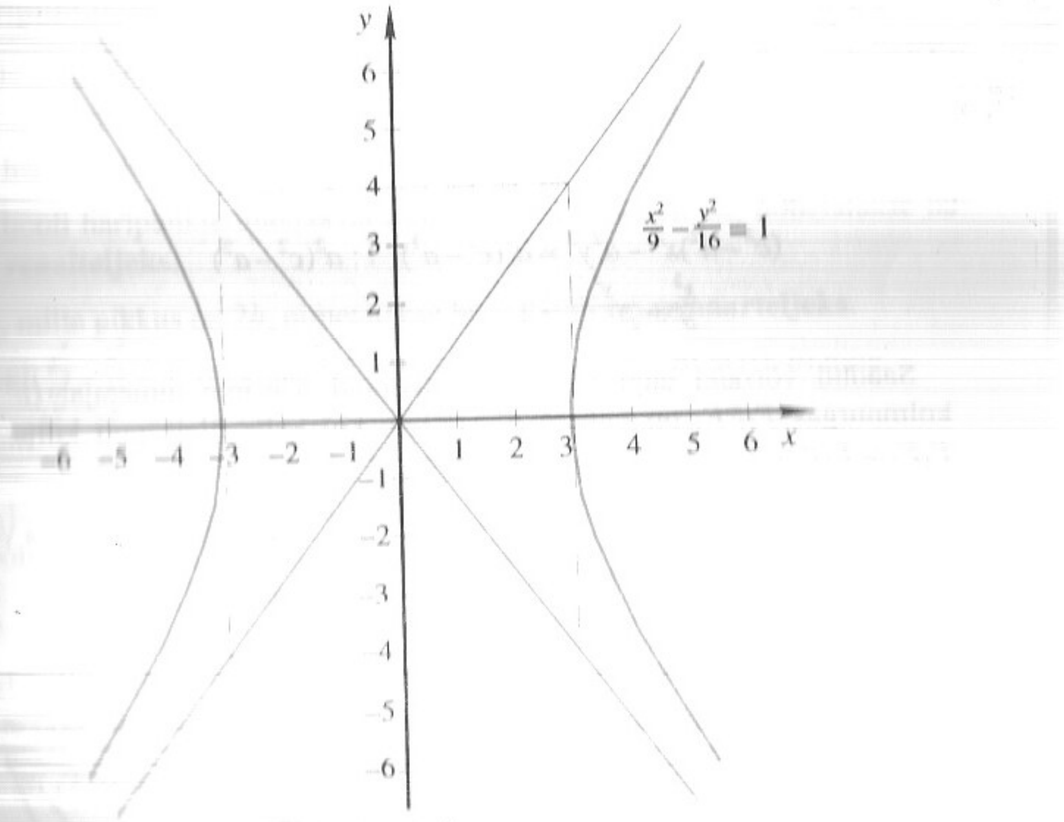
Võrrandid $y=\pm\frac{4}{3}x$ kujutavad aga kahe sirge võrrandeid. Seega, kui $|x|$ läheneb lõpmatusele, siis hüperbooli ordinaadi väärtused lähenevad sirgete $y=\pm\frac{4}{3}x$ ordinaadi väärtustele. Jooni $y=\frac{4}{3}x$ ja $y=-\frac{4}{3}x$ nimetatakse antud hüperbooli *asümptootideks*.

Asümptoot on sirgjoon, millele antud joon tõkestamatult läheneb.

Hüperbooli joonestamiseks arvutame valemi $y=\pm\frac{4}{3}\sqrt{x^2-9}$ abil mõned y väärtused kümnendiku täpsusega. Piisab, kui seda teha ainult I veerandi punktide korral.

x	3	3,5	4	4,5	5	6
y	0	2,4	3,5	4,5	5,3	6,9

Märgime need punktid teljestikku ja lisanud neile sümmeetrilised punktid ülejäänud veerandites, saame järgmise joonise:



Samasse teljestikku hüperbooliga $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$ on joonestatud ristkülik, mille külgedeks on sirged $x=3$, $x=-3$, $y=4$ ja $y=-4$. Selle ristküliku diagonaalide pikendamisel saame asümptoodid $y=\frac{4}{3}x$ ja $y=-\frac{4}{3}x$.

Hüperbooli kanoonilise võrrandi tuletamiseks valitakse fookuste asukohad x-teljel nii, et nad asetseksid sümmeetriliselt y-telje suhtes. Fookustevaheline kaugus olgu $2c$. Seega on fookuste koordinaadid $F_1(-c; 0)$ ja $F_2(c; 0)$.

Valime hüperboolil vabalt punkti $P(x; y)$. Hüperbooli definitsiooni põhjal siis

$F_1P - F_2P = \text{const}$.

Võrduse paremal poolel olevat konstanti tähistame $2a$-ga. Seega

$F_1P - F_2P = \pm 2a$.

Kasutades lõigu pikkuse valemit, saame:

$$\sqrt{(x+c)^2+(y-0)^2} - \sqrt{(x-c)^2+(y-0)^2} = \pm 2a$$

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} = \pm 2a + \sqrt{(x-c)^2+y^2}.$$

Tõstame mõlemad pooled ruutu ja lihtsustame:

$$(x+c)^2+y^2 = 4a^2 \pm 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} + (x-c)^2+y^2$$

$$\pm 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} = 4a^2 + (x-c)^2 - (x+c)^2$$

$$\pm 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} = 4a^2 - 4cx$$

$$\pm a\sqrt{(x-c)^2+y^2} = a^2 - cx$$

Tõstame veel kord ruutu ja lihtsustame:

$$a^2[(x-c)^2+y^2] = a^4 - 2a^2xc + x^2c^2$$

$$a^2x^2 - 2a^2xc + a^2c^2 + a^2y^2 = a^4 - 2a^2xc + x^2c^2$$

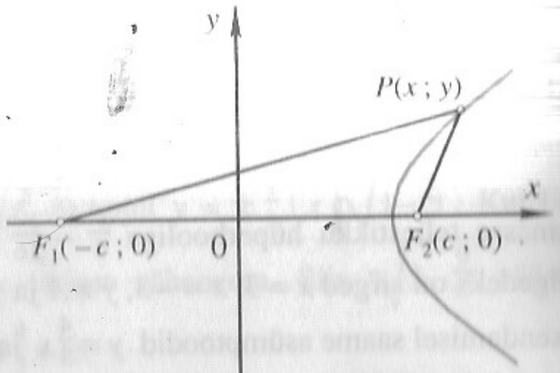
$$a^2x^2 - x^2c^2 + a^2y^2 = a^4 - a^2c^2 \quad |\cdot(-1)$$

$$(c^2-a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2-a^2) \quad |:a^2(c^2-a^2)$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{c^2-a^2} = 1$$

Saadud võrrand ongi hüperbooli võrrand. Uurime nimetajat $(c^2 - a^2)$. Et kolmnurgas F_1PF_2 on külg F_1F_2 suurem kui kahe ülejäänud külje vahe, siis $F_1F_2 > F_1P - F_2P$ ehk $2c > 2a$.

Seega $c > a \Rightarrow c^2 > a^2$ ja $c^2 - a^2 > 0$. Et vahe $c^2 - a^2$ on positiivne, siis võime seda tähistada b^2-ga. Saame hüperbooli võrrandiks $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.



Kui hüperbooli fookused on $F_1(-c; 0)$ ja $F_2(c; 0)$ ning fokaalkauguste vahe on $2a$, siis on hüperbooli võrrandiks $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, kus $b^2 = c^2 - a^2$.

Asümptootide võrrandid on $y = \frac{b}{a}x$ ja $y = -\frac{b}{a}x$.

Hüperbooli fookused võivad muidugi olla ka y-teljel. Analoogiliselt ülaltooduga tuletatakse siis järgmine tulemus:

Kui hüperbooli fookused on $F_1(0; -c)$ ja $F_2(0; c)$ ning fokaalkauguste vahe on $2a$, siis on hüperbooli võrrandiks $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$, kus $b^2 = c^2 - a^2$.

Asümptootide võrrandid on $y = \frac{a}{b}x$ ja $y = -\frac{a}{b}x$.

Hüperboolil, mille võrrand on $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ning mille fookused on x-teljel, on kaks lõikepunkti x-teljega, punktid $(-a; 0)$ ja $(a; 0)$. Neid punkte nimetatakse hüperbooli **haripunktideks**.

Hüperboolil, mille võrrand on $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$, ning mille fookused on y-teljel, on kaks lõikepunkti y-teljega, punktid $(0; -a)$ ja $(0; a)$. Need punktid on selle hüperbooli haripunktid.

Hüperbooli haripunkte ühendavat lõiku, mille pikkus on $2a$, nimetatakse hüperbooli **reaalteljeks**.

Lõiku, mille pikkus on $2b$, nimetatakse hüperbooli **imaginaarteljeks**.

Hüperbooli $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ imaginaartelg ühendab punkte $(0; -b)$ ja $(0; b)$ ning hüperbooli $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$ imaginaartelg punkte $(-b; 0)$ ja $(b; 0)$.

Hüperbooli fookustevahelise kauguse suhet reaaltelje pikkusesse nimetatakse hüperbooli **ekstsentrilisuseks**. Ekstsentrilisust tähistame e tähega:

$$e = \frac{2c}{2a} = \frac{c}{a}$$

Et hüperbooli korral $c^2 = a^2 + b^2$, siis võib selle valemi kirjutada kujul $e = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}$.

Et hüperbooli puhul on alati $c > a$, siis $e > 1$. Niisiis:

hüperbooli ekstsentrilisus on alati suurem kui üks.

Näide 1. Joonestame hüperbooli $y^2 = 4x^2 + 16$.

$y^2 - 4x^2 = 16 \quad |:(16)$ saame $\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{4} = 1$

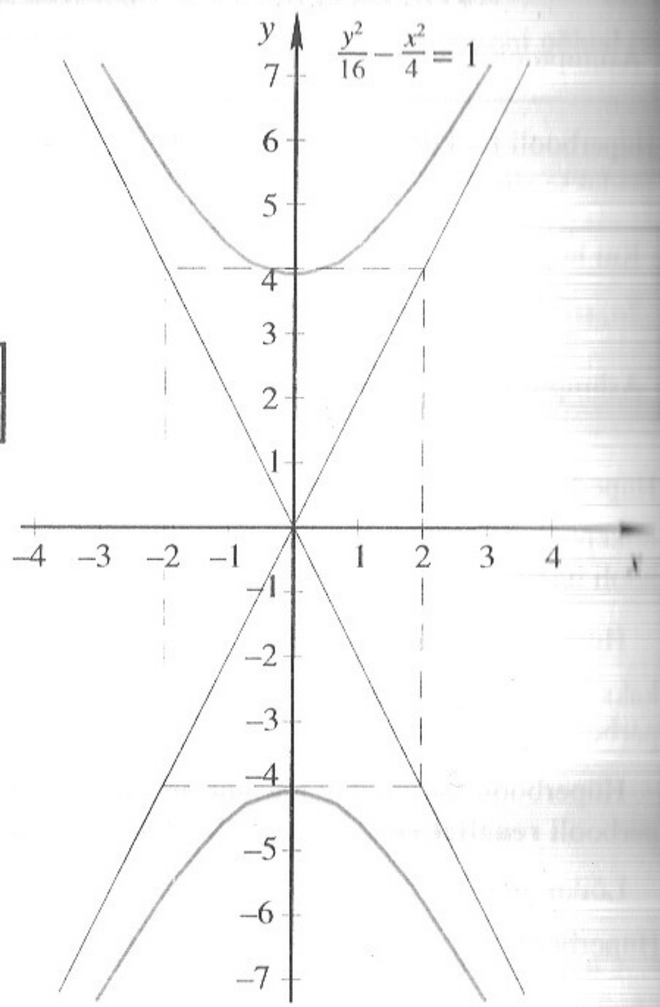
1) Joonis on sümmeetriline mõlema telje suhtes.
2) Graafik lõikub y-teljega punktides $(0; -4)$ ja $(0; 4)$.
3) Graafik ei lõiku x-teljega.

4) Avaldame x ja y, saame: $y = \pm 2\sqrt{x^2+4}$, $x = \pm\frac{1}{2}\sqrt{y^2-16}$. Siit näeme, et x on reaalarv ainult siis, kui $|y| \geq 4$.

5) Asümptoodid on $y = 2x$ ja $y = -2x$.

6) Koostame tabeli hüperbooli sellele osale, mis jääb I veerandisse. Tulemused esitame kümnendiku täpsusega.

x	0	1	2	3
y	4	4,5	5,7	7,2



1259. Leia hüperbooli fookused ja haripunktid. Kirjuta välja asümptootide võrrandid ja joonesta hüperbooli graafik. Leia hüperboolide ekstsentrilisused.

1) $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ 2) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$ 3) $\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{9} = 1$

4) $\frac{y^2}{1} - \frac{x^2}{4} = 1$ 5) $\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{4} = 1$ 6) $4x^2 - y^2 = 4$

7) $49x^2 - 100y^2 = 4900$ 8) $y^2 - 3x^2 = 27$ 9) $y^2 - 4x^2 = 4$

10) $16x^2 = 144 + 9y^2$ 11) $40y^2 = 9x^2 + 360$ 12) $9x^2 - 100y^2 + 900 = 0$

1260. Leia hüperbooli võrrand, kui on antud fookuste asukohad ja fokaalkauguste vahe.

1) (0; –5) ja (0; 5); $2a = 6$ 2) (–3; 0) ja (3; 0), $2a = 4$

3) (0; –6) ja (0; 6); $2a = 4$ 4) (–4; 0) ja (4; 0); $2a = 6$

1261. Hüperbooli keskpunkt on koordinaatide alguspunktis. Leia hüperbooli võrrand, kui

1) fookused on (0; – 10) ja (0; 10) ja haripunktid (0; – 8) ja (0; 8);

2) reaalpooltelg 12 ja imaginaarpooltelg 5; fookused x-teljel;

3) reaaltelg 8, fookuste vahekaugus 10; fookused x-teljel;

4) reaalpooltelg 12 ja imaginaarpooltelg 5; fookused y-teljel;

5) reaaltelg 8, fookuste vahekaugus 10; fookused y-teljel;

6) imaginaartelg 8, fookuste vahekaugus 30; fookused x-teljel;

7) haripunktid (4; 0) ja (–4, 0); asümptoodid $y = \frac{1}{2}x$ ja $y = -\frac{1}{2}x$;

8) ekstsentrilisus $\frac{3}{2}$; fookus (–6; 0);

9) haripunkt (6; 0); ekstsentrilisus $\sqrt{2}$;

10) imaginaarse pooltelje otspunkt (0; 3); ekstsentrilisus 2;

11) fookused (4; 0) ja (–4; 0); asümptootide tõusud 3 ja –3;

12) haripunktid (8; 0) ja (–8; 0); asümptootide tõusud $\frac{3}{4}$ ja $-\frac{3}{4}$;

13) läbib punkte (7; 4) ja (–2; –1), fookused x-teljel;

14) läbib punkte (7; 10) ja (–1; 2), fookused y-teljel.

1262. Näita, et ellipsil $9x^2 + 25y^2 = 225$ ja hüperboolil $3x^2 - y^2 = 12$ on samad fookused.

1263. Hüperbooli fokaalparameeter defineeritakse järgmiselt: $p = \frac{b^2}{a}$. Tõesta, et hüperbooli kahekordne fokaalparameeter annab fookust läbiva ja hüperbooli reaalteljega risti oleva kõõlu pikkuse. Seda lõiku nimetatakse ka hüperbooli ava laiuseks fookuse kohal ehk *fokaallaiuseks*.

1264. Leia hüperbooli võrrand, kui ta fokaallaius on 6, ekstsentrilisus 2 ning keskpunkt on koordinaatide alguses. Fookused on x-teljel.

1265. Näita, et hüperboolidel $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ja $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$ on ühised asümptoodid. Niisugust kaht hüperbooli nimetatakse teineteise **kaashüperboolideks**.

1266. Võrdsete telgedega hüperbooli nimetatakse ***risthüperblooliks***. Vahel kasutatakse ka võrdhaarse hüperbooli mõistet. Näita, et:

1) risthüperbooli võrrand esitub kujul $x^2 - y^2 = a^2$;

2) risthüperbooli asümptoodid on teineteisega risti.

1267. Leia risthüperbooli võrrand, kui ta fookused on (7; 0) ja (–7; 0).

1268. Joonesta hüperbooli $x^2 - y^2 = 2$ ja pöördvõrdelise seose $y = \frac{1}{x}$ graafikud. Mida märkad?

Lisaks põhikursusele

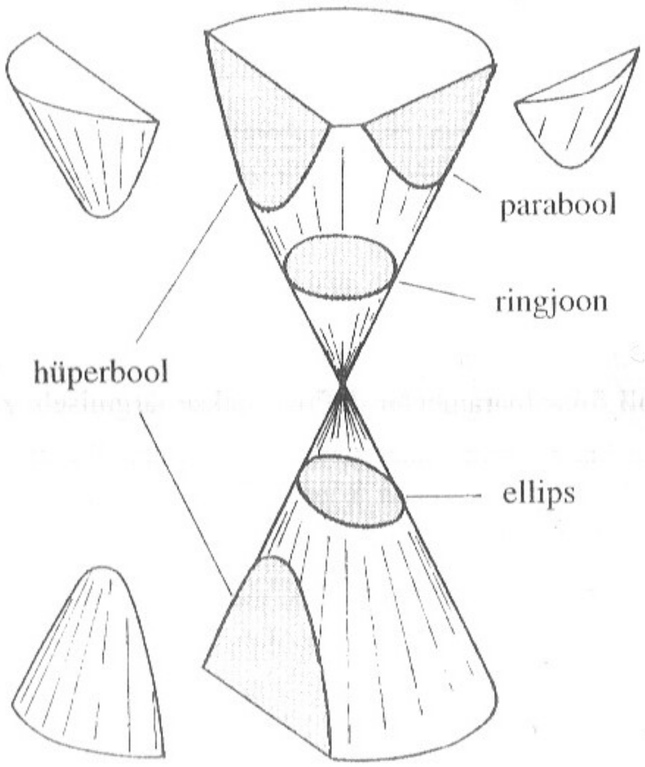
6.23. KOONUSELÕIKED

Kuigi parabool, hüperbool ja ellips (erijuhtumil ringjoon) on kujult väga erinevad, on neil ka palju ühist.

Kõik need jooned on saadavad *kahekattelise pöördkoonuse* lõikamisel sobivalt valitud tasandiga (vt. joonis).

Kahekatteline pöördkoonus saadakse, kui koonuse moodustajaid pikendada teisele poole üle koonuse tipu.

Koonuselõikeks nimetatakse kahekattelise pöördkoonuse lõiget tasandiga, mis ei läbi tippu.

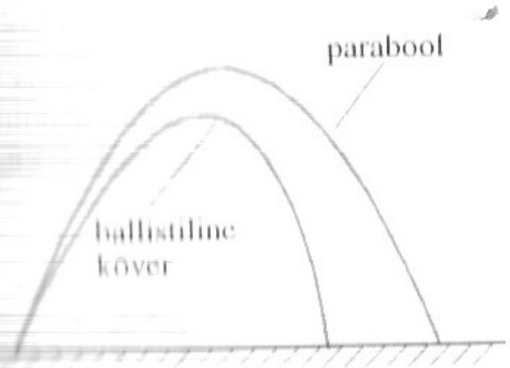


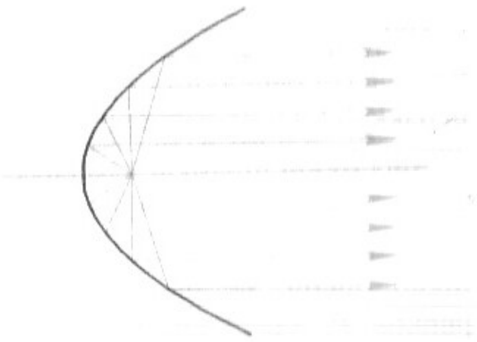
1) Kui lõiketasand on paralleelne koonuse teljega, siis on lõikejooneks hüperbool.
2) Kui lõiketasand on paralleelne mingi ühe moodustajaga, siis on lõikejooneks parabool.
3) Kui lõiketasand lõikab kõiki koonuse moodustajaid ühel pool koonuse tippu, siis on lõikejooneks ellips.
4) Erijuhul, kui lõiketasand on risti koonuse teljega, siis on lõikejooneks ringjoon.

Kui me loeksime koonuselõigete hulka kà need lõiked, mis tekivad, kui lõiketasand läbib koonuse tippu, siis tuleksid arvesse veel kolm erineva kujuga lõiget

Koonuselõigete kasutusvaldkond on väga lai. Tutvustaksime neist mõningaid.

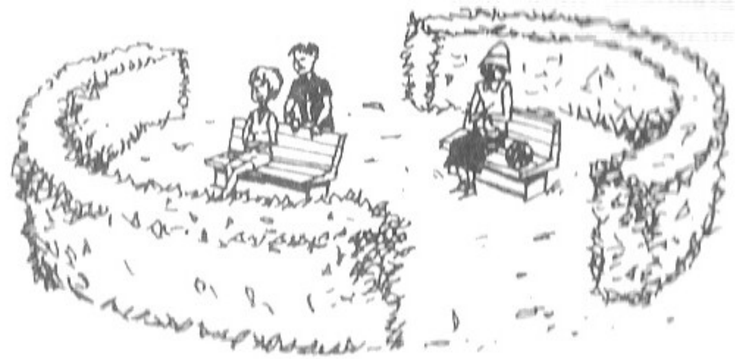
Horisondi suhtes kaldu visatud keha liigub õhutühjas ruumis mööda köverat, mille kujuks on parabool.[1] Tihti tehakse ka sillakaared paraboolikujulised. Parabooli on järgmine optikast teadaolev omadus: fookusest lähtuv valguskiir on pärast parabooli pinnalt peegeldumist paralleelne parabooli teljega. Seetõttu tehakse helgiheitjate reflektorid tavaliselt paraboolikujulised. Teleskoopide reflektorites toimub vastupidine: paralleelne kiirtekimp koondatakse ühte punkti — fookusesse.





Ellipsil on järgmine omadus: ühest fookusest väljuvad kiired peegelduvad ellipsi igast punktist nii, et nad läbivad teist fookust. See omadus ei kehti ainult valguskiirte ja peegelklaasiga kaetud elliptilise silindri korral, vaid ka helilainete peegeldumisel.

Kui ühes ellipsi fookuses midagi üsna tasa räägitakse, siis teises fookuses on see väga hästi kuulda. Normaalse heli leviku ja sumbuvuse puhul poleks see ilmselgelt



[1] Atmosfääris liigub selline keha mitte mööda parabooli, vaid veidi erinevat trajektoori

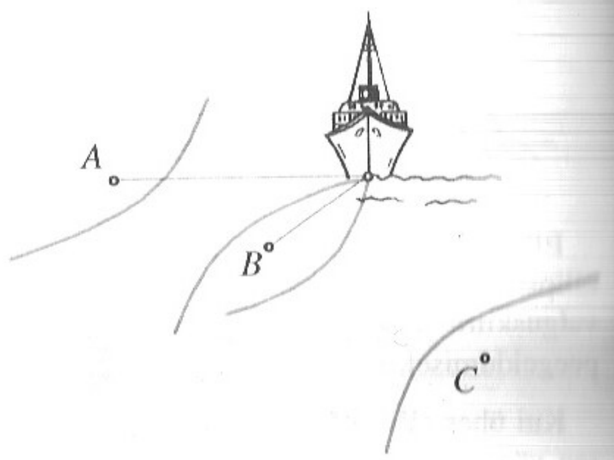
Seda efekti võib kohata niisugustes ehitistes, kus on elliptilisi pindu. Mõnes vanas mõisahoones ehitati koguni spetsiaalseid „sosistamiskambreid", pargis aga moodustati ellips kaarekujuliste hekitükkide abil.

Kaasajal kasutatakse ellipsit rubiinlaserites. Elliptilise silindri ühte fookusse asetatakse vardakujuline rubiinikristall, teise fookusse vardakujuline välklamp. Selle valgusvälgatus koondatakse kristallile.

Ümber Päikse liikuva Maa orbiit on ellipsikujuline. Ellipsi ühes fookuses paikneb Päike. Ellipsikujulistel orbiitidel liiguvad ka teised päikesesüsteemi planeedid. Enamasti on planeetide orbiitide ekstsentrilisus üsna väike — need ellipsid erinevad üsna vähe ringjoonest.

Väljastpoolt päikesesüsteemi sisenenud kehad võivad liikuda mööda hüperboolset või paraboolset orbiiti. Kosmoseraketile võib anda sellise algkiiruse, et ta hakkab liikuma mööda hüperboolset või paraboolset orbiiti.

Hüperbooli graafikut kasutatakse laevade kaugnavigatsioonis raadiomajakate abil. Laev, mis liigub merel ja on momendil punktis P, saab signaale kahest raadiomajakast A ja B. Määratakse kaugused neist majakatest ja nende vahe. Seetõttu võib öelda, et laev paikneb antud momendil ühe hüperbooli (fookustega A ja B) mingis punktis. Samaaegselt mõõdetakse kaugust ka kolmandast raadiomajakast C. Kasutades jaamade signaale, paikneb laev mingi teise hüperbooli graafikul, mille fookused on B ja C. Nende graafikute lõikepunkti leidmine aitabki määrata laeva täpse asukoha.



1269. Taskulambist väljub valguskoonus. Kuidas hoida taskulampi, et horisontaalsele põrandale jääks
1) valgustatud ring;
2) valgustatud koonus;
3) paraboolikujuline valguslaik;
4) hüperbooli ühe haru kujuline valguslaik?

1270. Aleksei Tolstoi romaanis „Insener Garini hüperboloid" on kirjeldatud seadet, mis oma toimeefekti poolest meenutab laserit. Miks selline seade ei saa töötada? Millised eksimused tegi A. Tolstoi?

1271. Halley komeet liigub ellipsikujulisel orbiidil, mille ühes fookuses on Päike. Selle ellipsi pooltelged on $a = 17{,}79$ au ja $b = 4{,}53$ au. Lühendiga au tähistatakse nn. astronoomilist ühikut — Maa keskmist kaugust Päikesest. 1 au = $1{,}495 \cdot 10^{11}$ m. Lühend on saadud ingliskeelsete sõnade *astronomical unit* esitähtedest. Leia fookuse kaugus ellipsi keskpunktist, komeedi afeel ja periheel. Kepleri kolmanda seaduse põhjal on tiirlemisperiood T (aastates) ja pooltelje pikkus a (au) omavahel seotud võrdusega $T^2 = a^3$. Arvuta Halley komeedi tiirlemisperiood.

1272. Sisesta ja käivita järgmine BASIC-keelne programm:

```
10 PRINT "Sisesta pooltelje a pikkus ";:INPUT A
20 PRINT "Sisesta pooltelje b pikkus ";:INPUT B
30 PRINT "x","y"
40 FOR T=0 TO 6.28 STEP 0.2
50 X=A*COS(T):Y=B*SIN(T)
60 PRINT X,Y
70 NEXT T
80 END
```

a) Saadud tabeli väljatrükiks printeril asenda 30-ndas ja 60-ndas programmireas käsk PRINT analoogilise käsuga LPRINT.

b) Märgi väljatrükitud tabeli punktid teljestikku. Millise joone saad?

c) asenda programmirida 50 järgmise reaga:

```
50 X=A/COS(T):Y=B*TAN(T)
```

Käivita muudetud programm. Märgi väljatrükitud tabeli punktid teljestikku. Millise joone saad?

Selles programmis kasutatakse *koonuselõigete parameetrilisi võrrandeid*[1].

Links põhikursusele

6.24. TÕESTUSÜLESANDED KOORDINAATIDE MEETODI ABIL

Paljusid planimeetria teoreeme saab tõestada ka koordinaatteljestiku abil, kasutades analüütilise geomeetria meetodeid. Seda tehakse järgmiselt.

1. Võetakse hulknurk (hulknurgad), mille kohta teoreem käib, paigutatakse see sobival viisil koordinaattasandile. Hulknurga tipud tähistatakse nii, et sellist tähistust oleks mugav kasutada.

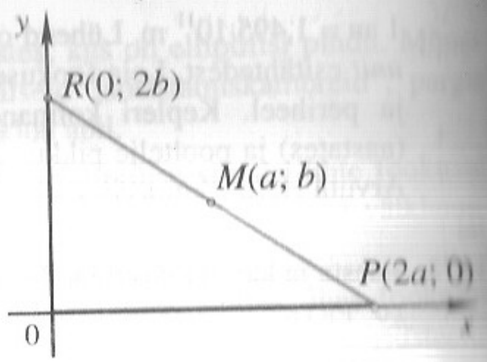
2. Tõestatakse teoreem koordinaatide meetodil.

Näide 1. Teoreem: *Täisnurkse kolmnurga hüpotenuusi keskpunkt on võrdsetel kaugustel kolmnurga tippudest.*

[1] Joone parameetrilised võrrandid on tähtis abivahend joone graafiku konstrueerimisel arvuti teel. Koonuselõigete parameetriliste võrrandite kohta leiad täiendavat informatsiooni raamatust: H. Kolde, „Koonuselõiked", Tallinn, „Valgus", 1991.

Tõestus: Tähistame kolmnurga tipud tähtedega O, P ja R.

Paigutame kolmnurga teljestikus nii, et kolmnurga täisnurga juures olev tipp O paikneks koordinaatide alguses ning küljed OP ja OR asetseksid vastavalt x-telje ja y-telje positiivsel osal.



Olgu kolmnurga kaatetite pikkused $OP = 2a$ ja $OR = 2b$.

Kolmnurga tippude koordinaadid on: $O(0; 0)$, $P(2a; 0)$ ja $R(0; 2b)$. Punkti M koordinaadid on lõigu PR keskpunkti koordinaadid: $M(a; b)$. Leiame lõikude OM ja PM pikkused:

$$OM = \sqrt{(a-0)^2 + (b-0)^2} = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$PM = \sqrt{(a-2a)^2 + (b-0)^2} = \sqrt{a^2 + b^2}$$

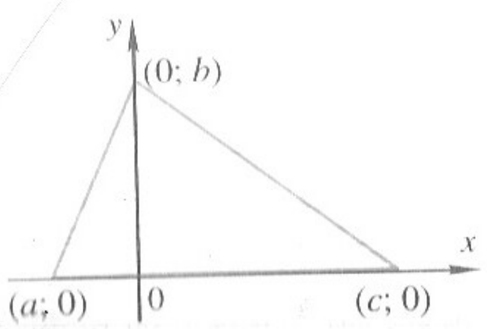
Seega $OM = PM$.

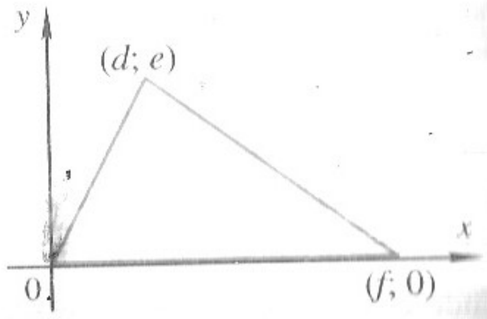
Et punkt M on defineeritud kui lõigu PR keskpunkt, siis $PM = MR$. Seega $MO = MP = MR$. ■

NB! Kolmnurga kaatetite pikkused on võetud võrdseks $2a$ ja $2b$-ga selleks, et punkti M koordinaadid ei tuleks murrulised.

Tõestusülesannetes täisnurkse kolmnurgaga kasutatakse tavaliselt selles näites toodud paigutust.

Kui kolmnurk ei ole täisnurkne, siis on kaks kasutatavamat paigutust näidatud joonistel.

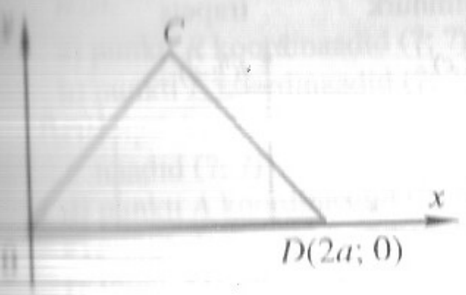




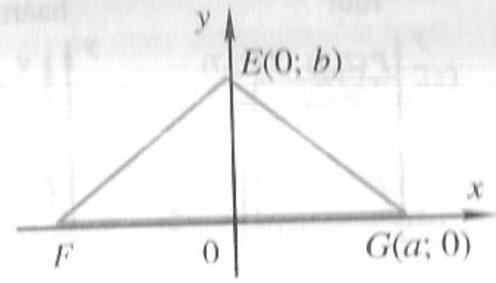
Need paigutused on eelistatud selle pärast, et nii on kolmnurga tippude koordinaatide hulgas rohkem nulle.

Võrdhaarse kolmnurga paigutamisel on samuti kaks enamlevinud võimalust:

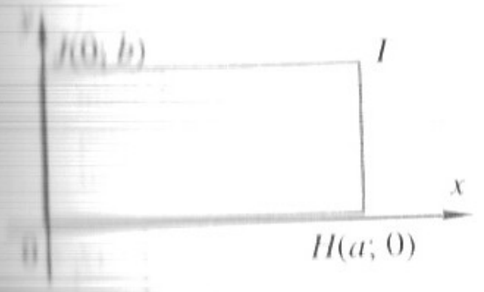
Et ΔCOD on võrdhaarne, siis punkti C koordinaate võib tähistada $C(a; b)$.



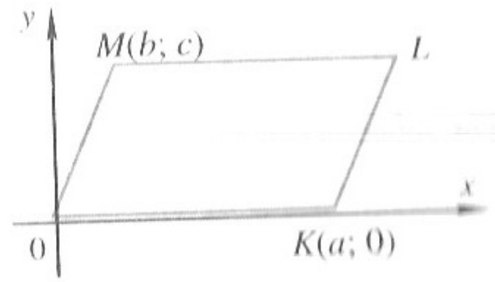
Et ΔEFG on võrdhaarne, siis punkti F koordinaadid on $F(-a; 0)$.



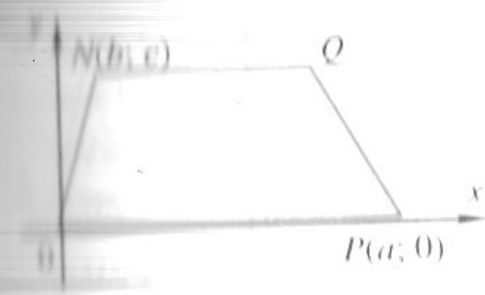
HIJO on ristkülik
Punkti I koordinaadid on $I(a; b)$.



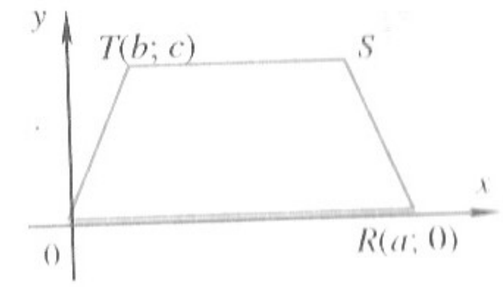
KLMO on rööpkülik
Punkti L koordinaadid on $L(a+b; c)$.



NOPQ on trapets
Punkti Q koordinaadid on $Q(d; c)$.

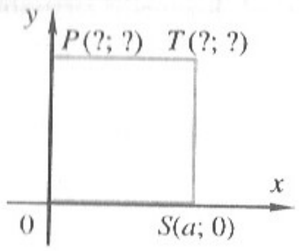


RSTO on võrdhaarne trapets.
Punkti S koordinaadid on $S(a-b; c)$.

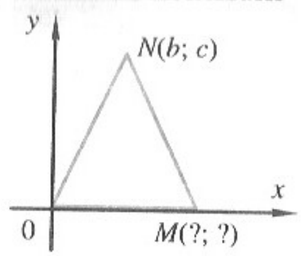


1273. Asenda küsimärgid tähtedega.

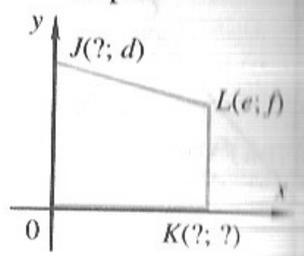
POST on ruut



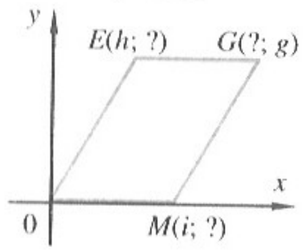
ΔMON on võrdhaarne kolmnurk



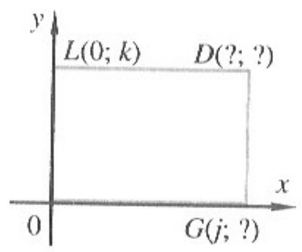
JOKL on trapets



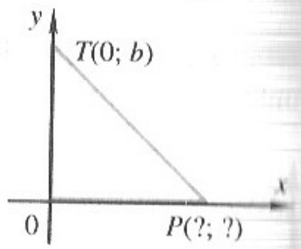
GEOM on rööpkülik



GOLD on ristkülik

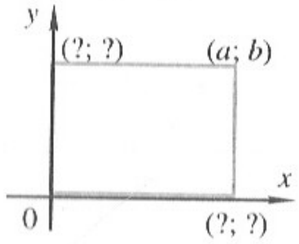


ΔTOP on võrdhaarne

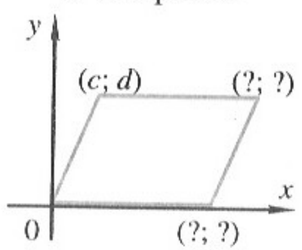


1274. Joonesta kujund. Märgi puuduvad koordinaadid.

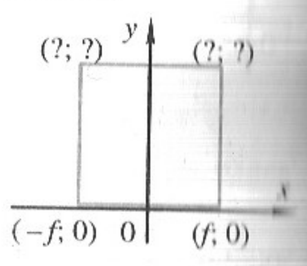
① Ristkülik



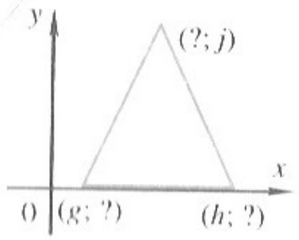
② Rööpkülik



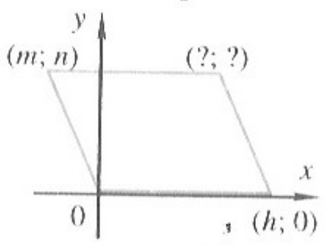
③ Ruut



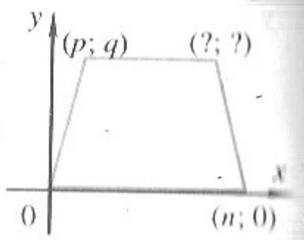
④ Võrdhaarne kolmnurk



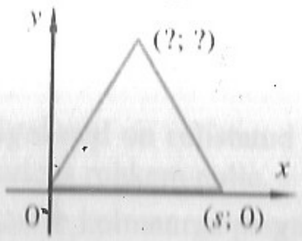
⑤ Rööpkülik



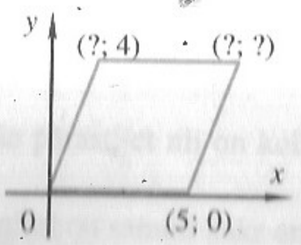
⑥ Võrdhaarne trapets



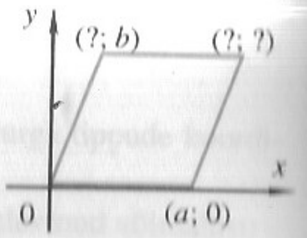
⑦ Võrdkülgne kolmnurk



⑧ Romb

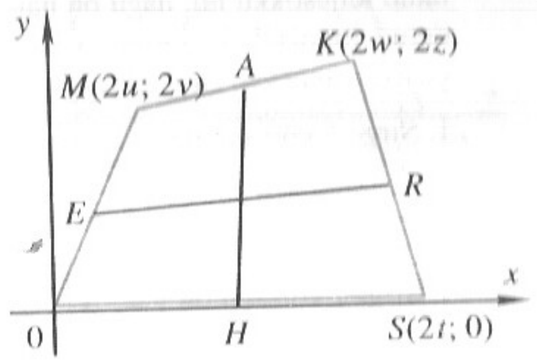


⑨ Romb

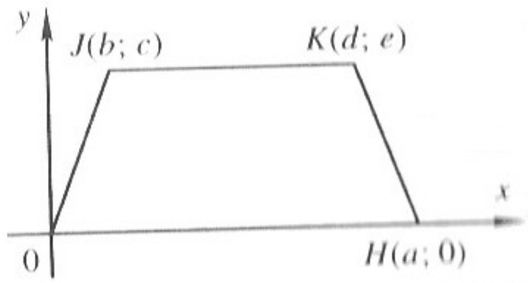


1275. Asenda puuduvad koordinaadid tõestamaks järgmist teoreemi:
Nelinurga vastaskülgede keskpunkte ühendavad lõigud poolitavad teineteist.

a) punkti R koordinaadid (?; ?)
b) punkti E koordinaadid (?; ?)
c) lõigu RE keskpunkti koordinaadid (?; ?)
d) punkti A koordinaadid (?; ?)
e) punkti H koordinaadid (?; ?)
f) lõigu AH keskpunkti koordinaadid (?; ?)
g) et lõikudel AH ja RE on ühine keskpunkt (?; ?), siis need lõigud poolitavad teineteist.



1276. On antud võrdhaarne trapets $HOJK$, mis on paigutatud teljestikku nii, nagu on näidatud joonisel. Kasutades võrdhaarse trapetsi definitsiooni, näita, et kehtivad võrdused $e = c$ ja $d = a - b$.



Näide 2. Tõestame järgmise teoreemi: *Trapetsi kesklõik on paralleelne alustega ja võrdub aluste poolsummaga.*

Tõestus: Haara keskpunkti L koordinaadid on $(r; s)$. Haara keskpunkti D koordinaadid on $(t + v; s)$. Sirge OP tõus ja sirge MN tõus on mõlemad võrdsed nulliga.

Sirge LD tõus $= \frac{s - s}{(t + v) - r} = 0$.

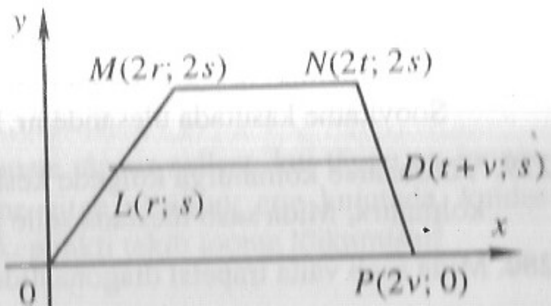
Et neil lõikudel on ühesugused tõusud, siis $OP \parallel LD \parallel MN$.

Leiame lõikude OP, LD ja MN pikkused:

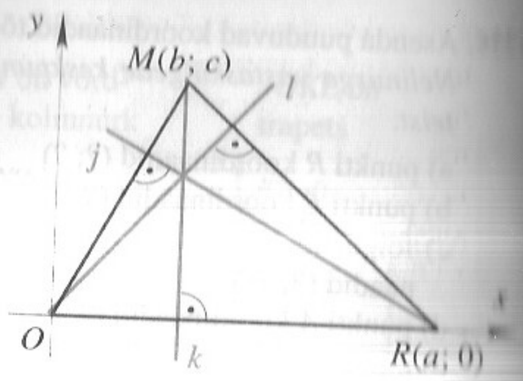
$MN = 2t - 2r$; $LD = t + v - r$; $OP = 2v$

$\frac{1}{2}(MN + OP) = \frac{1}{2}((2t - 2r) + 2v) = \frac{1}{2}(2t + 2v - 2r) = t + v - r$

$\frac{1}{2}(MN + OP) = LD$ ■



1277. Tõesta teoreem: *Kolmnurga kõrgused lõikuvad ühes punktis.*



Antud on $\triangle MOR$, mis on paigutatud teljestikku nii, nagu on näidatud joonisel. Kolmnurga kõrgused paiknevad sirgetel j, k ja l.

1. Sirge k võrrand on . . . .
2. Et lõigu MR tõus on $\frac{c}{b-a}$, siis sirge l tõus on . . . .
3. Sirge l võrrand on $y = \frac{a-b}{c}x$. (Põhjenda.)
4. Sirged k ja l lõikuvad punktis, kus $x = b$ ja $y = \left(\frac{a-b}{c}\right) b = \frac{ab-b^2}{c}$. (Põhjenda.)
5. Et lõigu OM tõus on $\frac{c}{b}$, siis sirge j tõus on . . . .
6. Sirge j võrrand on $y = -\frac{b}{c}(x-a)$. (Põhjenda.)
7. Sirged k ja j lõikuvad punktis, kus $x=b$ ja $y=-\frac{b}{c}(b-a)=\frac{ab-b^2}{c}$. (Miks?)
8. Kolm kõrgust lõikuvad ühes punktis. Mis on selle punkti koordinaadid?

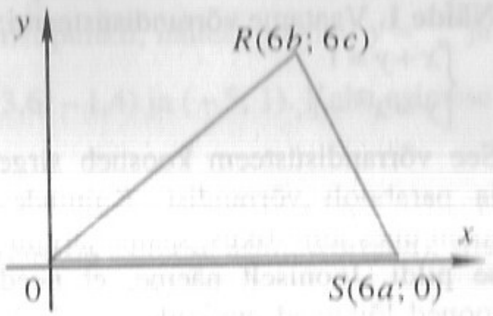
1278. Tõesta järgmised teoreemid.

a) Rööpküliku diagonaalid poolitavad teineteist.
b) Ristküliku diagonaalid on võrdsed.
c) Ruudu diagonaalid on risti.
d) Võrdhaarse trapetsi diagonaalid on võrdsed.
e) Võrdhaarse kolmnurga haaradele tõmmatud mediaanid on võrdsed.
f) Ristküliku külgede keskpunktide ühendamisel saadav nelinurk on romb.
g) Kolmnurga kesklõik on paralleelne kolmnurga küljega ja pikkuselt võrdub poolega sellest küljest.
h) Rööpküliku diagonaalide ruutude summa võrdub külgede ruutude summaga.
i) Rombi külje pikkuse ja sellele küljele tõmmatud kõrguse korrutis võrdub rombi diagonaalide poole korrutisega.
j) Suvalise nelinurga külgede keskpunktide ühendamisel saadud nelinurk on rööpkülik. Millal on tegu ristkülikuga?
Soovitame kasutada ülesande nr.1275 joonist.

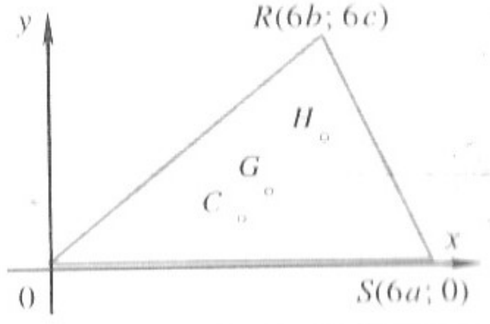
1279. Võrdhaarse kolmnurga külgede keskpunktide ühendamisel on saadud uus kolmnurk. Mida saab tõestada selle kolmnurga kohta?

1280. Mida saab väita trapetsi diagonaalide keskpunkte ühendava lõigu kohta?

1281. Kasuta kõrvalolevat joonist tõestamaks tuntud teoreemi: Kolmnurga mediaanid lõikuvad ühes punktis, mis jaotab mediaanid osadeks, millest pikkused suhtuvad nagu 1:2, teisisõnu pikem osa jääb kolmnurga tipu poole.



1282. Kasutame samasugust joonist kui eelmises ülesandes. Punkt C olgu kolmnurga külgede keskristsirgete lõikepunkt. Näita, et need keskristsirged lõikuvad ühes punktis ja selle punkti koordinaadid on $\left(3b; \frac{3b^2+3c^2-3ab}{c}\right)$.



Punkt G olgu mediaanide lõikepunkt. Selle punkti koordinaadid on $(2a+2b; 2c)$. (Vt. ülesanne 1281.)

Kõrguste lõikepunkt on punkt H koordinaatidega $\left(6b; \frac{6ab-6b^2}{c}\right)$. (Vt. ül. 1277.) Kontrolli nende punktide koordinaatide leidmise õigsust ja näita, et

a) punktid C, G ja H on ühel sirgel. Seda sirget nimetatakse *Euleri sirgeks*;
b) punkt G jaotab lõigu CH kaheks osaks, nii et $2 \cdot CG = GH$.

8.28. KAHE JOONE LÕIKEPUNKT

Olgu meil mingid kaks joont tasandil. Näiteks parabool ja hüperbool, ringjoon ja parabool, ringjoon ja sirge või mõni muu tasandi joonte paar. Kuidas leida nende joonte lõikepunkte? See probleem on sarnane kahe sirge lõikepunkti leidmise ülesandega. Niisamuti nagu kahe sirge lõikepunkti leidmisel, on ka nüüd kaks lahendusvõimalust:

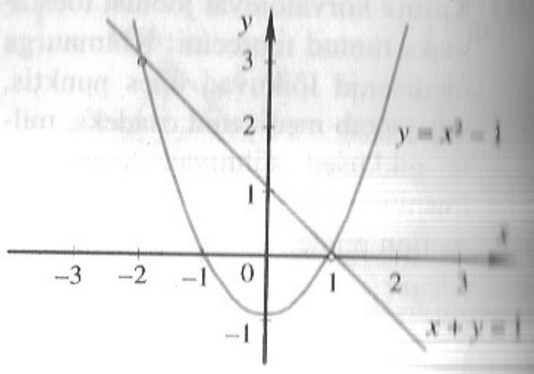
1) lõikepunkti leidmine graafiliselt;
2) algebraline lahendusviis, mille korral leitakse lõikepunktide koordinaadid võrrandisüsteemi lahendamise teel.

Graafilisel lahendamisel sõltub tulemuste täpsus sellest, kui täpne on joonis, aga teiselt poolt, graafiline lahendamine aitab piltlikult ette kujutada, kuidas jooned paiknevad ning näidata, mitu lõikepunkti tekib joonte lõikumisel.

Näide 1. Vaatame võrrandisüsteemi:

$$\begin{cases} x+y=1 \\ y=x^2-1. \end{cases}$$

See võrrandisüsteem koosneb sirge ja parabooli võrrandist. Kujutades jooni ühes teljestikus, saame järgmise pildi. Jooniselt näeme, et need jooned lõikuvad punktides $(-2; 3)$ ja $(1; 0)$. Seega need jooned lõikuvad kahes punktis.

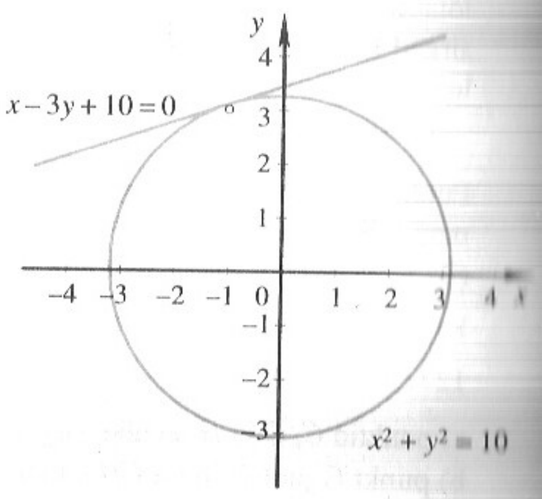


Näide 2. Vaatame võrrandisüsteemi:

$$\begin{cases} x^2+y^2=10 \\ x-3y+10=0. \end{cases}$$

Esimene võrrand on ringjoone võrrand, teine võrrand on sirge võrrand. Kujutades neid jooni ühes teljestikus, saame järgmise pildi.

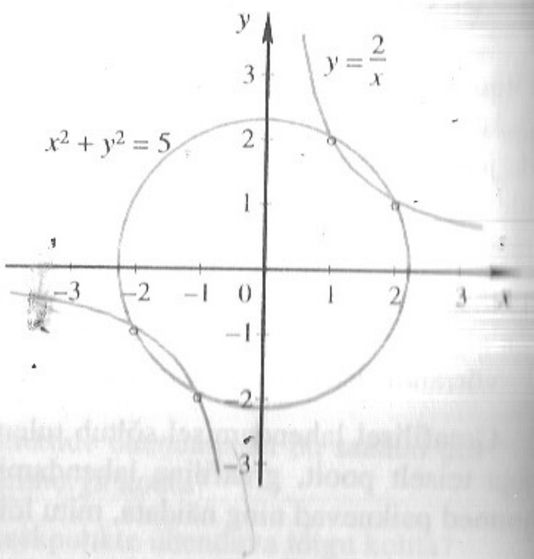
Neil joontel on üks ühine punkt, see on sirge ja ringjoone puutepunkt $(-1; 3)$.



Näide 3. Vaatame võrrandisüsteemi:

$$\begin{cases} x^2+y^2=5 \\ y=\dfrac{2}{x}. \end{cases}$$

Üks joontest on ringjoon, teine aga hüperbool. Kujutades neid jooni ühes teljestikus, näeme, et need jooned lõikuvad neljas punktis ja nimelt punktides $(1; 2)$, $(2; 1)$, $(-1; -2)$ ja $(-2; -1)$.



Kahel tasandi joonel võib olla ka kolm ühist punkti, näiteks joontel $y=\frac{-5}{x}$ ja $y=\frac{1}{2}x^2-4$ on lõikepunktideks $(1{,}4; -3{,}6)$, $(3{,}6; -1{,}4)$ ja $(-5; 1)$. Kahe esimese punkti koordinaadid on ligikaudsed.

Kaalutlused joonte korral on kahe joone lõikepunktide arv nullist kuni neljani. Eriti, kui üheks jooneks on sirge (sirge võrrand on esimese astme võrrand), siis on neil lõikepunkte ülimalt kaks.[1]

1383. Too kindlaks, milliste joonte võrrandid on järgmistes võrrandisüsteemides, ja lahenda graafiliselt need võrrandisüsteemid.

a) $\begin{cases} y=\dfrac{9}{x} \\ x+y=6 \end{cases}$ b) $\begin{cases} y=x^2 \\ x^2+y^2=4 \end{cases}$ c) $\begin{cases} y=8-x^2 \\ xy=3 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x^2+y^2=4 \\ xy=1 \end{cases}$ e) $\begin{cases} x^2-y=4 \\ y=3x \end{cases}$ f) $\begin{cases} x^2+y^2=25 \\ x+y=1 \end{cases}$

g) $\begin{cases} x^2+y^2=16 \\ (x-1)^2+y=9 \end{cases}$ h) $\begin{cases} y=x^2 \\ x^2-2y-4=0 \end{cases}$ i) $\begin{cases} y=\dfrac{1}{2}x^2-2 \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$

1384. Mitu lõikepunkti võib tekkida järgmiste joonte lõikumisel? Tee joonis kõikide juhtude kohta.

a) kaks ringjoont;
b) ringjoon ja parabool;
c) ringjoon ja hüperbool;
d) parabool ja sirge;
e) kaks parabooli;
f) sirge ja hüperbool;
g) kaks ellipsit;
h) kaks hüperbooli.

Näide 4. Leiame selle teema teises näites toodud joonte lõikepunktid võrrandisüsteemi lahendamise abil.

$\begin{cases} x^2+y^2=10 \\ x-3y+10=0 \end{cases}$ Avaldame teisest võrrandist muutuja x: $x=3y-10$ ja asendame selle esimesse võrrandisse.

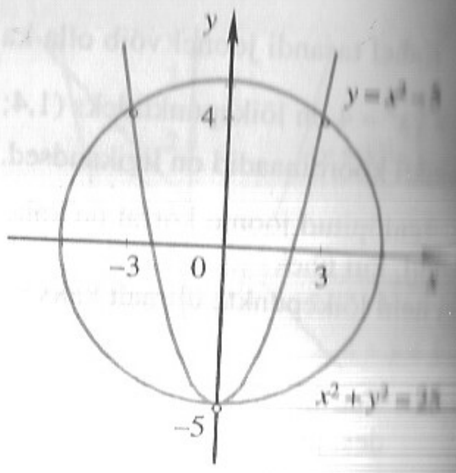
Saame ainult muutujat y sisaldava võrrandi $(3y-10)^2+y^2=10$, millest $y=3$. Teisest $x=3y-10$ leiame, et $x=-1$.
Võrrandisüsteemi lahendiks on arvupaar $(-1; 3)$.

Lahendasime selle võrrandisüsteemi asendusvõttega. Kui võrrandisüsteemis on üks võrrand teise astme võrrand, siis saab liitmisvõtet kasutada harva. Vaatame näidet, kus joonte lõikepunktide leidmisel siiski kasutatakse liitmisvõtet.

[1] Parabooli, hüperbooli ja ellipsit (erijuhul ringjoont) nimetatakse ka *teist järku joonteks*. Põhjus on selles, et nende võrrandid kujutavad endast nn. teise astme võrrandeid. Saab näidata, et võrrandisüsteemil, mis koosneb kahest teise astme võrrandist, on ülimalt neli lahendit.

Näide 5. Lahendame võrrandisüsteemi:

$$\begin{cases} x^2+y^2=25 \\ x^2-5=y \end{cases}.$$



Lahutades esimesest võrrandist teise, saame ruutvõrrandi: $y^2-5=25-y$. Sellel võrrandil on kaks lahendit: $y_1=-5$ ja $y_2=4$. Asendades $y=-5$ teise võrrandisse, saame: $x^2=0$. Järelikult $x_1=0$. Asendades $y=4$ teise võrrandisse, saame: $x^2=9$. Järelikult $x_2=3$ ja $x_3=-3$. Seega on antud joontel kolm lõikepunkti: $(0;-5)$, $(3;4)$ ja $(-3;4)$.

Üldjuhul võib kahe joone lõikepunkti leidmine võrrandisüsteemi algebraline lahendamise teel olla küllalt keerukas. Seetõttu kasutatakse siin lihtsustavaid erivõtteid, mida kirjeldatakse käesoleva raamatu II peatükis. Vaja võib minna ka kolmanda ja neljanda astme võrrandi lahendamisoskust. Neid saab lahendada Cardano valemite abil, mille kasutamist tutvustatakse 11. klassis.

1285. Leia, millised antud punktidest on mõlema joone peal.

a) $\begin{cases} x^2+y^2=25 \\ x+y=1 \end{cases}$ $(-3;4)$, $(3;-4)$, $(4;-3)$, $(-4;3)$.

b) $\begin{cases} x^2-y^2=3 \\ x+y=-1 \end{cases}$ $(-1;2)$, $(1;-2)$, $(2;-1)$, $(-2;1)$.

c) $\begin{cases} y^2-x^2=5 \\ x+y=1 \end{cases}$ $(2;-3)$, $(-2;3)$, $(3;-2)$, $(-3;2)$.

d) $\begin{cases} x^2+y^2=5 \\ 2x^2+y=0 \end{cases}$ $(-1;2)$, $(1;2)$, $(-1;-2)$, $(1;-2)$.

1286. Lahenda järgmised võrrandisüsteemid.

a) $\begin{cases} x^2-y=4 \\ y=3x \end{cases}$

b) $\begin{cases} y=x^2+3 \\ 3x-y+1=0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} xy+2=0 \\ x-y=3 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x^2+y^2=25 \\ x-2y=-5 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x^2+y^2=100 \\ x=y+2 \end{cases}$

f) $\begin{cases} x^2+y^2=5 \\ x^2-y=5 \end{cases}$

g) $\begin{cases} x^2-y^2=8 \\ x+y=2 \end{cases}$

h) $\begin{cases} x^2+y^2=13 \\ x^2-y^2=5 \end{cases}$

i) $\begin{cases} 2x^2+y^2=8 \\ x^2-2y^2=4 \end{cases}$

j) $\begin{cases} x^2+4y^2=25 \\ x+2y=1 \end{cases}$

k) $\begin{cases} x^2+4y^2=49 \\ 2x^2-3y^2=-12 \end{cases}$

l) $\begin{cases} x^2-y^2=5 \\ xy+6=0 \end{cases}$

KORDAMISKÜSIMUSED JA ÜLESANDED

1287. Mis on sirge tõusunurk, mis sirge tõus?

1288. Mis on sirge algordinaat? Kuidas leiad sirge võrrandi, kui on teada
a) sirge tõus ja algordinaat;
b) sirge tõus ja ühe sirgel oleva punkti koordinaadid?

1289. Kas teljestikus oleval sirgel on alati tõus ja algordinaat?

1290. Kuidas leiad sirge võrrandi, kui on teada
a) kahe sirgel oleva punkti koordinaadid; b) sirge telglõigud?

1291. On teada, et sirge mõlemad telglõigud on nullid. Kas saab leida selle sirge võrrandit?

1292. Sirge on paralleelne y-teljega ja lõikub x-teljega punktis $(m;\ 0)$. Kirjuta sirge võrrand.

1293. Sirge on paralleelne x-teljega ja lõikub y-teljega punktis $(0;\ n)$. Kirjuta sirge võrrand.

1294. Kuidas leitakse sirge võrrand, kui on teada sirge sihivektori ja ühe sirgel oleva punkti koordinaadid?

1295. On antud sirge võrrand. Väljaspool seda sirget on üks punkt A. Kuidas leiad sellise sirge võrrandi, mis läbib punkti A ja on
a) paralleelne antud sirgega; b) risti antud sirgega?

1296. Missugune on sirge üldvõrrand?

1297. Kuidas saab leida kahe sirge vahelist nurka? NB! Selleks on mitu võimalust.

1298. Mida võib öelda paralleelsete sirgete tõusude kohta?

1299. Mida võib öelda ristuvate sirgete tõusude kohta?

1300. Kuidas kontrollida seda, kas kaks tasandil olevat sirget lõikuvad, on paralleelsed või ühtivad?

1301. Tõigu antud kolmnurga 3 tipu koordinaadid. Kirjelda, kuidas saab leida kolmnurga küljed ja nurgad.

1302. Kirjuta ringjoone võrrand, kui keskpunkt on punktis $(0;\ 0)$ ja raadius on r.

1303. Kirjuta ringjoone võrrand, kui keskpunkt on punktis $(a;\ b)$ ja raadius on r.

1304. Millised võimalused on kahe joone lõikepunktide leidmiseks?

1305. On antud punktid $A(1;\ -2)$ ja $B(4;\ 2)$. Lahenda järgmised ülesanded.
a) Punkti B x koordinaat on . . . .
b) Punkt A paikneb . . . veerandis.
c) Punktide A ja B vaheline kaugus on . . . .
d) Lõigu AB keskpunkt on (. . . ; . . .).
e) Ringjoonel keskpunktiga A ja raadiusega AB on võrrand . . . .
f) Ringjoonel, mille keskpunkt on A ja mis puutub y-telge, on võrrand . . . .
g) Sirge AB võrrand on . . . .
h) Kui sirge $AC \perp AB$, siis AC-l on tõus . . . .

i) Sirgel, mis läbib punkti $(-2; 1)$ ja on risti sirgega AB, on võrrand . . . .

j) Sirge, mis läbib punkti $(1; 3)$ ja on paralleelne sirgega AB, läbib punkt $(\ldots; -1)$.

k) Sirgel, mis on paralleelne sirgega AB ja mille algordinaat on -4, on järgmine võrrand . . . .

l) Kui A on lõigu BF keskpunkt, siis punkti F koordinaadid on $(\ldots; \ldots)$.

m) Leia joonte AB ja $x-y-2=0$ lõikepunkt ja nurk nende joonte vahel.

1306. Leia võrrand sirgele, mille tõusnurk on $135°$ ja algordinaat on 5.

1307. Sirge tõusunurk on $45°$ ja ta lõikab y-telge punktis $(0; 5)$. Kas punktid $A(-1; 4)$ ja $B(1; 6)$ asetsevad sellel sirgel?

1308. Millist tingimust peavad rahuldama punkti $M(x; y)$ koordinaadid, kui see punkt on ühel kaugusel punktidest $A(7; -3)$ ja $B(-2; 1)$?

1309. Punkt $M(x; y)$ on ühel kaugusel punktidest $A(2; 2)$, $B(-5; 1)$ ja $C(3; -5)$. Leia punkti M koordinaadid.

1310. Kirjuta välja antud sirge üldvõrrand ja võrrand telglõikudes: $y = \frac{4}{3}x + 3$.

1311. Leia kolmnurga pindala, kui kolmnurga tipud on $A(4; 2)$, $B(9; 4)$ ja $C(7; 6)$.

1312. Leia kolmnurga tipud, kui külgede keskpunktid on $P(3; -2)$, $Q(1; 6)$ ja $R(-4; 2)$.

1313. Leia sirgetevaheline nurk.

a) $y = 3x$ ja $y = -2x + 5$;

b) $y = 4x - 7$ ja $y = -\frac{1}{4}x + 2$;

c) $y = 5x - 3$ ja $y = 5x - 8$;

d) $y = \sqrt{3} \cdot x - 5$ ja $y = -\sqrt{3} \cdot x + 1$.

1314. Leia ühtlase liikumise kiirus, teades, et liikumise graafik lõikab x-telge punktis $A(-\frac{1}{2}; 0)$ ja y-telge punktis $B(0; 8)$. Mastaap on valitud nii, et x-telje üks ühik vastab ühele tunnile ja y-telje ühik — ühele kilomeetrile.

1315. Leia sirge võrrand, kui sirge läbib punkti $A(3; 1)$ ja on paralleelne:

a) x-teljega; b) koordinaattelgede poolitajaga; c) sirgega $y = 3x + 7$.

1316. Kuidas peavad olema omavahel seotud arvud a ja b, et sirge $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ lõikuks x-teljega järgmise nurga all:

a) $\frac{\pi}{4}$; b) $\frac{3\pi}{4}$; c) $\frac{\pi}{3}$?

1317. Näita, et punktid $A(-2; -2)$, $B(-3; 1)$, $C(7; 7)$ ja $D(3; 1)$ on trapetsi tipud. Leia selle trapetsi kesklõigu ja diagonaalide võrrandid.

1318. Leia ruudu külgede võrrandid, kui ruudu külg on a ja selle ruudu diagonaalid paiknevad koordinaattelgedel.

1319. Ringjoon läbib punkte $A(0; 2)$, $B(1; 1)$, $C(2; -2)$. Leia selle ringjoone võrrand.

1320. Leia ringi keskpunkt ja raadius, kui ringjoone võrrandiks on $x^2 + y^2 - 8x + 6y + 21 = 0$.

1321. Ringjoon läbib punkti $(2; 9)$ ja puutub mõlemat koordinaattelge. Leia ringjoone võrrand.

1322. Uue veoauto kütusekulu määramiseks valati auto bensiinipaak täis ja sõideti autodroomil ühtlase kiirusega. Pärast 100 km läbimist oli jäänud paaki 80 l kütust, aga pärast 300 km läbimist 40 l kütust.

a) Joonista graafik, mis näitab auto kütusekulu sõltuvust läbitud tee pikkusest.

b) Kuidas on seotud kütusekulu (y) ja läbitud tee pikkus (x)?

c) Mida näitab graafiku tõus?

d) Kui palju kütust on jäänud paaki pärast 400 km läbimist?

e) Kui palju kütust mahtus paaki?

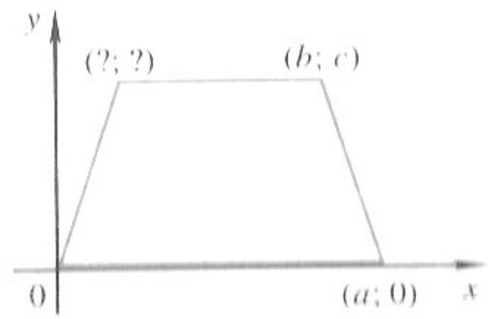
f) Kui kaugele saaks sõita täispaagiga?

1323. Leia antud joonte lõikepunkt, lahendades algebraliselt võrrandisüsteemid. Tulemust kontrolli graafilise lahendusega.

a) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ y = x^2 - 13 \end{cases}$

b) $\begin{cases} xy + 1 = 0 \\ 2x + 3y + 1 = 0 \end{cases}$

1324. On antud võrdhaarne trapets. Leia puuduvad koordinaadid.



6.26. GRAAFILINE LINAARPLANEERIMINE

1. SISSEJUHATUS

Matemaatikateadmised võimaldavad lahendada paljusid igapäevaeluga seotud ülesandeid. Nende ülesannete ühiseks omaduseks on tavaliselt üheainsa lahendi olemasolu. Kuid sageli tuleb lahendada ka selliseid ülesandeid, millel on palju erinevaid lahendeid. Vahel võib lahendeid olla ka lõpmatu hulk.

Kui kavatseme jõuda suurlinna ühest servast teise, siis on meil palju võimalusi. Võib kasutada trammi, busse, trolle, sõita marsruuttaksoga või minna jalgsi. On vaja otsustada, kuidas sõita, kus ümber istuda jne. Otsus sõltub sellest, kas me tahame jõuda kohale võimalikult kiiresti või hoopis võimalikult odavalt või hoopis tahame jõuda kohale nii, et oleks võimalikult vähe ümberistumisi. Parima lahenduse leidmine ei ole sugugi lihtne. Tuleb arvestada *lisatingimusi*, mida me sellelt lahenduselt ootame. Kõigi lahendite hulgas leidub tavaliselt üks või mitu sellist lahendit, mis mingit täiendavalt püstitatud lisatingimust (näiteks odavust) kõige paremini rahuldab. Sellist lahendit nimetatakse ***optimaalseks lahendiks***.

Optimaalseid lahendeid otsitakse paljudes situatsioonides. Näiteks:

1. Kuidas korraldada tehases tootmist nii, et kasum oleks suurim?
2. Kuidas peab juurdelõikaja märkima kangale lõiked, et jäägid oleksid vähimad?
3. Kuidas koostada nädala menüüd nii, et toit oleks tervislik ja odav?
4. Kuidas koostada koolis tunniplaani?
5. Kuidas katta mingi maakoht bussiliinidega?
6. Ühtede ja samade algkomponentide baasil on keemiakombinaat võimeline tootma mitmeid erinevaid aineid. On teada algkomponentide hinnad ja erinevate lõpp-produktide hinnad. Kulutused tööjõule on samuti teada. Mida on kasulikum toota?
7. Kuidas valida erinevate automarkide vahel ostjale kõige sobivamat?
8. Orienteeruja peab läbima metsas olevad kontrollpunktid, mille asukohad ja omavahelised kaugused on teada. Kontrollpunktide läbimise järjekord ei ole tähtis. Millise marsruudi peab valima orienteeruja, et läbitava trassi pikkus oleks minimaalne?

Kõik need on küsimused, kus tuleb valida paljude erinevate võimaluste hulgast optimaalne, s.o. kõige parem, kõige ökonoomsem lahend. Teadust, mis tegeleb optimaalsete lahendite otsimisega ja kasutab selleks matemaatilisi meetodeid nimetatakse **operatsioonianalüüsiks**. Operatsioonianalüüs tekkis Teise maailmasõja päevil sõjalistel vajadustel. Pärast sõja lõppu hakati operatsioonianalüüsi meetodeid rakendama majanduses, transpordis, tootmise juhtimises, [illegible] ja mitmel pool mujal. Operatsioonianalüüsi abil töötatakse välja [illegible] lahenduste leidmise viisid, operatsioonianalüüs aitab otsustada.

Operatsioonianalüüsi alla kuulub ka matemaatiline planeerimine, mille üheks olulisemaks osaks on **lineaarne planeerimine**.

Järgnevas tutvume lineaarse planeerimise mõnede lihtsamate ülesannetega.

[illegible] Tisleritöökoda teeb kirjutuslaudu ja puhvetikappe. Puhvetikapi valmistamiseks kulub 0,3 m^3 puitu, 0,8 m^2 klaasi ja 6 tundi tisleri tööaega. Kirjutuslaua [illegible]miseks kulub 0,25 m^3 puitu ja 10 tundi tisleri tööaega. Töökojas on ühe [illegible] varu puitu — 30 m^3 ja ühe kuu varu klaasi — 60 m^2. Selles kuus võib arvestada [illegible] tisleritöö tunniga. Ühe puhvetikapi eest teenib tisleritöökoda 300$, ühe [illegible]laua eest 400$. Kui palju puhvetikappe ja kirjutuslaudu tuleks valmistada, et töökoja tulud oleksid maksimaalsed?

[illegible]andame ülesande andmed tabelisse, tähistades otsitavad tähtedega x ja y ([illegible] $x \geq 0$ ja $y \geq 0$).

[illegible]	Valmistada (tk.)	Puidu kulu (m^3)	Klaasi kulu (m^2)	Tööaeg (h)	Tulu ($)
[illegible]kapp	x	0,3	0,8	6	300
[illegible]laud	y	0,25	—	10	400
Varud		30	60	900	

[illegible]mist piiravad varud. Esitame need kitsendused matemaatiliselt. Kui toota x puhvetikappi ja y kirjutuslauda, siis kulub puitu $0{,}3x + 0{,}25y$. See kulu ei saa [illegible] suurem varudest, seega

$$0{,}3x + 0{,}25y \leq 30.$$

Klaasi ei saa kulutada rohkem, kui seda on, seega

$$0{,}8x \leq 60.$$

[illegible] ei saa rohkem, kui tisslerid jõuavad antud aja piires tööd teha, seega

$$6x + 10y \leq 900.$$

Et need kitsendused kehtivad üheaegselt, siis võime vaadelda neid süsteemina

$$\begin{cases} 0{,}3x + 0{,}25y \leq 30 \\ 0{,}8x \leq 60 \\ 6x + 10y \leq 900. \end{cases}$$

[illegible]misest saadakse tulu $300x + 400y$ $, mille tähistame c-ga:

$$c = 300x + 400y.$$

[illegible] oleme taandanud majandusliku planeerimisülesande matemaatiliseks. Sõnastame selle:

Leia lineaarvõrratuste süsteemi

$$\begin{cases} 0{,}3x + 0{,}25y \leqslant 30 \\ 0{,}8x \leqslant 60 \\ 6x + 10y \leqslant 900, \end{cases}$$

kus $x \geqslant 0$ ja $y \geqslant 0$, lahendite hulgast selline, mis annab suurima väärtuse avaldisele $c = 300x + 400y$.

See matemaatikaülesanne on eespool sõnastatud tootmise planeerimisülesande ***matemaatiline mudel***. Miks kasutatakse matemaatilisi mudeleid?

Esiteks, matemaatilise mudeli abil on lihtsam leida optimaalset tegevusviisi kui ilma matemaatilise mudelita. Matemaatiline mudel aitab välja tuua peamise antud ülesandes, vältida üleliigset informatsiooni.

Teiseks, matemaatilise mudeli abil „katsetamine" on suhteliselt odav ja kiire. Katse ja eksituse meetodil praktikas proovimine (ühes kuus toodame näiteks 40 kirjutuslauda ja70 puhvetikappi, teises 40 kirjutuslauda ja 60 puhvetikappi) on aeganõudev ja ka majanduslikult kahjumittoov. Seega on mõistlik seal, kus võimalik, kasutada praktiliste katsetuste asemel matemaatilisi mudeleid. Suuries matemaatilistes mudelites kasutatakse sadu võrrandeid ja võrratusi.

Selle ja analoogiliste ülesannete lahendamiseks peab oskama lahendada lineaarvõrratuste süsteeme ja teadma, kuidas leida süsteemi lahendite hulgast maksimumi (või miinimumi) andvat lahendit.

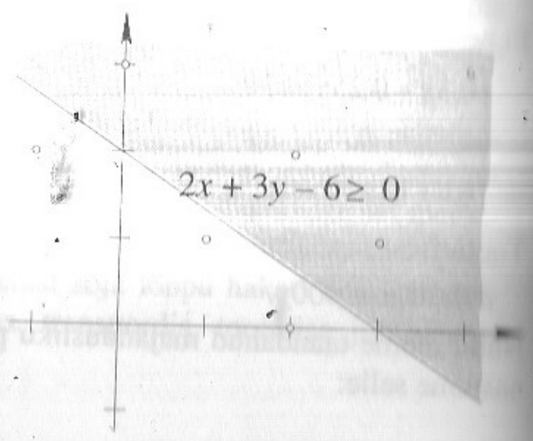
2. KAHE MUUTUJAGA LINEAARVÕRRATUS. SELLE GRAAFILINE LAHENDAMINE

Seost $ax + by + c \geqslant 0$ (või $ax + by + c \leqslant 0$), milles a, b ja c on reaalarvud, nimetatakse **kahe muutujaga lineaarvõrratuseks**. Tema lahenditeks on muutujate x ja y väärtuste sellised paarid, mille korral võrratus kehtib. Võrratuse *graafiliseks* lahendamiseks selgitame kõigepealt, kuidas sellist võrratust geomeetriliselt esitada kujutada.

Vaatleme näiteks võrratust

$2x + 3y - 6 \geqslant 0$.

Sirge $2x + 3y - 6 = 0$ jaotab tasandi kaheks **pooltasandiks**, kusjuures seda sirget nimetatakse pooltasandite **rajasirgeks**. Tekkinud pooltasandeid võib nimetada tinglikult „ülemiseks" ja „alumiseks" (või „parempoolseks" ja „vasakpoolseks"). Võtame mõlemal pooltasandil mõned punktid, näiteks



„ülemisel" pooltasandil punktid (0; 3), (2; 2), (4; 3) ja (3; 1); „alumisel" pooltasandil võtame punktid (0; 0), (– 1; 2), (1; 1), (2; 0) ja (3; – 1).

Asendades nende punktide koordinaadid võrratusse $2x + 3y - 6 \geqslant 0$, saame ülemise pooltasandi punktide korral tõese võrratuse, alumise pooltasandi punktide korral aga väära võrratuse.

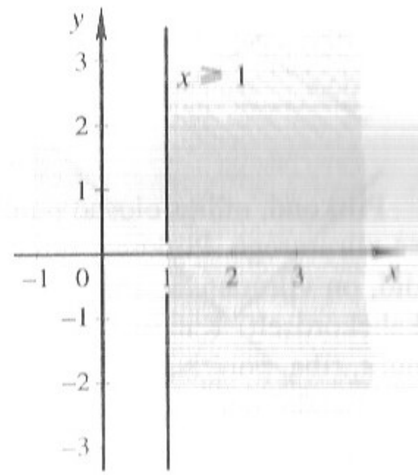
Saadud tulemus kehtib ka üldisemalt, nimelt:

Võrratuse $ax + by + c \geqslant 0$ (või $ax + by + c \leqslant 0$) lahenditeks on ühe pooltasandi punktide koordinaadid. Pooltasandi rajasirge $ax + by + c = 0$ kuulub ka võrratuse lahendite hulka.

Võrratuse $ax + by + c \geqslant 0$ (või $ax + by + c \leqslant 0$) graafiliseks lahendamiseks joonestame sirge $ax + by + c = 0$, mis eraldab kahte pooltasandit. Lahendite pooltasandi leidmiseks valime ühel pooltasandil väljaspool rajasirget mingi punkti $P(x_0; y_0)$ ja kontrollime, kas selle punkti koordinaadid rahuldavad võrratust. Kui jah, siis on lahendite pooltasandiks see pooltasand, millelt valisime punkti P. Kui ei, siis on lahendite pooltasandiks see pooltasand, millel punkt P ei asu. Tavaliselt võetakse kontrollitavaks punktiks koordinaatide alguspunkt. Kui me leiame lahendite pooltasandit, siis tähistame selle rajasirgest algava viirutusega.

Näide 1. Lahendame võrratuse $x \geqslant 1$.

Kui seda võrratust vaadelda ühe tundmatuga võrratusena, siis saame me võrratuse lahenditeks piirkonna x-teljel (sirgel) $L = [1; \infty[$. Nüüd lahendame selle võrratuse kahe tundmatuga võrratusena. Sel juhul saame lahenditeks piirkonna tasandil. Et y suhtes pole antud mingit kitsendavat tingimust, siis kehtib võrratus iga y puhul, mille korral $x \geqslant 1$. Järelikult on lahendite pooltasandiks piirkond, mis jääb sirgest $x = 1$ paremale.



Näide 2. Lahendame võrratuse

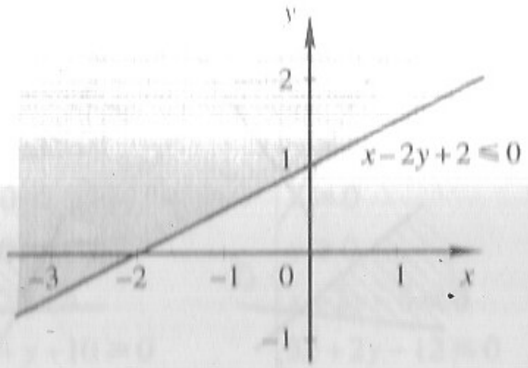
$x - 2y + 2 \leqslant 0$.

Joonestame sirge $x - 2y + 2 = 0$. Et punkt $O(0; 0)$ võrratust ei rahulda, sest

$0 - 2 \cdot 0 + 2 \geqslant 0$,

siis on lahendite pooltasand ülemine.

x	0	–2
y	1	0



1325. Lahenda järgmised võrratused graafiliselt.

a) $y \leq 0$ b) $x+y-1 \leq 0$ c) $2x+y-2 \geq 0$ d) $2x-3y \geq -6$

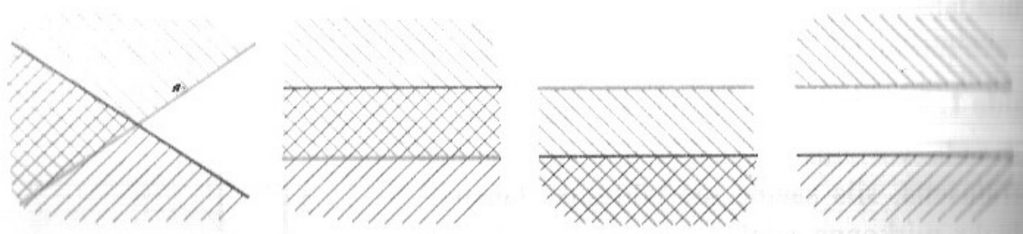
e) $x+2y \geq 0$ f) $5y+15 \geq 0$ g) $3x+4y-12 \geq 0$ h) $36x+50y+900 \geq 0$

3. KAHE MUUTUJAGA VÕRRATUSESÜSTEEMI GRAAFILINE LAHENDAMINE

Sissejuhatuses toodud tisleritöökoja näites saime kahe muutujaga võrratusesüsteemi. Kuidas selliseid võrratusesüsteeme lahendada?

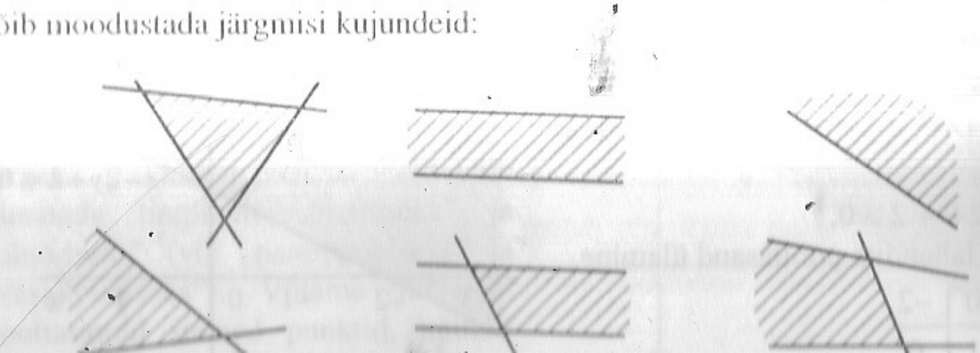
Võrratusesüsteemi lahendiks on selliste arvude hulk, mis rahuldab samaaegselt süsteemi iga võrratust. Järelikult koosneb süsteemi lahendite hulk süsteemi *kõikide võrratuste ühiste lahendite* hulgast. Kui lahendame võrratusesüsteemi, peame leidma kõigi võrratuste lahendihulgad ja seejärel nende hulkade ühisosa.

Kahest võrratusest koosneva süsteemi lahendamisel võib esineda kokku 4 võimalust. Esitame need joonisel.



Piirkond, milles olevad punktid rahuldavad ühte võrratust kahest, on ühekordse viirutusega. Piirkond, milles olevad punktid ei ole kummagi võrratuse lahendid, on viirutamata. Piirkond, mille punktid on süsteemi lahendid, on viirutatud kahekordselt. Kahest võrratusest koosneva süsteemi lahendihulgaks võib olla nurk, riba, pooltasand või tühi hulk. Viimasel juhul on võrratused *vastuolulised*. Kolmandal juhul on üks võrratus *liigne*.

Kui meil on rohkem võrratusi, siis leitakse süsteemi lahendeid samal viisil kui kahe võrratusega võrratusesüsteemi korral. Lahendihulga kuju võib olla aga keerulisem. Näiteks, kolmest lineaarvõrratusest koosneva süsteemi lahendihulk võib moodustada järgmisi kujundeid:



Edaspidi nimetame süsteemi lahendite hulga poolt moodustatud kujundit (nii lõplikku kui ka lõpmatut) *lahendite piirkonnaks*.

Vaatleme neid lahendite piirkondi. Võttes suvalisest piirkonnast kaks vabalt valitud punkti, saame need punktid ühendada sirglõiguga, mis tervikuna kuulub samasse piirkonda. Kõiki selliseid piirkondi nimetatakse *kumerateks* piirkondadeks.

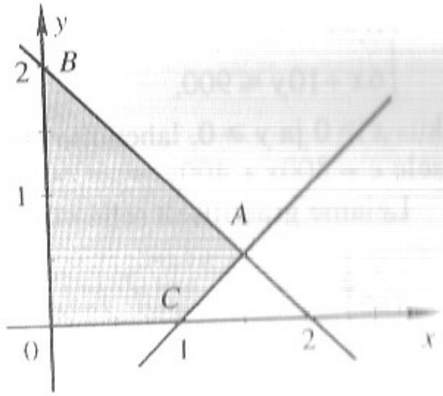
Punktihulka nimetatakse **kumeraks hulgaks**, kui selle hulga iga kahte punkti saab ühendada sirglõiguga, mis tervenisti kuulub samasse hulka. Kumerad hulgad on näiteks ring, pooltasand, kolmnurk, Ruumilistest kehadest püramiid, kera, korrapärane prisma. Kumerad hulgad ei ole näiteks rõngas, tähtviisnurk, 180° suurema kesknurgaga sektor jmt. Saab näidata, et iga kahe tundmatuga lineaarvõrratusesüsteemi lahendihulk on kumer.

Näide 1. Lahendame võrratusesüsteemi

$\begin{cases} x+y \leq 2 \\ x-y \leq 1 \end{cases}$, kus $x \geq 0$ ja $y \geq 0$. Leiame lahendite piirkonna tipud.

Süsteem koosneb see võrratusesüsteem neljast võrratusest. Võrratustest $x \geq 0$ ja $y \geq 0$ järeldub, et lahendite piirkond paikneb ainult I veerandis ja x-telje ning y-telje mittenegatiivsel osal. Joonestame sirged $x+y=2$ ja $x-y=1$.

$x+y=2$ $\begin{array}{c|c|c} x & 0 & 2 \\ \hline y & 2 & 0 \end{array}$ ja $x-y=1$ $\begin{array}{c|c|c} x & 0 & 1 \\ \hline y & -1 & 0 \end{array}$



Need sirged lõikuvad punktis $A(\frac{3}{2}; \frac{1}{2})$.

Leiame võrratusesüsteemi lahendite piirkonna I veerandis. See on nelinurk $ABOC$. Selle nelinurga ülejäänud tipud on $B(0; 2)$, $O(0; 0)$ ja $C(1; 0)$.

1326. Leia xy-tasapinnal see piirkond, mille iga punkti koordinaadid rahuldaksid antud tingimusi.

a) $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ y \leq -x+1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x-y+1 \geq 0 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ y \geq 2x-4 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x-y-1 \leq 0 \end{cases}$ e) $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ y \leq 2x+4 \\ 10x+y+10 \geq 0 \end{cases}$ f) $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x+2y-8 \leq 0 \\ 3x+2y-12 \leq 0 \end{cases}$

1327. Lahenda graafiliselt järgmised võrrandisüsteemid, kui $x \geqslant 0$ ja $y \geqslant 0$. Leia lahendite piirkonna tipud.

a) $\begin{cases} x+y-5 \geqslant 0 \\ x+3y-18 \leqslant 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x+3y-300 \leqslant 0 \\ 5x+3y-750 \geqslant 0 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x+4y-4 \geqslant 0 \\ 2x+3y-6 \geqslant 0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x+2y-5 \geqslant 0 \\ y \leqslant 3 \end{cases}$ e) $\begin{cases} x-2y-2 \leqslant 0 \\ x+2y-6 \leqslant 0 \\ x+y-5 \leqslant 0 \end{cases}$ f) $\begin{cases} x+2y-10 \leqslant 0 \\ x-y-4 \leqslant 0 \end{cases}$

g) $\begin{cases} 2x-3y+13 \leqslant 0 \\ x+y-6 \leqslant 0 \\ 4x-y-19 \geqslant 0 \end{cases}$ h) $\begin{cases} 2x-3y+6 \geqslant 0 \\ 3x-2y-18 \leqslant 0 \\ 2x+5y-20 \leqslant 0 \end{cases}$ i) $\begin{cases} 3x+y-8 \geqslant 0 \\ x+2y-6 \geqslant 0 \\ x-y-3 \leqslant 0 \end{cases}$

4. GRAAFILINE LINEAARPLANEERIMINE

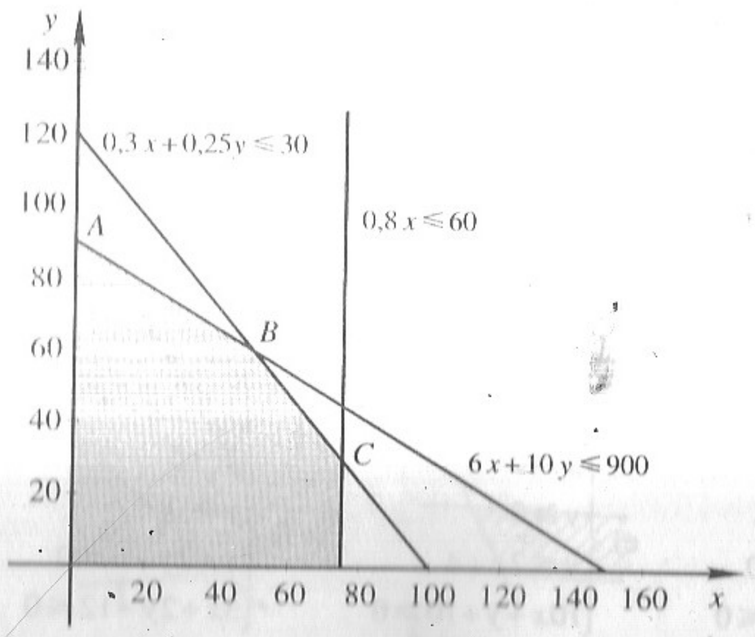
Vaatleme kõigepealt sissejuhatuses toodud näidet tisleritöökoja kohta. Majanduslik planeerimisülesanne taandus järgmisele matemaatilisele ülesandele:

Leia lineaarvõrratuste süsteemi

$$\begin{cases} 0{,}3x+0{,}25y \leqslant 30 \\ 0{,}8x \leqslant 60 \\ 6x+10y \leqslant 900, \end{cases}$$

kus $x \geqslant 0$ ja $y \geqslant 0$, lahendite hulgast selline, mis annab suurima väärtuse avaldisele $c = 300x + 400y$.

Leiame graafiliselt selle võrratusesüsteemi lahendite piirkonna:



Leida tuleb leida, millise x ja y korral saadud piirkonnast on avaldise $c = 300x + 400y$ väärtus suurim.

Teame, et $ax + by = c$ kujutab endast sirge võrrandit.

Avaldame sellest võrrandist y:

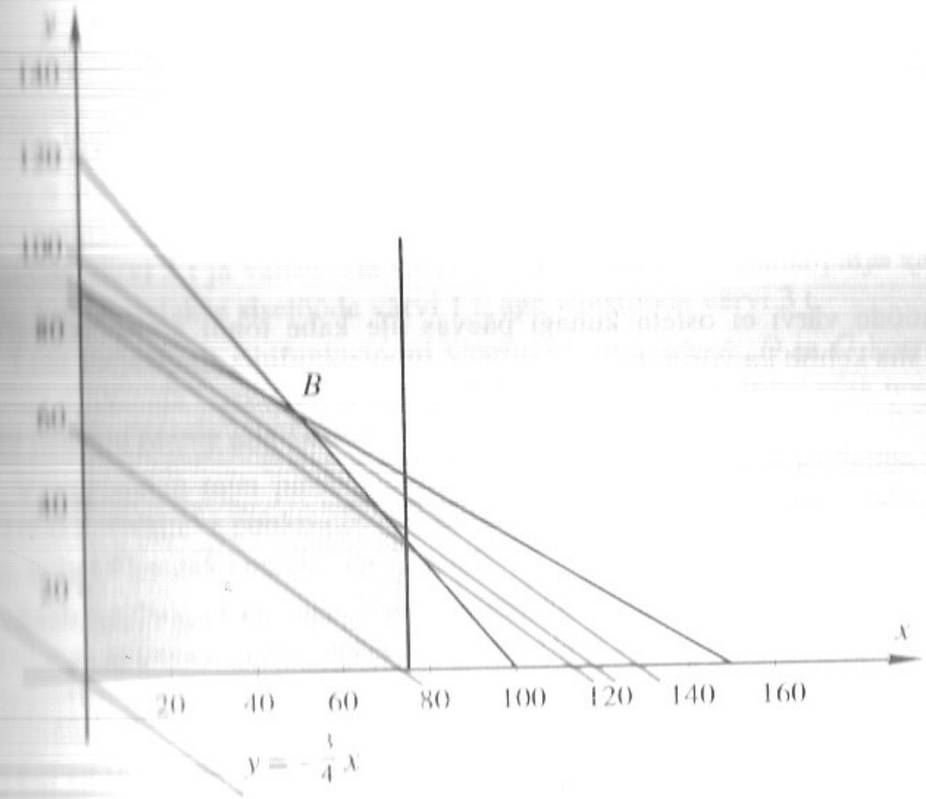
$by = -ax + c$,

$y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}$.

Võtame $c = 0$, saame sirge $y = -\frac{a}{b}x$. Joonestame selle sirge läbi lahendite piirkonna. Meie näite korral $y = -\frac{300}{400}x = -\frac{3}{4}x$.

Seejärel joonestame läbi lahendite piirkonna kõigi tippude antud sirgega paralleelsed sirged. Avaldise $c = 300x + 400y$ väärtus on maksimaalne selles punktis, mida läbiva sirge algordinaat on suurim. Lihtne on veenduda, et selliseks punktiks on $B(50; 60)$.

Selles punktis $c = 300x + 400y = 300 \cdot 50 + 400 \cdot 60 = 39\,000$.



Avaldist, mille maksimumi (või miinimumi) me lahendite piirkonnas otsime, nimetatakse **sihifunktsiooniks**. Antud ülesandes oli sihifunktsiooniks müügitulu $c = 300x + 400y$. Meie otsisime x ja y väärtusi, mille korral sihifunktsioon oleks maksimaalne. Lahendit, mille korral sihifunktsioon on maksimaalne (teatud ülesannete korral minimaalne), nimetatakse ***optimaalseks lahendiks***.

Seega optimaalne lahend on (50; 60). Võime öelda, et antud materjalist ja tisleritöökojal mõistlik teha 50 puhvetikappi ja 60 kirjutuslauda.

Näide. Väike keemiatehas „Smell" toodab kahte liiki värve: sisetööde (S) ja välistööde (V). Mõlemad värvid segatakse kokku kahest lähteainest A ja B. Ööpäevas võib tuua lattu 7 t komponenti A ja 8 t komponenti B. Sisetööde värv koosneb ühest osast A-st ja kahest osast B-st. Välistööde värv koosneb kahest osast A-st ja ühest osast B-st. Tonni sisetööde värvi müügi pealt saab teha 2000$ kasumit. Tonn välistööde värvi annab 4000$ kasumit. On teada, et välistööde värvi ei osteta kunagi sisetööde värvist päevas üle 2 tonni rohkem. Kui palju tuleks toota sisetööde värvi ja kui palju välistööde värvi, et kogukasum oleks suurim? Esitame osa ülesande tingimustest tabelina.

Lähteaine	Lähteaine kulu		Lähteaine varud (t)
	Värv S	Värv V	
A	1	2	7
B	2	1	8
Kasum 1 t värvi tootmisel	2000 $	4000 $	

Kui sisetööde värvi toota x tonni päevas ja välistööde värvi y tonni päevas, siis peavad kehtima võrratused:

$$\begin{cases} x+2y \leqslant 7 \\ 2x+y \leqslant 8. \end{cases}$$

Et välistööde värvi ei osteta kunagi päevas üle kahe tonni sisetööde värvist rohkem, siis kehtib ka võrratus

$$y-x \leqslant 2$$

Toodang annab kasumit $2000x + 4000y$ $.

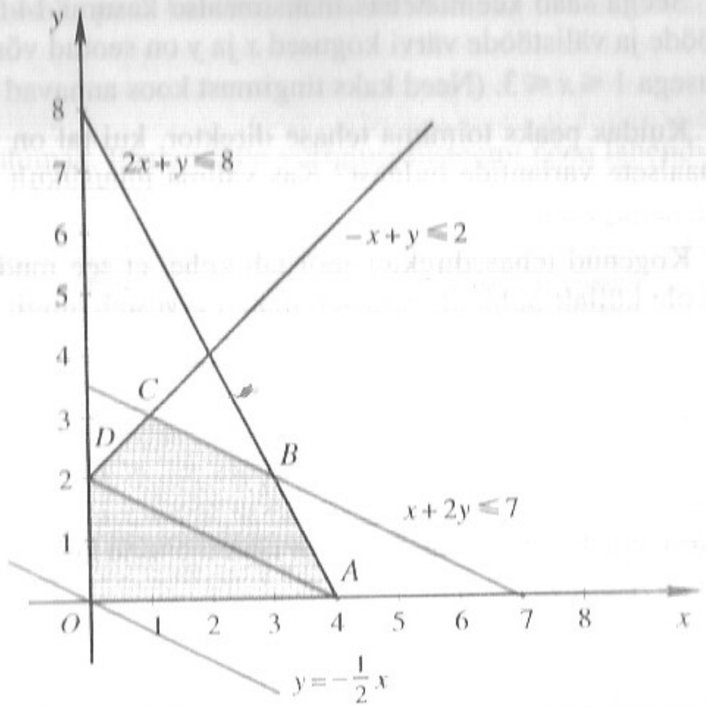
Seega peame leidma lineaarvõrratuste süsteemi

$$\begin{cases} x+2y \leqslant 7 \\ 2x+y \leqslant 8 \\ -x+y \leqslant 2, \end{cases}$$

kus $x \geqslant 0$ ja $y \geqslant 0$, lahendite hulgast sellise arvupaari, mille korral avaldisel $c = 2000x + 4000y$ on maksimaalne väärtus.

Joonestades lahendite piirkonna, saame järgmisel leheküljel toodud joonise.

Nüüd leiame lahendite piirkonnas sellise punkti, kus avaldisel $c = 2000x + 4000y$ oleks maksimaalne väärtus. Võttes $c = 0$, saame sirge $y = -\frac{1}{2}x$ võrrandi. Kanname joonisele selle sirge ja läbi punktide A, B, C ja D temaga paralleelsed sirged. Kõige suurem algordinaat on sirgel, mis läbib *kahte tippu*, punkte $B(3; 2)$ ja $C(1; 3)$.



Leiame sihifunktsiooni väärtused neis punktides:

$c_1 = 2000 \cdot 3 + 4000 \cdot 2 = 14\,000$ $ ja

$c_2 = 2000 \cdot 1 + 4000 \cdot 3 = 14\,000$ $.

Sihifunktsiooni väärtused neis punktides on võrdsed. Seega, kui tehas toodab sisetööde värvi 3 t ja välistööde värvi 2 t, siis saadakse niisama palju kasumit kui siis, kui toodetakse sisetööde värvi 1 t, aga välistööde värvi 3 t.

Leia iseseisvalt sihifunktsiooni väärtused punktide A, D ja O korral, samuti mõne piirkonna sisepunkti (näiteks (2; 2)) korral. Kontrolliks: kõik need tulemused peaksid olema alla 14 000 $.

Võttes mõne muu punkti lõigult BC saame ikka sihifunktsiooni väärtuseks 14 000 $. (Näiteks punkti (2; 2,5) korral $c = 2000 \cdot 2 + 2{,}5 \cdot 4000 = 14\,000$ $.) Seega, antud ülesandel on üle ühe lahendi.

Saab näidata, et kui lineaarplaneerimisülesande lahendihulk eksisteerib ja on sisaldav sõunas *tokestatud* (ei moodusta lõpmatusse ulatuvat piirkonda), siis on planeerimisülesanne lahenduv ja optimaalsete lahendite arvu kohta võib öelda järgmist:

a) kui sihifunktsiooniga määratud sirged ei ole paralleelsed piirkonna ühegi rajajoone lõiguga, siis on ainult üks optimaalne lahend;

b) kui sihifunktsiooniga määratud sirged on paralleelsed piirkonna optimaalset tippu läbiva lõiguga, siis on lahendeid lõpmata palju ja lahenditeks sobivad kõik selle rajajoone lõigu punktid.

Keemiatehase näites on piirkonna üheks rajasirgeks $x + 2y = 7$. See sirge on paralleelne sirgega $y = -\frac{1}{2}x$.

Seega saab keemiatehas maksimaalse kasumi 14 000 \$, kui toodetavad sisetööde ja välistööde värvi kogused x ja y on seotud võrdusega $x + 2y = 7$ ja võrratusega $1 \leq x \leq 3$. (Need kaks tingimust koos annavad meile lõigu BC punktid.)

Kuidas peaks toimima tehase direktor, kui tal on valida lõpmatu hulga optimaalsete variantide hulgast? Kas valima juhuslikult ühe punkti sellest lõigust? Ei, sugugi mitte.

Kogenud tehasedirektor mõistab kohe, et see mudel, mille meie koostasime, ei ole küllalt põhjalik, sest see mudel arvestab ainult värvi müügist saadavat tulu. Tootmises on aga palju muid piiravaid tingimusi: erinev tööviljakus erinevate toodete valmistamisel, kulutused töötasule, kuidas toota nii, et tooraine kulu oleks vähim jne.

Kui direktor seab eesmärgiks toota nii, et komponente A ja B jääks võimalikult palju järele, siis ta näeb, et kui toota 3 t sisetööde värvi ja 2 t välistööde värvi, siis kulutame me ära kogu lähtetooraine hulga:

$$\begin{cases} 3\cdot 1 + 2\cdot 2 = 7 \\ 3\cdot 2 + 2\cdot 1 = 8. \end{cases}$$

Kui aga toota 1 t sisetööde värvi ja 3 t välistööde värvi, siis jääb 3 t lähteainet B üle:

$$\begin{cases} 1\cdot 1 + 3\cdot 2 = 7 \\ 1\cdot 2 + 3\cdot 1 = 5 < 8. \end{cases}$$

Saab näidata, et sellise lahenduse korral (1 t sisetöödeks ja 3 t välistöödeks) on lähteainete ülejääk suurim. Seega — seni kuni turg ei ole „üle küllastatud" välistööde värvist ja nõudlus püsib, on kasulik toota 1 t sisetööde värvi ja 3 t välistööde värvi päevas.

Planeerimisülesande lahendite piirkond võib olla ka tõkestamata hulk ning vahel on vaja leida ka sihifunktsiooni minimaalset väärtust.

Näide: Broileritibu vajab iga päev vähemalt 15 ühikut vitamiini B_1 ja vähemalt 15 ühikut vitamiini B_2. Ta saab neid segudest H ja K. Segu H 1 g sisaldab 1 ühiku B_1, 5 ühikut B_2 ja maksab 1 sent. Segu K 1 g sisaldab 5 ühikut B_1, 1 ühiku B_2 ja maksab 3 senti. Koostame päevase toiduratsiooni segudest H ja K nii, et broileri vitamiinivajadus oleks rahuldatud ja kulutused oleksid minimaalsed.

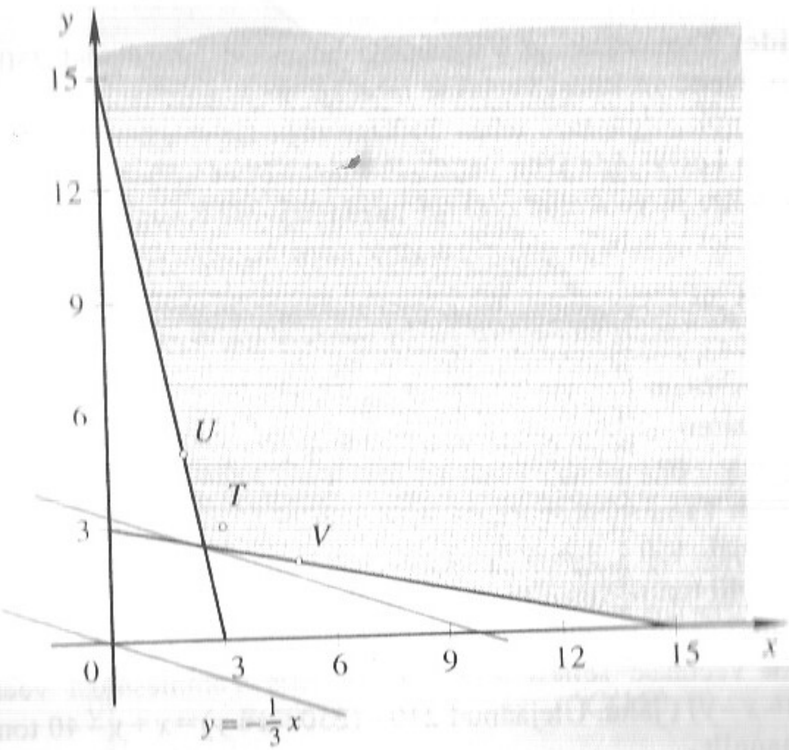
Tähistame otsitavad ainehulgad x ja y-ga (loomulik on, et $x \geq 0$ ja $y \geq 0$). Ülesande tingimused märgime tabelisse:

Segu	B1	B2	Hind (sentides)	Kasutame (g)
H	1	5	1	x
K	5	1	3	y
Vajadus	15	15	min	

Vitamiinivajaduse rahuldamiseks peab kehtima võrratusesüsteem

$$\begin{cases} x + 5y \geq 15 \\ 5x + y \geq 15. \end{cases}$$

Selleks, et kulud oleksid vähimad, leiame selle võrratusesüsteemi need lahendid, mille korral avaldise $c = x + 3y$ väärtus oleks vähim.



Süsteemi lahendite hulk on tõkestamata hulk, sest pole määratud vajaliku vitamiinikoguse ülemmäära.

Kulud $x + 3y$ on minimaalsed punktis $S(2{,}5;\ 2{,}5)$. Siis on kulutused ühele broileritibule $c = 1\cdot 2{,}5 + 3\cdot 2{,}5 = 10$ senti.

Seega, broiler peab saama mõlemat segu 2,5 g. Ülesanne on lahendatud, kui segusid saab eraldada poolegrammise täpsusega.

Aga mida teha siis, kui segud H ja K on ühegrammistes graanulites, mida poolitama ei ole mõtet hakata? Siis tuleb see planeerimisülesanne *lahendada täisarvudes*. Seega peame leidma lahendihulgast sellised täisarvud x ja y, mille korral $c = x + 3y$ on vähim.

Leiame punkti $S(2{,}5;\ 2{,}5)$ ümbrusest veel selliseid punkte, mille koordinaadid on täisarvud ja mis kuuluvad lahendite piirkonda. Need punktid on $T(3;\ 3)$, $U(2;\ 5)$ ja $V(5;\ 2)$. Leiame avaldise $x + 3y$ väärtuse neis punktides:

punktis T: $c = 1\cdot 3 + 3\cdot 3 = 12$,
punktis U: $c = 1\cdot 2 + 3\cdot 5 = 17$,
punktis V: $c = 1\cdot 5 + 3\cdot 2 = 11$.

Joonestame sirgega $x + 3y = 0$ paralleelseid sirgeid läbi nende punktide. Näeme, et algordinaat on vähim sellel sirgel, mis läbib punkti (5; 2). Seega, juhul, kui segud on antud ühegrammistes graanulites, on mõistlik anda broilerile 5 grammi segu H ja 2 grammi segu K.

Üheks tuntud lineaarplaneerimise ülesande tüübiks on nn. *transpordiülesanne*. Järgmine näide ongi üks tüüpiline transpordiülesanne.

Näide: Tammesalu ja Viljaanni jahuveskid jahvatavad 250 ja 350 tonni jahu kuus. Neist veskitest veetakse jahu kolme leivatehasesse. Rukkivere tehas vajab 150 tonni, Ahjusaare tehas 240 tonni ja Leivamäe tehas 210 tonni jahu kuus. Kuidas korraldada jahu vedu veskitest nii, et kõik tehased saaksid oma koguse jahu kätte ja veokulud oleksid minimaalsed? Kaugused veskite ja tehaste vahel on järgnevas tabelis olevate arvude kordsed.

	Rukkivere	Ahjusaare	Leivamäe
Tammesalu	4	3	5
Viljaanni	5	6	4

Veetagu Tammesalust Rukkiverre x tonni ja Ahjusaarde y tonni jahu. Et Rukkivere vajab 150 t, siis Viljaannilt peab ta saama $(150 - x)$ t jahu. Et Ahjusaare vajab 240 tonni, siis Viljaannilt peab ta saama veel juurde $(240 - y)$ tonni jahu. Et Tammesalu suudab toota 250 tonni jahu kuus ja Rukkiverre ning Ahjusaarde kokku veetakse sellest $x + y$ tonni, siis Tammesalust veetakse Leivamäele $(250 - x - y)$ t jahu. Ülejäänud $210 - (250 - x - y) = x + y - 40$ tonni saab Leivamäe Viljaannilt.

Seega näeks vedude plaan välja nii:

	Rukkivere	Ahjusaare	Leivamäe
Tammesalu	x	y	$250 - x - y$
Viljaanni	$150 - x$	$240 - y$	$x + y - 40$

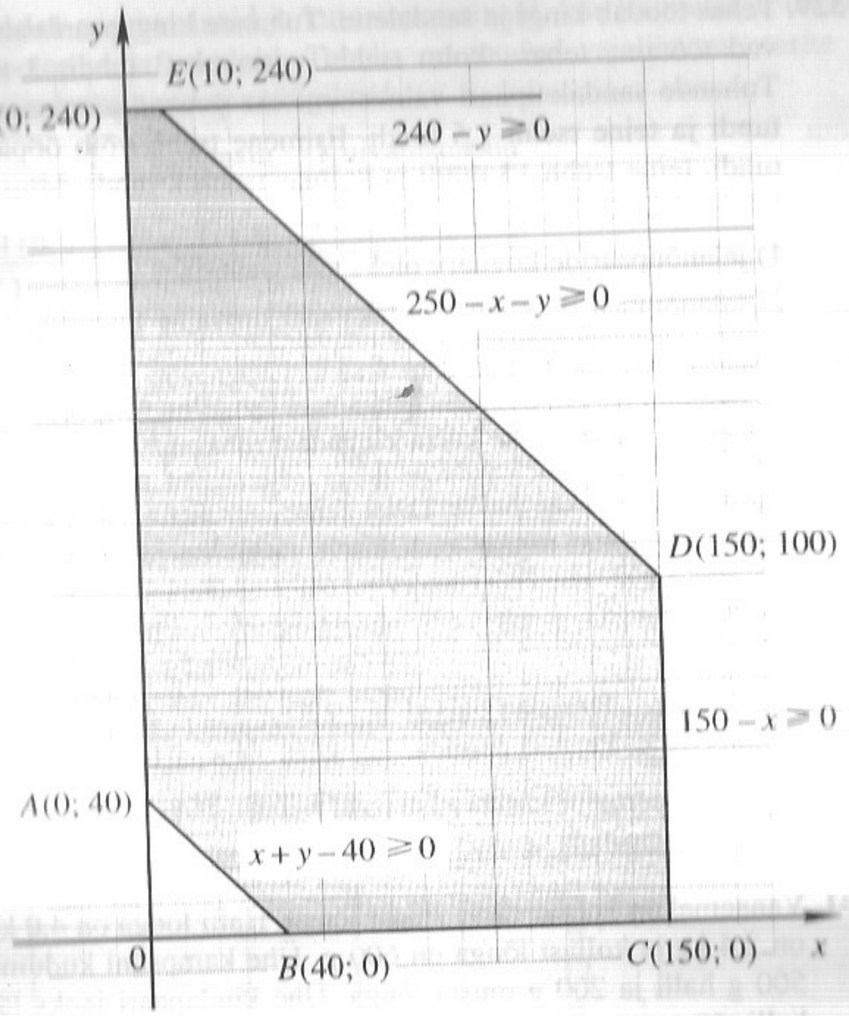
Et leida vedude kogumaksumust, selleks tuleb korrutada selles tabelis olevad arvud eelmises tabelis olevate vastavate arvudega ja tulemused liita. Saame avaldise

$$c = 4x + 3y + 5(250 - x - y) + 5(150 - x) + 6(240 - y) + 4(x + y - 40) - \\ = -2x - 4y + 3280.$$

Selle avaldise minimaalseid väärtusi otsime lahendite piirkonnast. Et veskist leivatehasesse veetava vilja kogus ei saa olla negatiivne, siis saame võrratused:

$$x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ 250 - x - y \geqslant 0,\ 150 - x \geqslant 0,\ 240 - y \geqslant 0,\ x + y - 40 \geqslant 0.$$

Nende võrratuste poolt määratud tasandiosa ongi selle ülesande lahendihulgaks:



Arvutades avaldise $-2x - 4y + 3280$ väärtuse selle piirkonna tippudes, saame

$c(0; 40) = 3120$, $c(40; 0) = 3200$, $c(0; 240) = 2320$,
$c(150; 0) = 2980$, $c(150; 100) = 2580$, $c(10; 240) = 2300$.

Saadud väärtustest on vähim 2300, see saadakse, kui $x = 10$ ja $y = 240$. Asendades x ja y väärtused viimasesse tabelisse, saame optimaalse vedude korralduse plaani:

	Rukkivere	Ahjusaare	Leivamäe
Tammesalu	10	240	0
Viljaanni	140	0	210

1338. Talumees peab lehmi ja kitsi. Tal on 4 ha karjamaad. Üks lehm vajab 25 a karjamaad, kits 10 a. Loomalaut on 18 lehma ja 30 kitse jaoks mõeldud. Mitu lehma ja mitu kitse peab talumees pidama, kui aastane kasum lehmalt on 500 kr ja kitselt 50 kr?

1329. Tehas toodab kingi ja sandalette. Tuhande kingapaari valmistamiseks peavad töötama tehase kolm tsehhi vastavalt 3 tundi, 3 tundi ja 2 tundi. Tuhande sandaletipaari valmistamiseks peavad töötama esimene tsehh 4 tundi ja teine tsehh 1,5 tundi. Esimene tsehh võib ööpäevas töötada 14 tundi, teine tsehh 15 tundi ja kolmas tsehh 8 tundi. Mitu paari sandaleti tuleb tehases päevas valmistada, et

1) jalanõupaaride koguarv oleks maksimaalne;

2) jalanõupaaride koguarv oleks maksimaalne tingimusel, et kingi toodetaks vähemalt 4000;

3) jalanõupaaride koguarv oleks maksimaalne tingimusel, et sandalette ei toodetakse üle kahe korra kingadest rohkem?

1330. Saeveskis saetakse palke kahel erineva võimsusega saeraamil. Järgnevas tabelis on antud tunnis keskmiselt saetavate palkide arv sõltuvalt nende jämedusest.

Materjal	Hulk	Tunnis saetakse	
		I saeraam	II saeraam
Jämedad palgid	120	4	3
Peened palgid	240	6	12

Mõlema saeraami kasutamise tund maksab 5 kr. Kui kaua tuleks kumbagi saeraami kasutada, et palkide saagimise eest tuleks vähem maksta?

1331. Vanaemal on kolme värvi villast lõnga. Halli lõnga on 4,0 kg, musta lõnga on 2,4 kg ja kollast lõnga on 600 g. Ühe kampsuni kudumisel läheb vaja 500 g halli ja 200 g musta lõnga. Ühe kindapaari jaoks läheb vaja 50 g halli, 60 g musta ja 20 g kollast lõnga. Ühe kampsuni kudumiseks kulub vanaemal 5 päeva, kindapaari teeb ta valmis ühe päevaga. Vanaema tahab kudumistööga teenida pensionilisa. Et õpiku kirjutamise ja ülesande lahendamise vahel on muutunud hinnad ja ka rahaühikud, siis kampsuni hinda ja kindapaari hinda me siinkohal märkima ei hakka, oletame ainult, et kampsun maksab kindapaarist 6 korda rohkem. Mitu kampsunit ja mitu paari kindaid peab kuduma sellest lõngast vanaema, et saada suuremat tulu?

1332. Ühes kilos kirssides ja aprikoosides on järgmisel hulgal A- ja C-vitamiini.

	A (mg)	C (mg)
Kirsid	3	150
Aprikoosid	24	75

Mitu grammi kirsse ja aprikoose peaks olema päevases ratsioonis, et seal oleks vähemalt 6 mg A-vitamiini ja 75 mg C-vitamiini? Kirsside ja aprikooside kilogrammi hind on 2 rbl.

(Ülesanne on venekeelse ajakirja „KVANT" 1989. a. juuninumbrist.)

1333. Vabrik toodab pesumasinaid ja kuivatusmasinaid, kus kasutatakse ühesuguseid mootoreid ja trumleid. Tabelis on toodud vajalike mootorite ja trumlite arvud ning toodete müügihind.

	Pesumasin	Kuivatusmasin
Mootor (tk.)	2	1
Trummel (tk.)	1	3
Hind (kr.)	100	75

Vabrik saab päevas 200 mootorit ja 300 trumlit. Missugune peaks olema päevas toodetavate pesumasinate ja kuivatusmasinate arv, et saada suurimat müügihinda? Kui suur on see müügihind?

1334. Tsehhis toodetakse kahte liiki elektrimootoreid. Üht liiki mootori tegemiseks kulub 4 kg vasktraati ja 30 töötundi. Teist liiki mootori valmistamiseks kulub 2 kg vasktraati ja 50 töötundi. Mootorite tootmiseks on kasutada 12 000 töötundi ja 1320 kg vasktraati kuus. Mootorite hinnad on vastavalt 300 ja 250 kr. Mitu kumbagi liiki mootorit tuleks valmistada, et äsetulek müügist oleks maksimaalne?

1335. Põllu ühele hektarile külvatav väetis peab sisaldama elemente A, B, C ja D mitte vähem kui tabelis toodud arvud. Väetist saab valmistada kahe lähteaine abil, mille elementidesisaldus on ka tabelis.

Element	Elementidesisaldus lähteaines		Vaja 1 ha jaoks
	I	II	
A	2	1	6
B	2	4	12
C	—	4	4
D	6	—	9

Esimese lähteaine ühik maksab 5 kr., teisel 6 kr. Kuidas koostada nõuetele vastav, kuid sealjuures võimalikult odav segu?

1336. Puidutöökotta toodi 130 m^2 vineeri ja 20 tihumeetrit laudu. Töökoda teeb riiuleid ja köögikappe. Andmed puidu kulu kohta on järgmised:

Tooted	Vineer (m^2)	Lauad (tm)
10 riiulit	9	0,6
10 köögikappi	50	0,9

Ühe riiuli müügist saab töökoda 32 kr. ja köögikapi müügist 45 kr. tulu. Kui palju peab töökoda kumbagi toodet valmistama, et saadav tulu oleks suurim? Seejuures on nõutud valmistada vähemalt 5 köögikappi ja vähemalt 20 riiulit.

1337. Linna raamatukogu täiendatakse aastas vähemalt 200 raamatu võrra. Lugejate soovide põhjal ostab raamatukogu romaane vähemalt 2 korda rohkem kui erialast kirjandust. Samas on otsustatud, et aastas ei osteta üle

400 romaani. Ühe romaani hind on keskmiselt 12 kr ja erialase käsiraamatu hind 15 kr. Mitu romaani ja mitu erialast raamatut ostetakse, kui raha on 6000 kr? Eesmärk on osta võimalikult palju raamatuid.

1338. Karusloomafarmis kasutatakse loomade söötmisel kahte liiki sööta. Esimest liiki sööda kilogramm sisaldab 2 ühikut ainet A, 2 ühikut ainet B ja 4 ühikut ainet C (näiteks valku, rasva ja süsivesikuid) ja maksab 3 kr. Teist liiki sööda kilogramm sisaldab 3 ühikut ainet A, 2 ühikut ainet B ja 1 ühiku ainet C ja maksab 2 kr. On teada, et karusloomale on vaja ööpäevas 6 ühikut ainet A, 8 ühikut ainet B ja 12 ühikut ainet C. Koosta ratsioon, mille korral karusloom saaks kõiki talle vajalikke aineid ja mis oleks odavaim.

1339. Melhior koosneb 1 osast niklist ja 5 osast vasest, uushõbe koosneb 3 osast niklist, 4 osast tsingist ja 13 osast vasest. Juveliiritöökoda teeb neist metallidest 100 g raskuseid lusikaid. Laos on 12 kg niklit, 65 kg vaske ja 11 kg tsinki. Uushõbedast lusikas maksab neli korda rohkem, kui melhiorist lusikas. Kui palju tuleb teha melhiorist ja kui palju uushõbedast lusikaid, et toodangu maksumus oleks võimalikult suur?

1340. Kaks sauna — Kalamaja saun ja Kivimäe saun on leppinud kokku sõjaväega, et nendes saunades saab iga nädal pesta end vastavalt 600 ja 400 sõdurpoissi. Sõjaväelased, kes neis saunades pesemas hakkavad käima, teenivad kolmes väeosas: Tondil 500 meest, Juhkentalis 200 meest ja Paljassaarel 300 meest. Toome ära tabeli, kus on kirjas see, kui palju maksab ühe sõduri sõit oma sõjaväeosast sauna ja tagasi (hinnad sentides):

Sõjaväeosa	Kalamaja saun	Kivimäe saun
Tondil	40	30
Juhkentalis	20	15
Paljassaarel	25	45

Kui palju sõdureid peab igast sõjaväeosast minema Kalamaja sauna, kui palju Kivimäe sauna, et sõidukulud oleksid minimaalsed?

1341. General Motorsi autotehased asuvad Los Angelesis, Detroidis ja New Orleansis. Toodangu jaotuspunktid on Denveris ja Miamis. Tehased toodavad vastavalt 1000, 1500 ja 1200 autot kvartalis. Müügi-jaotuspunktid vajavad vastavalt 2300 ja 1400 autot kvartalis. Autosid veetakse mööda raudteed, kusjuures ühe miili veokulu on 8 senti. Tehaste ja jaotuskeskuste vahekaugused miilides on toodud järgmises tabelis:

	Los Angeles	Detroit	New Orleans
Denver	1000	1250	1275
Miami	2690	1350	850

Kuidas tuleb korraldada autode vedu tehastest müügi-jaotuskeskustesse, et veokulud oleksid minimaalsed?

1342. Talumehel on kaks maatükki, 8 ha ja 9 ha. Nisu hektarisaak on esimesel maatükil 24 ts, teisel 21 ts. Odra hektarisaak on vastavalt 35 ts ja 30 ts. Ühe tsentneri nisu müügist saaks talumees 16 kr, ja ühe tsentneri odra müügist 9 kr. Kui palju tuleb külvata kummalegi maatükile nisu ja otra, et saada võimalikult palju raha? Oletame täiendavalt, et talunik tahab saada vähemalt 225 ts nisu ja 220 ts otra. Kui suurele pinnale tuleks nüüd külvata neil maatükkidel nisu ja otra?

1343. Vabrik vajab 300 2 meetri pikkust ja 200 3 m pikkust lauda. Need lõigatakse 7,5 m pikkustest laudadest. Kuidas tuleks laudu tükeldada, et lähtematerjali kuluks võimalikult vähe?

1344. 20 cm pikkustest varrastest tuleb valmistada 5 cm, 7 cm ja 9 cm pikkusi polte vastavalt 150, 200 ja 300 tk. Polte saab tükkideks lõigata kuuel viisil. Tabelis on saadav poltide arv ja tekkivad jäägid.

	1	2	3	4	5	6	Vajalik poltide arv
9	1	0	1	0	0	2	300
7	1	1	0	0	2	0	200
5	0	2	2	4	1	0	150
Jäägid	4	3	1	0	1	2	

Kuidas tuleks vardaid tükeldada, et neid kuluks võimalikult vähe?

1345. Paberirulle laiusega 80 cm tuleb lõigata 20 cm, 30 cm ja 35 cm laiusteks rullideks. Neid rulle on vaja saada vastavalt 1000, 1600 ja 740 tükki. Kuidas tuleb rulle tükeldada, et jäätmete koguhulk oleks minimaalne?

1346. Suurtest metall-lehtedest mõõtmetega 6×13 meetrit lõigatakse kahesuguse suurusega toorikuid: mõõtmetega 5×4 meetrit ja 2×3 meetrit. Vaja on 300 suuremat toorikut ja 1500 väiksemat toorikut. Kuidas tuleb neid suuri metall-lehti lõigata toorikuteks, et toorikuid oleks võimalikult palju ja jäätmeid võimalikult vähe?

Järgnev arvutiprogramm võimaldab lahendada graafilise lineaarplaneerimise ülesandeid. Sisestada tuleb võrratusesüsteemi kordajad a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2 jne. Et programm oleks lühike ja kergesti loetav, siis on eeldatud, et lahendite piirkonna võrratused tuleb enne kordajate sisestamist viia kujule $A_i x + B_i y \leq C_i$ (kus $i = 0; 1; 2; \ldots; n$).

Programm otsib sihifunktsiooni maksimaalseid väärtusi ühe ristküliku seest ja leiab kõigepealt kindlaks, kas kontrollitav punkt on lahendite piirkonnas. Ristkü-

liku kaks külge on koordinaatteljed. Pikkuse ja laiuse sisestab aga programmi kasutaja.

Peab ütlema, et sihifunktsiooni maksimaalseid ja minimaalseid väärtusi leiab see programm aeglaselt ja vahel ka ligikaudselt. Eesmärgiks oli programmi lihtsus. Juhul, kui x-i või y-i muutumise samm on liiga väike, siis see programm töötab liiga kaua.

```
10 INPUT "Mitu võrratust? ",N
20 DIM A(N), B(N), C(N)
30 PRINT "Vii võrratused enne kordajate sisestamist kujule"
40 PRINT "Ax+By<C"
50 MAX=-32767:MIN=32767 'MAX saab võimalikult väikese, MIN suure väärtuse.
60 FOR I=1 TO N
70 PRINT "Anna A(";I;") ";:INPUT A(I)
80 PRINT "Anna B(";I;") ";:INPUT B(I)
90 PRINT "Anna C(";I;") ";:INPUT C(I)
100 NEXT I
110 PRINT "Sisesta sihifunktsiooni kordaja A ";:INPUT A
120 PRINT "Sisesta sihifunktsiooni kordaja B ";:INPUT B
130 PRINT "Sisesta piirkonna parem äär ";:INPUT K
140 PRINT "Sisesta piirkonna ülemine äär ";:INPUT L
150 PRINT "Sisesta x-i muutumise samm ";:INPUT DX
160 PRINT "Sisesta y-i muutumise samm ";:INPUT DY
170 FOR X=-DX TO K STEP DX
180 FOR Y=0 TO L STEP DY
190 I=1
200 IF A(I)*X+B(I)*Y>C(I) THEN 310
210 I=I+1:IF I<N+1 THEN 200
220 C=A*X+B*Y
230 IF C<> MAX THEN 250
240 MAX2=C:XMAX2=X:YMAX2=Y:GOTO 310 'Kui c = MAX
250 IF C<MAX THEN 270
260 MAX=C:XMAX=X:YMAX=Y:GOTO 310 'Kui c > MAX
270 IF C<>MIN THEN 290
280 MIN2=C:XMIN2=X:YMIN2=Y:GOTO 310 'Kui c = MIN
290 IF C>MIN THEN 310
300 MIN=C:XMIN=X:YMIN=Y:GOTO 310 'Kui c < MIN
310 NEXT Y
320 NEXT X
330 IF MAX=MAX2 THEN 360 'Kui maksimaalne väärtus on kahes punktis
340 PRINT "Sihifunktsioon on suurim punktis (";XMAX;";";YMAX;")"
345 PRINT "Väärtusega ";MAX
350 GOTO 380
360 PRINT "Sihifunktsioon on suurim lõigus (";XMAX;";";YMAX;
370 PRINT ") kuni (";XMAX2;";";YMAX2;") väärtusega ";MAX
380 IF MIN=MIN2 THEN 410 'Kui minimaalne väärtus on kahes punktis
390 PRINT "Sihifunktsioon on vähim punktis (";XMIN;";";YMIN;")"
395 PRINT "väärtusega ";MIN
400 GOTO 430
410 PRINT "Sihifunktsioon on vähim lõigus (";XMIN;";";YMIN;
420 PRINT ") kuni (";XMIN2;";";YMIN2;") väärtusega ";MIN
430 END
```


Käivitame seda programmi meie poolt õpitud broileritibude näites saadud võrratusesüsteemi $\begin{cases} x+5y \geq 15 \\ 5x+y \geq 15 \end{cases}$ nende lahendite leidmiseks, mille korral oli avaldise $z = x + 3y$ väärtus minimaalne:

```
RUN
Mitu võrratust? 2
Vii võrratused enne kordajate sisestamist kujule
Ax + By < C
Anna A(1)? 1
Anna B(1)? 5
Anna C(1)? 15
Anna A(2)? 5
Anna B(2)? 1
Anna C(2)? 15
Sisesta sihifunktsiooni kordaja A? 1
Sisesta sihifunktsiooni kordaja B? 3
Sisesta piirkonna parem äär? 20
Sisesta piirkonna ülemine äär? 20
Sisesta muutuja x muutumise samm? 0.5
Sisesta muutuja y muutumise samm? 0.5
Sihifunktsioon on suurim punktis (20; 20) väärtusega 80
Sihifunktsioon on vähim punktis (2.5; 2.5) väärtusega 10
```

Kui me oleksime x-i ja y-i muutumise sammudeks sisestanud ühed (täisarvuline planeerimisülesanne 1 g graanulitega), siis oleksime saanud tulemuseks, et sihifunktsioon on vähim punktis (5; 2) väärtusega 11.

Püüa selle programmi abil kontrollida seni lahendatud lineaarplaneerimise ülesannete tulemusi. Kuidas muuta programmi, kui me tahame leida ainult sihifunktsiooni maksimumi (miinimumi)?

VII peatükk. KÜSIMUSI JA ÜLESANDEID 10. KLASSI KURSUSE KORDAMISEKS

1347. Leia avaldise täpne väärtus.

a) $\dfrac{2{,}75:1{,}1+3\frac{1}{3}}{2{,}5-0{,}4\cdot\left(-3\frac{1}{3}\right)}$

b) $\dfrac{3\frac{1}{3}:10+0{,}175:\frac{7}{20}}{1\frac{3}{4}-1\frac{11}{17}\cdot\frac{51}{56}}$

c) $\dfrac{0{,}5^2-0{,}5}{0{,}4^2+0{,}1^2+2\cdot0{,}4\cdot0{,}1}$

d) $(1\frac{3}{5})^2-(4\frac{5}{8}-2{,}4):\frac{5}{8}$

1348. Teisenda harilikuks murruks.

a) 2,(3) b) 0,(6) c) 0,67 d) 1,0(8) e) 1,(34) f) 2 : 3

Kas antud arvude seas on võrdseid arve?

1349. Leia murdude $\frac{5}{11}$; $\frac{23}{25}$; $\frac{19}{99}$; $\frac{123}{321}$; $\frac{345}{543}$; $\frac{567}{765}$ perioodi pikkus. Vajaduse korral kasuta personaalarvuti abi.

1350. Lihtsusta avaldis ja arvuta selle väärtus.

a) $\left(\dfrac{1}{a-3b}-\dfrac{1}{a+3b}+\dfrac{6b}{a^2-9b^2}\right):\dfrac{b(2a+b)}{a^2-9b^2}$, kui $a=b=1$

b) $\left(\dfrac{3}{n-1}-\dfrac{3n^2+3n+3}{n^2-1}:\dfrac{n^4-n}{n^3+1}\right)\cdot\dfrac{n-n^2}{3}$, kui $n=-0{,}5$

c) $\left(\dfrac{a}{a^2-x^2}-\dfrac{a}{x^2-2ax+a^2}\right)\cdot\dfrac{(a-x)^2}{a}+\dfrac{2x}{x-a}$, kui $a=0{,}5$ ja $x=1{,}5$

1351. Lihtsusta avaldis.

a) $\dfrac{1+(a+x)^{-1}}{1-(a+x)^{-1}}\cdot\left(1-\dfrac{1-(a^2+x^2)}{2ax}\right)$

b) $\left(\dfrac{5-\sqrt{a}}{5+\sqrt{a}}-\dfrac{\sqrt{a}+5}{\sqrt{a}-5}+2\right)^{-2}$

c) $\left(\dfrac{4}{1-x}+\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}+\dfrac{1+\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}\right)^{-1}$

1352. Lihtsusta avaldis ja arvuta selle väärtus, kui $a=\left(\dfrac{1}{64}\right)^{\frac{2}{3}}\left(2\frac{1}{4}\right)^{-\frac{1}{2}}$

a) $\dfrac{3(a-3)}{a(3-a)}+\dfrac{a+2}{a+6}\cdot\left(\dfrac{a-2}{a+2}-\dfrac{a+2}{a-2}+\dfrac{9}{a}\right)$

b) $\dfrac{3+\dfrac{3}{a-2}}{3-\dfrac{3}{a-2}}$, kui $a=(\sqrt[3]{2}-1)(\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1)$;

c) $3x^4-2x^3+6$, kui $x=\dfrac{1}{\sqrt{2+3^{0{,}5}}}$.

1353. Selgita, mille poolest erinevad arvuhulgad $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{I}$ ja $\mathbb{R}$ üksteisest.

1354. Missugustel tingimustel on lause „võrrandil $x^2+1=0$ lahendeid ei ole" tõene?

1355. Kas järgmised väited on tõesed:

a) kahe irratsionaalarvu korrutis on alati irratsionaalarv;

b) kahe irratsionaalarvu summa on alati irratsionaalarv;

c) kahe ratsionaalarvu summa võib olla irratsionaalarv;

d) mõõtmistulemuseks võime saada irratsionaalarvu?

1356. Selgita, mida tähendab, et ratsionaalarvude hulk on tihe, kuid pole pidev.

1357. Kauba hinda tõsteti 5% ning seejärel alandati samuti 5% võrra. Kauba hinnaks on nüüd 399 kr. Leia kauba esialgne hind.

1358. Esimene arv on teisest 25% võrra väiksem. Mitme protsendi võrra on teine arv esimesest suurem?

1359. Esimene arv on teisest 30% võrra suurem. Mitme protsendi võrra on teine arv esimesest väiksem?

1360. Mitme protsendi võrra suureneb murd, kui nimetajat vähendada k% võrra $(0<k<100)$?

1361. Värsked seened sisaldavad 90% vett, kuivatatud seened aga 12%. Kui palju kuivatatud seeni saab 22 kg värsketest seentest?

1362. Segades 30-protsendilist ja 10-protsendilist soolhapet, saadi 600 grammi 15-protsendilist soolhapet. Mitu grammi kumbagi soolhapet võeti?

1363. Kauba hinda alandati nii mitme protsendi võrra, kui mitu dollarit maksis kaup pärast alfahindlust. Mitme protsendi võrra alandati kauba hinda, kui ta esialgne hind oli 100 dollarit?

1364. Töölise palka tõsteti kahel korral ühe ja sama protsendi võrra. Selle tulemusena tõusis palk 20 dollarilt 24,2 dollarini. Mitme protsendi võrra tõsteti palka kummalgi korral?

1365. Professor saab kuus 1600 dollarit, koristaja palk ühes ettevõttes moodustab sellest 30%. Koristaja töötab üheaegselt neljas ettevõttes. Mitme protsendi võrra tuleb tõsta professori palka, et professor ja koristaja saaksid ühepalju palka?

1366. Väiksem kahest positiivsest arvust moodustab 18% nende arvude summast. Mitu protsenti moodustab suurem nende arvude vahest?

1367. Kahe positiivse arvu vahe moodustab 36% nende arvude summast. Mitu protsenti moodustab suurem arv väiksemast?

1368. Defineeri naturaalarvulise astendajaga aste. Mida tähendab a^1?

1369. Defineeri täisarvulise astendajaga aste. Selgita näidete varal, mida tähendab a^0; a^{-n}.

1370. Defineeri ratsionaalarvulise astendajaga aste.

1371. Selgita, kuidas saab astmete väärtusi leida taskuarvutil (personaalarvutil).

1372. Uuri teatmeteostest, kes võttis esimesena kasutusele astmete kirjutamise tänapäevase esitusviisi. Kuidas enne seda astmeid kirjutati?

1373. Leia avaldise väärtus taskuarvutil täpsusega 0,1.

a) $\sqrt{2}+\frac{5}{9}$ b) $\sqrt{5}-\frac{2}{7}$ c) $\sqrt{3}+\frac{5}{6}$ d) $\sqrt{6}-\frac{1}{11}$

1374. Millal on avaldisel mõte?

a) $\sqrt{a}$ b) $\sqrt{2}$ c) $\sqrt{-a}$ d) $-\sqrt{a}$ e) $\sqrt{a^2}$ f) $(\sqrt{a})^2$

g) $\sqrt{2x-4}$ h) $\sqrt{x^2-1}$ i) $\sqrt{x^2+1}$ j) $\sqrt{x^4+1}$

1375. Selgita, kas kehtib võrdus $\sqrt{a^2}=(\sqrt{a})^2$.

1376. Tõesta, et $\sqrt{a^{2n}}=|a|^n$, kui $a\in\mathbb{R}$ ja $n\in\mathbb{N}$.

1377. Lihtsusta.

a) $\sqrt{a^3b}\cdot\sqrt{ab^5}$, kui $a\geq 0$ ja $b\geq 0$;

b) $\dfrac{\sqrt{a^6a^3}}{\sqrt{ab^5}}$, kui $a>0$ ja $b>0$;

c) $\dfrac{\sqrt{a^3b^3}\cdot\sqrt{a^5b}}{\sqrt{ab}}$, kui $a>0$ ja $b>0$;

d) $(\sqrt{a^2-a^2b}-\sqrt{b^2-b^3}):(a-b)$, kui $a>0$ ja $0<b<1$.

1378. Võrdle arve $\sqrt{7}+\sqrt{5}$ ja $\sqrt{24{,}2}$ juure väärtusi arvutamata.

1379. Arvuta.

a) $(\frac{1}{16})^{0,5}+16^{0,75}+(0{,}5)^{-5}+\pi^0\cdot 5$

b) $(\frac{1}{3})^{-10}\cdot 27^{-3}+0{,}2^{-4}\cdot 25^{-2}+(64^{-\frac{1}{9}})^3$

c) $72^{1,5}\cdot 108^{-\frac{2}{3}}\cdot 144^{0,75}\cdot(13{,}5)^{\frac{1}{6}}$

1380. Lihtsusta avaldis.

a) $\left(\dfrac{2}{a^{0,5}-b^{0,5}}-\dfrac{2a^{0,5}}{a^{1,5}+b^{1,5}}\cdot\dfrac{a-a^{0,5}b^{0,5}+b}{a^{0,5}-b^{0,5}}\right):4a^{0,5}b^{0,5}$

b) $\left(\dfrac{a^{1,5}+b^{1,5}}{a^{0,5}+b^{0,5}}-a^{0,5}b^{0,5}\right):(a-b)+\dfrac{2b^{0,5}}{a^{0,5}+b^{0,5}}$

c) $\left(\dfrac{m+\sqrt{m^2-n^2}}{m-\sqrt{m^2-n^2}}-\dfrac{m-\sqrt{m^2-n^2}}{m+\sqrt{m^2-n^2}}\right):\dfrac{4m\sqrt{m^2-n^2}}{n^2}$

1381. Mida tähendab, et murru lugeja või nimetaja tuleb vabastada irratsionaalsusest? Too näiteid.

1382. Vabasta murru nimetaja irratsionaalsusest.

a) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ b) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ c) $\dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ d) $\dfrac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$ e) $\dfrac{2\sqrt{8}}{\sqrt{2}}$

f) $\dfrac{9}{3\sqrt{3}-3}$ g) $\dfrac{6}{3\sqrt{2}+4}$ h) $\dfrac{15}{5\sqrt{3}-3\sqrt{5}}$

i) $\dfrac{6}{3+\sqrt{3}-\sqrt{3}}$ j) $\dfrac{2\sqrt{3}}{3\sqrt{2}+4}$ k) $\dfrac{2+\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2-\sqrt{6}+\sqrt{2}}$

1383. Lihtsusta liitradikaali valemi abil.

a) $\sqrt{2-\sqrt{3}}$; b) $\sqrt{7+2\sqrt{10}}$; c) $\sqrt{5+\sqrt{21}}$.

1384. Leia avaldise väärtus.

a) $\sqrt{|12\sqrt{5}-29|}-\sqrt{12\sqrt{5}+29}$ b) $\sqrt{|40\sqrt{2}-57|}-\sqrt{40\sqrt{2}+57}$

(Moskva Riikliku Ülikooli vastuvõtueksami ülesanne 1983. a.)

1385. Vabane irratsionaalsusest murru nimetajas.

$\dfrac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}}$, kui $\frac{a}{x}=\frac{b}{y}=\frac{c}{z}$.

(Ülevenemaalise matemaatika olümpiaadi ülesanne 1939. a.)

1386. Selgita, mis on võrrand, võrdus, samasus.

1387. Selgita, missugused on võrrandi samasusteisendused. Millal võivad tekkida võõrlahendid? Missuguseid teisendusi kasutades on võimalik lahendite kaotsiminek?

1388. Selgita, kuidas lahendatakse lineaarvõrrandeid. Too selle kohta näiteid. Missugune võib olla võrrandi $0x=b$ lahendihulk sõltuvalt b väärtusest?

1389. Lahenda võrrand ja kontrolli lahendeid.

a) $2x-1+\dfrac{3x-4}{2}=\dfrac{x+1}{3}-(1-\dfrac{x+2}{2})$

b) $\dfrac{30}{x^3-1}-\dfrac{13}{x^2+x+1}=\dfrac{7+18x}{x^3-1}$

c) $\dfrac{2x}{x+3}-\dfrac{x}{3-x}=\dfrac{9}{4x^2-36}$

d) $\dfrac{1}{(x-1)(x-2)}+\dfrac{1}{(x-2)(x-3)}=\dfrac{1}{x^2-4x+3}$

e) $\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{x^2+x+1}=\dfrac{x+2}{x^3-1}$

1390. Lahenda võrrand parameetri suhtes ja uuri saadud lahendeid.

a) $\frac{x^2+1}{a^2x-2a}-\frac{1}{2-ax}=\frac{x}{a}$

b) $\frac{a}{bx-x}-\frac{a-1}{x^2-2bx^2+b^2x^2}=1$

c) $(x+a)(x-a)=a$

d) $(x+a)(x-a)-2ax=a(3a-2x)$

e) $(x+13a)^2+9(x+3a)^2=4(x+10a)^2$

f) $(2a+x)(2b+x)+(2a-x)(2b-x)-2a^2-8b^2=0$

g) $(x-1)(x-2)=(a-1)(a-2)$

h) $\frac{(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)}+\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}=1$

1391. Selgita, kuidas lahendatakse taandatud (taandamata) ruutvõrrandit. Kuidas lahendatakse ruutvõrrandit Viète'i valemite abil? Too selle kohta näiteid.

1392. Selgita, kuidas on otstarbekas lahendada mittetäielikke ruutvõrrandeid. Too selle kohta näiteid.

1393. Kuidas lahutatakse ruutkolmliige lineaartegurite korrutiseks?

1394. Tegurda ruutkolmliige.

a) x^2-2x-3 b) x^2-1 c) x^2+1 d) x^2+3x

e) $2x^2-\frac{1}{3}x-\frac{1}{3}$ f) $2x^2-3x-44$ g) $2x^2-6x-8$ h) $3x^2+4x+99$

1395. Lahenda ruutvõrrand parameetri suhtes ja uuri lahendeid.

a) $x^2+ax-4=0$ b) $ax^2-2x-3=0$ c) $x^2+5a=0$

d) $x^2-3x+a=0$ e) $3ax^2-\sqrt{3a}-5=0$ f) $a^2x^2-ax=0$

1396. Milliste k väärtuste korral on võrrandi $x^2-4x-k=0$ üheks lahendiks 0,5?

1397. Leia c väärtused nii, et võrrandis $x^2-12x+c^3=0$ üks lahend oleks teise ruut.

1398. Missugust võrrandit nimetatakse biruutvõrrandiks? Selgita, kuidas selliseid võrrandeid lahendatakse. Too näiteid selliste võrrandite kohta. Tuleta meelde mõni ülesandetüüp (probleemsituatsioon), mille lahendamisel võime jõuda biruutvõrrandini.

1399. Selgita, kas leidub biruutvõrrand, mille lahendid on:

1) 1; 2; 3 ja 4;

2) lahendid on 2 ja 3;

3) lahendid on -2; 2; -3 ja 3. Põhjenda vastuseid.

1400. Selgita, missuguste võtetega oskad lahendada lineaarvõrrandisüsteeme. Mida tähendab lineaarvõrrandisüsteemi lahendamine algebraliselt, geomeetriliselt?

1401. Joonesta teljestikku sirged

a) $y=2x-1$ ja $y=2x+3$;

b) $y=2x-1$ ja $y=-x+8$;

c) $2x-y-1=0$ ja $2x-y+3=0$.

1402. Lahenda lineaarvõrrandisüsteem.

a) $\begin{cases} y=2x-1 \\ 2x-y=-3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} y-2x=-1 \\ y+x=8 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x-y-1=0 \\ 2x-y+3=0 \end{cases}$

Võrdle selles ülesandes saadud tulemusi eelmises ülesandes saadud vastavate tulemustega. Missuguse järelduse teed?

1403. Mida nimetatakse determinandiks? Kuidas arvutatakse kahereal ja kolmereal determinanti?

1404. Kuidas lahendatakse lineaarseid võrrandisüsteeme determinantide abil?

1405. Arvuta.

a) $\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 4 & 0 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 3 & 9 \\ 6 & 9 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} 12 & -4 \\ -2 & 5 \end{vmatrix}$ d) $\begin{vmatrix} a & 1-a \\ s & 1-a \end{vmatrix}$

e) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 5 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix}$ f) $\begin{vmatrix} -2 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ g) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ h) $\begin{vmatrix} a & a & b \\ b & a & a \\ a & b & a \end{vmatrix}$

1406. Leia vajalikud determinandid ning otsusta, kas võrrandisüsteemil on üheselt määratud lahend, lahendeid on lõpmata palju või lahendid puuduvad.

a) $\begin{cases} 3x-5y=5 \\ -x-2y=3; \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x+4y=7 \\ 5x-2y=1; \end{cases}$ c) $\begin{cases} 3x+4y=7 \\ 6x+8y=14 \end{cases}$

Kuidas lahendad sama ülesande ilma determinante kasutamata?

1407. Leia a väärtus nii, et a) süsteemil on üheselt määratud lahend; b) lahendeid on lõpmata palju; c) lahendid puuduvad.

a) $\begin{cases} ax+3y=6 \\ 5x+6y=12; \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2ax-y=5 \\ x+y=3; \end{cases}$ c) $\begin{cases} x+ay=a \\ 2x-y=3. \end{cases}$

1408. Lihtsusta ja seejärel lahenda saadud võrrandisüsteem nii determinantide abil kui ka determinante kasutamata.

a) $\begin{cases} \frac{3x-y}{3}-\frac{x+y}{5}=1 \\ \frac{2y+x}{2}-\frac{2(x-y)}{5}=y-x-1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} \frac{x}{5}-\frac{x+5y}{2}=\frac{y}{5}-4{,}8 \\ \frac{x-y}{2}=x+2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} \frac{5x-3y}{4}-\frac{3x-2y}{5}=1 \\ \frac{4x-3y}{2}-\frac{2x-3y}{3}=1 \end{cases}$ d) $\begin{cases} \frac{x-3y}{4}-2x=-7-\frac{y+5}{3} \\ \frac{10(x-y)-4(1-x)}{3}=y \end{cases}$

1409. Lahenda võrrandisüsteem ja uuri saadud lahendeid.

a) $\begin{cases} x+ay-1=0 \\ ax-3ay-(2a+3)=0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x+ay=5a^2 \\ 3x-ay=a^2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} (a+5)x+(2a+3)y=3a+2 \\ (3a+10)x+(5a+6)y=2a+4 \end{cases}$ d) $\begin{cases} (a^2+b^2)x+(a^2-b^2)y=a^2 \\ (a+b)x+(a-b)y=a \end{cases}$

1410. Võrrandisüsteemis

$$\begin{cases} x+ay=b+c \\ x+by=c+a \\ x+cy=a+b \end{cases}$$

a, b ja c on reaalarvud ning $a^2+b^2+c^2=1$. Kas sellel võrrandisüsteemil on lahendeid? Kui jah, siis leia lahendid.

1411. Leia sellised a väärtused, mille korral võrrandisüsteemil lahendid puuduvad

$$\begin{cases} a^2x+(2-a)y=4+a^3 \\ ax+(2a-1)y=a^5-2 \end{cases}$$

1412. Leia a ja b väärtused, mille korral võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} a^2x-ay=1-a \\ bx+(3-2b)y=3+a \end{cases}$$

lahendid on $x=1$ ja $y=1$.

1413. Lahenda lineaarvõrrandisüsteem.

a) $\begin{cases} 2x+y+z=7 \\ x+2y+z=8 \\ x+y+2z=9 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x-4y+5z=18 \\ 2x+4y-3z=26 \\ x-6y+8z=0 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 10x-9z=19 \\ 8x-y=10 \\ y-12z=10 \end{cases}$

1414. Linnast A väljus jalgrattur ja samaaegselt talle vastu linnast B auto. Kui nad olid ühe tunni sõitnud, siis tõstis auto kiirust 20 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ võrra. Kui auto ei oleks kiirust muutnud, siis oleksid nad kohtunud tund aega hiljem. Mitme tunni pärast nad tegelikult kohtusid, kui linnade A ja B vaheline kaugus on 480 km?

1415. Üheaegselt väljusid teineteisele vastu kaks jalakäijat ja nad kohtusid 3 tunni ja 20 minuti pärast. Kui palju aega kulub neil kogu vahemaa läbimiseks, kui esimene saabus sinna, kust väljus teine 5 tundi hiljem, kui teine saabus sinna, kust väljus esimene?

1416. Kolmes kastis oli kokku 64,2 kg suhkrut. Teises kastis on $\frac{4}{5}$ sellest, mis on esimeses kastis. Kolmandas kastis 42,5% sellest, mis on teises kastis. Kui palju suhkrut on igas kastis?

(Ülesanded 1414 — 1416 esitati Tallinna Tehnikaülikooli vastuvõtueksamil 1991. a.)

1417. Veduri esiratas teeb 18 m pikkusel teelõigul 10 pööret rohkem kui tagaratas. Kui esiratta ümbermõõtu suurendada 6 dm võrra ja tagaratta ümbermõõtu samavõrra vähendada, siis teeb esiratas samal teelõigul 4 pööret rohkem kui tagumine. Leia rataste ümbermõõdud.
(Konkursieksamil Venemaal 1913. a.)

1418. Lootsik läbis 15 km pärivoolu ja 12 km vastuvoolu. Lootsik kulutas selleks niisama palju aega, kui tal oleks vaja olnud 28 km läbimiseks seisvas vees. Leia lootsiku kiirus seisvas vees, kui voolu kiirus on 2 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$.

1419. Grupp geolooge sooritas retke 18 km kaugusele mägedesse. Minnes tehti kuus 20-minutilist ja tagasi tulles üks pooletunnine peatus. Tagasiteel oli keskmine kiirus 2 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ võrra suurem kui minnes. Tagasitulekuks kulus 4 tundi ja 42 minutit vähem aega kui minnes. Leia keskmine kiirus mägedesse minnes.

1420. Ma olen kolm korda vanem, kui ma olin siis, kui mu vend oli nii vana, kui mina olen praegu. Kui ma saan nii vanaks, kui mu vend on praegu, siis olen ma vennaga kokku 96 aastat vana. Kui vana olen ma praegu ja kui vana on mu vend?

1421. Poisid püüdsid jõest kalu. Pärast jaotasid nad kalad nii: esimene poiss sai 3 kala ja 10% jäägist. Teine 4 kala ja 10% uuest jäägist, kolmas 6 kala ja 10% uuest jäägist jne. Lõpuks selgus, et kõik poisid said võrdse arvu kalu. Mitu kala püüti ja mitu poissi oli?

1422. Antikvariaat ostis 36 kr. eest kaks raamatut ning sai müües 25% kasumit. Kui kallilt müüdi kumbki raamat, kui esimese juurdehindlus oli 50% ja teisel 12,5%?

1423. Jõudnud sünnipäevapeole kella 12 ja 13 vahel, vaatas Juku kella. Peolt ära tulles kella 17 ja 18 vahel märkas ta, et kella osutid olid vahetanud kohad. Mis kellaajal jõudis Juku peole ja mis kell ta peolt ära tuli?

1424. Kolmel ahvil on erinev arv kookospähkleid. Kui esimene annaks pooltest oma pähklitest pooled teisele ja pooled kolmandale ahvile, pärast seda teine annaks pooltest oma pähklitest pooled esimesele ja pooled kolmandale ning pärast seda kolmas annaks pooltest oma pähklitest pooled esimesele ja pooled teisele ahvile, siis oleks kõigil ahvidel võrdselt 16 pähklit. Kui palju oli algul igal ahvil kookospähkleid?

1425. Kaks meest kaevavad auku, mille läbimõõt on üks meeter, 6 päeva. Mitu päeva kuluks kümnel mehel sellise augu kaevamiseks, kui nad töötaksid iga päev 2 tundi ja 44 minutit kauem kui esimesed mehed?

1426. Kolhoosnik, kes läks külast raudteejaama, läbis esimese tunniga 3 kilomeetrit. Siis ta taipas, et jätkates liikumist sama kiirusega, hilineb ta rongile 40 minutit. Seetõttu liikus ta ülejäänud teeosa kiirusega 4 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ ning jõudis jaama 45 minutit enne rongi väljumist. Leia küla ja raudteejaama vaheline kaugus.
(Ülesanne oli ülevenemaalisel matemaatika olümpiaadil 1939. a.)
Missuguse liikumiskiiruse oleks sina valinud?

1427. Kalur, kes sõudis vastuvoolu kogu aeg ühesuguse jõuga, läbis vahemaa kilomeetrites, mis võrdub võrrandi

$$\sqrt{5x}-\frac{4}{\sqrt{3x+1}}=\sqrt{3x+1}$$

positiivse lahendiga. Seejärel pöördus ta tagasi ja jõudis sadamasse 1 tund 6 minutit ja 40 sekundit pärast väljumist. Leia paadi kiirus seisvas vees, kui jõe voolu kiirus on 2,4 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$.

(Konkursieksamil Moskva Insenerifüüsika Instituudis 1958. a.)

1428. Sovhoosis oli loomadele varutud talveks a tonni sööta. Kuid n looma saadeti talveks naaberoblastisse ning selle tagajärjel suurenes sööda hulk ühe looma kohta c tonni võrra. Mitu tonni sööta oli esialgu ühele loomale planeeritud?

(Keskkooli lõpueksami ülesanne Venemaal 1946. a.)

1429. N tunniga künnab traktor p hektarit rohkem kui hobune. Mitu hektarit künnab N tunniga hobune ja mitu hektarit traktor, kui traktor künnab ühe hektari t tundi kiiremini hobusega võrreldes?

(Keskkooli lõpueksami ülesanne 1946. a.)

1430. Lahenda peast võrrand.

a) $|z-3|=4$ b) $|k-3|=0$ c) $|1+99x|=-2$

1431. Selgita, miks järgmistel võrranditel puuduvad lahendid:

a) $|x+1|+|x+2|+|x+3|=0$;

b) $|1+x^2|+|\cos x|=0$;

c) $|\sin x|+|\cos x|=2$.

Juhis: alaülesande c puhul tuleta põhikoolis õpitust meelde, missuguste arvude vahel on alati siinuse ja koosinuse väärtus.

1432. Lahenda võrrand.

a) $|x|=x+2$; b) $|-x+2|=2x+1$; c) $|x-1|+|x-2|=1$;

d) $|x-1|=|3x+1|$; e) $|5x-x^2-6|=x^2-5x-6$;

f) $|0{,}5x^2-2x+1{,}5|+|0{,}5x^2-3x+4|=0{,}75$.

1433. Selgita, kuidas lahendatakse juurvõrrandeid.

1434. Lahenda juurvõrrand.

a) $\sqrt{x+1}=8-\sqrt{3x+1}$ b) $\sqrt{17+x}-\sqrt{17-x}=2$

c) $\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-2x+3}=3$ d) $(x^2-2{,}25)\sqrt{3-x}=0$

e) $\sqrt{4x-3}+\sqrt{5x+1}=\sqrt{15x+4}$ f) $\sqrt{x+3}+\sqrt{5-x}=2$

g) $\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{x+2}+\sqrt[3]{x+3}=0$ h) $\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{3x+1}-\sqrt[3]{x-1}=0$

1435. Selgita, mida tähendab võrratuse lahendamine. Mille poolest erineb võrratuse lahendamine võrrandi lahendamisest?

1436. Missuguseid võrratuste omadusi tead? Too nende kasutamise kohta näiteid.

1437. Mingi võrratuse lahendamisel koondusid kõik muutujat sisaldavad liikmed. Tulemuseks saime $6>0$. Mida saab öelda selle võrratuse lahendihulga kohta?

1438. Mingi võrratuse lahendamisel koondusid kõik muutujat sisaldavad liikmed. Tulemuseks saime $6<0$. Mida saab öelda selle võrratuse lahendihulga kohta?

1439. Mida tähendab, et võrratused on samaväärsed?

1440. Lahenda võrratus.

a) $5(x-0{,}2)+4(x-0{,}3)<3$ b) $0{,}5x-\frac{2x-3}{3}>5$

c) $\frac{2x-1}{2}+\frac{3x-1}{3}-\frac{5x-2}{4}\geq 12$ d) $5(x-2)^2-5(x+3)^2\leq -10$

1441. Selgita, kuidas lahendatakse ruutvõrratusi.

1442. Kontrolli, kas järgmised võrratused on samaväärsed.

a) $x^2+4x+12>0$ ja $x-x^2-3>0$;

b) $(2x-5)(2x-1)<0$ ja $\frac{1}{2}<x<\frac{5}{2}$;

c) $(x^2-4)(x+1)>0$ ja $x^2-2x-3>0$;

d) $x^3+3x+21<0$ ja $-x^2-5>0$.

1443. Lahenda võrratus.

a) $(x-3)^2<4$ b) $(x-3)(x+2)<12(x-3)$

c) $(x-1)(4-x)(x^2-4)^2<0$ d) $(x^2-3x+2)(x-3)>0$

e) $(x+4)(3-x)(x-1)<0$ f) $(5-2x)(x+2)<x+2$

1444. Lahenda võrratus.

a) $\frac{3x-1}{3-x}<1$ b) $\frac{3+2x}{2x-4}>1$ c) $\frac{x^2-2x-3}{x^2+3x-4}>0$

d) $\frac{(4+x)(4x^2-x+1)}{(x-2)^2(x-3)}<0$ e) $\frac{(x^2-4)(2x^2+3x)(x^2+4)}{(x-1)^2(x+5)(3-x)}>0$

1445. Lahenda võrratus.

a) $\frac{1}{2-x}+\frac{5}{2+x}<1$ b) $\frac{1}{x+2}<\frac{3}{x-3}$

c) $\frac{x^2-3x+2}{x^2+3x+2}>1$ d) $\frac{x^3-x^2+x-1}{x+8}\leq 0$

e) $x^2-\frac{1}{x+1}>1$ f) $\frac{x^2-2x+3}{x^2-4x+3}>-2$

1446. Selgita, kuidas lahendada absoluutväärtust sisaldavaid võrratusi?

1447. Lahenda peast.

a) $|x|>3$; b) $|t|\geq 4$; c) $|k|<4$; d) $|s|<-5$.

1448. Lahenda võrratus.

a) $|x-4|>-3$ b) $|2x-1|\geq 4$ c) $|3x-5|<4$

d) $|3x-4|\leq 3$ e) $|x^2-4|>6$ f) $|x^2+1|\leq 1$

1449. Lahenda võrratus.

a) $|x+2|-|x-3|<5$ b) $|x-4|-|2-0{,}5x|\leq 3$

c) $|2x-3|+|x+2|>3$ d) $|x^2+x-1|<1$

e) $|x^2-2x-1{,}5|>1{,}5$ f) $|x^2-x-3|<3$

1450. Missuguste m väärtuste korral on võrrandi $(x-m)(x-1)=7$ mõlemad lahendid positiivsed?

1451. Missuguste x väärtuste korral ei ületa murru $\frac{3x-1}{2x+5}$ väärtus absoluutväärtuse poolest arvu 1?

1452. Missuguste a väärtuste korral on kolmliige $(a-1)x^2+2ax+3a-2$ täisruut?

1453. Missuguste parameetri väärtuste korral on järgmised võrratused tõesed?

a) $x^2+(a+2)x+8a+1>0$

b) $(a-2)x^2+(2a-1)x+a<0$

c) $(6a-5)x^2-5(a-1)x+2a-6<0$

d) $(m-2)x^2+(2m-3)x+5m-6>0$

e) $(t-1)x^2+2tx+3t-2<0$

1454. Missuguste n väärtuste korral on võrrandi $n^2(x-1)=2(nx-2)$ lahend väiksem kui 3?

1455. Missuguste m väärtuste korral on võrrandi $m^2(x-1)-4x=m-6$ lahend suurem kui 1?

1456. Missuguste x väärtuste korral on ruutkolmliikme x^2-3x+2 väärtused positiivsed, kuid väiksemad kui 6?

1457. Juku paigutab albumisse marke. Kui ta paneks igale lehele 20 marki, siis mõned margid jääksid üle. Kui ta paneks igale lehele 23 marki, siis vähemalt üks leht jääb üle. Kui Jukule kinkida veel üks selline album, mille igal lehel on 21 marki, siis on Jukul kokku 500 marki. Mitu lehte on albumis?

1458. Klassis, kus on 30 õpilast, saadi matemaatika kontrolltöö eest hindeid 5; 4; 3 ja 2. Kõikide hinnete summa on 98. Kolmesid oli rohkem viisi, kuid vähem kui neljasid. On teada, et neljade arv jagub kümnega. Viisi oli paarisarv. Leia, kui palju mingisuguseid hindeid oli.

1459. Defineeri täisnurkse kolmnurga teravnurga siinus, koosinus ja tangens.

1460. Kui täisnurkses kolmnurgas ühte kaatetit pikendada kaks korda, siis selle kaateti vastas olev nurk suureneb kaks korda. Kas see väide on tõene? Põhjenda.

1461. Tõesta, et täisnurkses kolmnurgas kehtivad seosed

a) $\sin^2\alpha+\sin^2\alpha=1$; b) $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\tan\alpha$; c) $1+\tan^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}$.

1462. Leia matemaatiliste tabelite või taskuarvuti abil

a) $\sin 32°$; $\cos 44°$; $\tan 63°$; $\sin 1°$; $\sin 10°$; $\sin 40°$;

b) $\sin 12°24'$; $\sin 23°54'$; $\sin 87°59'$; $\sin 89°59'$; $\sin 0°06'$

c) $\cos 12°24'$; $\cos 23°54'$; $\cos 87°59'$; $\cos 89°59'$; $\cos 0°06'$;

d) $\tan 12°24'$; $\tan 23°54'$; $\tan 87°59'$; $\tan 89°59'$; $\tan 0°06'$.

1463. Leia ülejäänud trigonomeetriliste funktsioonide väärtused, kui

a) $\sin x=0{,}15$; b) $\cos x=\frac{1}{3}$; c) $\tan x=74$.

1464. Esita nurgad kujul $360°\cdot n+\alpha$, kus $n\in\mathbb{Z}$ ja $0°\leq\alpha<360°$.

$225°$; $370°$; $1080°$; $2340°$; $-1234°$; $-600°$; $-18\,000°$; $-2333°$.

1465. Lennuk lendab 2000 m kõrgusel kiirusega 500 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ ja kaotab iga lennatud 100 m kohta 15 m kõrgust. Kas niiviisi lennates jõuab lennuk 120 km kaugusel asuvale lennuväljale? Lahenda ülesanne algul ilma trigonomeetriat kasutamata ja seejärel trigonomeetriaalaseid teadmisi kasutades. Kas kõik andmed on lahendamiseks vajalikud?

1466. Võrdhaarse kolmnurga tipunurk on 36° ning alus 8 cm. Arvuta haara pikkus ja kolmnurga pindala.

1467. Rombi teravnurk on 67°30′ ja külg 22 cm. Leia rombi diagonaalide pikkused ja pindala.

1468. Võrdhaarse trapetsi teravnurk on 30° ning kõrgus 6 cm. Leia trapetsi aluste pikkused. Kas antud andmetest piisab ülesande lahendamiseks? Täienda vajaduse korral andmeid nii, et ülesandel oleks ühene lahendus.

1469. Ristküliku külje pikkus on 12 cm ja diagonaali pikkus 37 cm. Leia ristküliku pindala. Mitme protsendi võrra suureneb ristküliku pindala, kui diagonaali pikkust suurendada kaks korda?

1470. Defineeri radiaan. Mitu radiaani on ühes täispöördes?

1471. Teisenda α kraadi radiaanmõõtu. Teisenda A rad kraadimõõtu.

1472. Teisenda nurgad radiaanmõõtu.

$0°$; $120°$; $30°$; $60°$; $90°$; $330°$; $720°$; $72°$; $15°$; $-135°$.

1473. Teisenda nurgad kraadimõõtu.

$\frac{\pi}{4}$; $\frac{2\pi}{3}$; $\frac{\pi}{12}$; $\frac{3\pi}{7}$; $\frac{4\pi}{11}$; $\frac{3\pi}{17}$; $-\frac{\pi}{17}$; $-\frac{5\pi}{6}$.

1474. Leia nurgad α, kus $-2\pi\leq\alpha\leq 2\pi$, mille korral

a) $\sin\alpha=0$; b) $\sin\alpha=0{,}5$; c) $\sin\alpha=1$; d) $\sin\alpha=2$;

e) $\cos\alpha=-1$; f) $\cos\alpha=0$; g) $\cos\alpha=1$; h) $\cos\alpha=2$;

i) $\tan\alpha=0$; j) $\tan\alpha=1$; k) $\tan\alpha=\sqrt{3}$; l) $\tan\alpha=-1$.

1475. Leia taandamisvalemite abil

a) $\sin 210°$; $\sin 135°$; $\sin 225°$; $\sin 330°$; $\sin(-225°)$; $\sin 1080°$;

b) $\cos 210°$; $\cos 135°$; $\cos 225°$; $\cos 330°$; $\cos(-225°)$; $\cos 1080°$;

c) $\tan 210°$; $\tan 135°$; $\tan 225°$; $\tan 330°$; $\tan(-225°)$; $\tan 1080°$

1476. Mitmenda veerandi nurk on α, kui

a) $\sin\alpha > 0$ ja $\cos\alpha > 0$; b) $\sin\alpha < 0$, $\cos\alpha < 0$ ja $\tan\alpha < 0$;

c) $\cos\alpha > 0$ ja $\tan\alpha < 0$; d) $\sin\alpha < 0$ ja $\cos\alpha < 0$?

1477. Arvuta.

a) $2\sin 30° + 3\cos 60° + \tan 45°$;

b) $\sin 60°\cos 30° - \tan 45°\cot 45°$;

c) $\tan^2 45° + \sin^2 45° + \cos^2 45°$;

d) $\sin 810°\cos(-900°) + \tan 405°\cot 1845° + \cos 765°\sin 405°$.

1478. Lihtsusta.

a) $a^2\sin 90° + 2af\tan 45° - f^2\cos 180°$;

b) $a\sin(-30°) - 2a\tan(-45°) + b\cos(-60°)$;

c) $4a^2\cos^4\frac{\pi}{4} - 6ab\cot^2\frac{\pi}{3} + (b\tan\frac{\pi}{4})^2$.

1479. Mis märgiga on korrutis?

a) $\sin 110°\cos 110°\tan 230°\cot 320°$;

b) $-\sin 50°\tan 170°(-\cos(-91°))\cot(-640°)\sin 530°$.

1480. Olgu α, β ja γ kolmnurga sisenurgad. Mis märgiga on summa $\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma$?

1481. Mis märgiga on avaldised $\cos\frac{\alpha}{2} + \cos\frac{\beta}{2} + \cos\frac{\gamma}{2}$ ja $\tan\frac{\alpha}{2} + \tan\frac{\beta}{2} + \tan\frac{\gamma}{2}$, kui $\alpha + \beta + \gamma = 180°$?

1482. Lihtsusta avaldis.

a) $1 - \sin(-\alpha)\cos(-\alpha)\tan(-\alpha)$ b) $\cos\alpha \cdot \tan\alpha + \sin(-\alpha)$

c) $1 - \frac{\cos^2\alpha}{1+\sin\alpha}$ d) $\frac{1+\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{\cos\alpha}$

e) $\sqrt{\cos^{-2}\alpha - 1}$ f) $\frac{\sin\alpha}{\sqrt{\cos^{-2}\alpha - 1}}$

1483. Tõesta, et kehtivad võrdused

a) $\frac{1}{\cos\alpha(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha + \tan^2\alpha)} = \cos\alpha$;

b) $\sin^6\alpha + \cos^6\alpha + 3\sin^2\alpha\cos^2\alpha = 1$;

c) $\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} - \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha} + \frac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\cos\alpha} = 1 + \tan\alpha$;

d) $\sqrt{(\sin\alpha \cdot \cot\alpha - \cos^2\alpha)(\tan\alpha \cdot \sin\alpha + 1 + \cos\alpha)} = \sin\alpha$.

1484. Kasutades taandamisvalemeid näita, et

$\frac{\sin(\pi-\alpha)}{\tan(\pi+\alpha)} \cdot \frac{\cot(0{,}5\pi+\alpha)}{\tan(0{,}5\pi+\alpha)} \cdot \frac{\cos(2\pi-\alpha)}{\sin(-\alpha)} = \sin\alpha$.

1485. Lihtsusta avaldis.

a) $\frac{\cos(-288°)\cot 72°}{\tan(-162°)\sin(-252°)} - \tan 18°$ b) $\frac{\sin 170°\cot 80°\cos 710°}{\tan 190°\tan 100°\sin(-370°)}$

c) $\frac{\sin 150°\cos 325°\cos 360°}{\tan 235°\cot 212°\tan 508°\cos 55°}$

1486. Lihtsusta avaldis.

a) $\frac{\cos(\alpha+\beta)+\sin\alpha\cdot\sin\beta}{\cos(\alpha-\beta)-\sin\alpha\cdot\sin\beta}$ b) $\frac{\sin(30°+\alpha)-\cos(60°+\alpha)}{\sin(30°+\alpha)+\cos(60°+\alpha)}$

c) $\frac{\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}$ d) $\frac{\sqrt{2}\cdot\cos\alpha - 2\cos(0{,}25\pi+\alpha)}{2\sin(0{,}25\pi+\alpha)-\sqrt{2}\cdot\sin\alpha}$

1487. Avalda $\sin 2\alpha$, $\cos 2\alpha$ ja $\tan 2\alpha$, kui

a) $\sin\alpha = 0{,}8$ ja $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$; b) $\cos\alpha = -0{,}5$ ja $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$;

c) $\tan(\pi+\alpha) = 2$ ja $\pi < \alpha < 1{,}5\pi$; d) $\tan\alpha = 1$ ja $\pi < \alpha < 1{,}5\pi$.

1488. Leia $\sin(2\alpha+\beta)$, $\cos(\alpha-2\beta)$ ja $\sin(2\alpha+2\beta)$, kui

$\cos\alpha = \frac{12}{13}$; $\sin\beta = 0{,}8$ ja $270° < \alpha < 360°$ ning $90° < \beta < 180°$.

1489. Rombi diagonaali ja külje vahelise nurga siinus on 0,2. Leia rombi nurkade koosinused.

1490. Leia $\frac{\sin\alpha+\tan\alpha}{\tan\alpha-\sin\alpha}$ väärtus, kui $\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{2}{15}$.

1491. Lihtsusta.

a) $2\sin 10°\cos 10°$ b) $\cos^2 17° - \sin^2 17°$

c) $\sin^2\frac{\pi}{6} - \cos^2\frac{\pi}{6}$ d) $\sin^2\frac{\pi}{6} - \sin^2\frac{\pi}{3}$

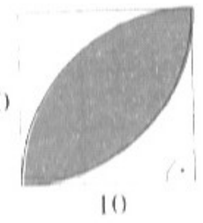
e) $\frac{\sin 25°\cdot\sin 65°}{\cos 40°}$ f) $\frac{2\sin 20° + \sin 40°}{2\sin 20° - \sin 40°}$

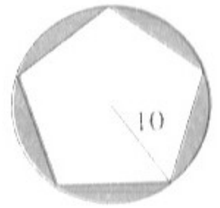
1492. Leia sektori pindala, kui raadius on r ja nurk α.

a) $r = 10$, $\alpha = 60°$; b) $r = 10$, $\alpha = 120°$; c) $r = 3$, $\alpha = 15°$;

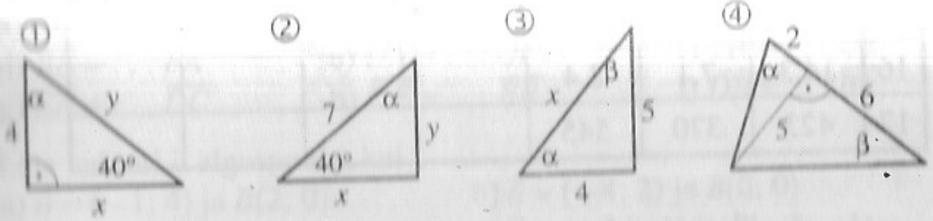
d) $r = 10$, $\alpha = 1$; e) $r = 6$, $\alpha = \frac{\pi}{2}$; f) $r = 10$, $\alpha = 2$.

1493. Leia joonisel värvitud kujundite pindala.



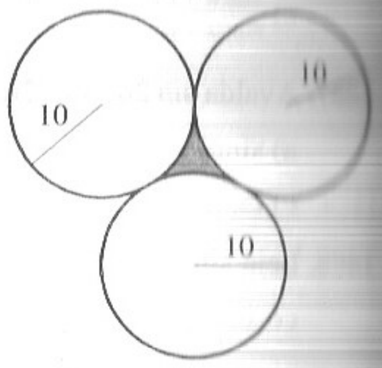


1494. Leia järgmiste täisnurksete kolmnurkade puuduvad küljed ja nurgad.



1495. Konstrueeri täisnurkne kolmnurk kaatetitega 5 cm ja 6 cm. Joonesta sellele kolmnurgale siseringjoon ja ümberringjoon. Mitu protsenti moodustab väiksema ringi pindala suurema ringi pindalast?

1496. Leia joonisel oleva kõverjoonelise kolmnurga pindala.



1497. Selgita, missugustel juhtudel lahendatakse kolmnurk siinusteoreemi abil.

1498. Selgita, miks kõiki kolmnurki ei saa lahendada ainult siinusteoreemi abil.

1499. Sõnasta koosinusteoreem ja selgita, missugustel juhtudel alustatakse kolmnurga lahendamist koosinusteoreemiga.

1500. Leia kolmnurga puuduvad elemendid.

Nr.	a	b	c	α	β	γ	S
1			20		124°	31°	
2	109				33°25′	67°	
3	46			121°		83°	
4			25	35°	68°		
5		480	628			55°10′	
6	31,5	51,8		33°5′			
7	13	28		103°			
8	3	4					6
9	233,5		327,9			116°20′	
10	132	224				28°40′	
11	3,4	2,9			108°		
12	34	29			18°		
13	23,8	12,7				121°50′	
14	10	15	20				
15	10	15	25				
16	14,3	7,1	8,4				
17	423	370	545				

1501. Selgita, kuidas saab kaudselt mõõta mingi objekti kõrgust.

1502. Elektriliini posti varju pikkus on 6,2 m. 1,4 m pikkuse lati vari on 2,2 m. Kas kahe elektriliini posti vahelt võib läbi sõita auto, mille koorem ulatub 3,4 m kõrgusele maapinnast? Kas ülesande lahendamiseks on veel mõningad andmed vajalikud?

1503. Kanna koordinaatteljestikku järgmised punktid.
$I(3; 2)$; $E(-1; 3)$; $H(-3; -1)$; $M(0; 6)$; $A(6; 0)$; $D(-3; 0)$.

1504. Kanna koordinaatteljestikku järgmised punktid.
$O(2; 80°)$; $N(12; 5°)$; $T(2; 90°)$; $Õ(3; 135°)$; $P(5; 220°)$; $R(3; \pi)$.

1505. Leia punktide A ja B vaheline kaugus.
a) $A(-3; 2)$ ja $B(-3; 6)$;
b) $A(-4; 7)$ ja $B(0; 2)$;
c) $A(-5; -2)$ ja $B(6; -2)$;
d) $A(7; 1)$ ja $B(3; -1)$;
e) $A(a, b)$ ja $B(c; d)$;
f) $A(x_1; y_1)$ ja $B(x_2; y_2)$.

1506. Missugune punktidest $A(4; 4)$, $B(3; 4)$, $C(-5; -3)$ asub koordinaatide alguspunktile kõige lähemal?

1507. Kontrolli, kas kolmnurk tippudega $A(3; 4)$, $B(-3; 2)$ ja $C(-4; -5)$ on võrdhaarne?

1508. Kolmnurk AHV on võrdhaarne. AH on kolmnurga haar, leia punkti V võimalikud koordinaadid, kui $A(3; 4)$ ja $H(1; 1)$.

1509. Leia punkt, mis asub punktidest $A(-3; -2)$, $B(5; 1)$ ja $C(0; -4)$ ühekaugusel. Kuidas lahendada seda ülesannet sirkli ja joonlaua abil?

1510. Kas leidub punkt, mis on punktidest $A(1; 2)$, $B(2; 4)$ ja $C(3; 6)$ ühekaugusel? Põhjenda.

1511. Mis on vektor? Missuguseid vektorite liike tead?

1512. Mida tähendab, et vektori koordinaadid on x ja y?

1513. Kas on õige, et kui $\vec{a} = (3; 5)$, siis ka $\vec{a} = (5; 3)$? Miks?

1514. Punktid B, C, D ja E jaotavad lõigu AB viieks võrdseks osaks.

Kirjuta lünka puuduvad arvud nii, et võrdus kehtiks.
a) $\overrightarrow{AC} = \ldots \overrightarrow{AB}$
b) $\overrightarrow{AE} = \ldots \overrightarrow{AF}$
c) $\overrightarrow{FE} = \ldots \overrightarrow{BC}$
d) $\overrightarrow{BE} = \ldots \overrightarrow{FA}$
e) $\overrightarrow{DA} = \ldots \overrightarrow{CF}$
f) $\overrightarrow{CA} = \ldots \overrightarrow{CE}$
g) $\overrightarrow{EA} = \ldots \overrightarrow{DC}$
h) $\overrightarrow{DE} = \ldots \overrightarrow{EB}$
i) $\overrightarrow{DB} = \ldots \overrightarrow{BF}$.

1515. Leia vektori $\vec{a}$ alguspunkt, kui
a) $\vec{a} = (-1; 4)$ ja $B(2; 0)$;
b) $\vec{a} = (-4; 2)$ ja $B(0; 0)$
c) $\vec{a} = (2; 5)$ ja $B(0; -3)$;
d) $\vec{a} = (-1; -1)$ ja $B(-3; -4)$.

1516. Leia vektori $\vec{a}$ lõpp-punkt, kui

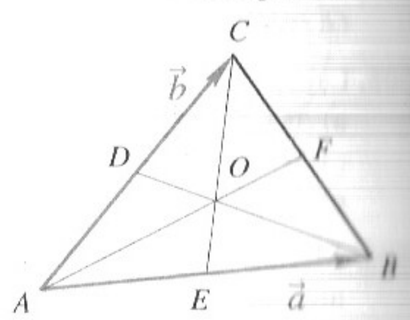
a) $\vec{a} = (-1; 4)$ ja $A(2; 0)$; b) $\vec{a} = (-4; 2)$ ja $A(0; 0)$;
c) $\vec{a} = (2; 5)$ ja $A(0; -3)$; d) $\vec{a} = (-1; -1)$ ja $A(-3; -4)$.

1517. Rööpkülikus $ABCD$ $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ ja $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$. O on rööpküliku diagonaalide lõikepunkt. Avalda vektorite $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ kaudu vektorid

a) $\overrightarrow{AO}$; b) $\overrightarrow{BD}$; c) $-\overrightarrow{CO}$; d) $\overrightarrow{DB}$; e) $\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{DO}$; f) $\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD}$.

1518. Joonisel antud kolmnurgas ABC $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ ja $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$. Avalda vektorite $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ kaudu järgmised vektorid, kui punkt O on mediaanide lõikepunkt.

a) $\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{AO}$; $\overrightarrow{DO}$; $\overrightarrow{BO}$; $\overrightarrow{EO}$; $\overrightarrow{CO}$; $\overrightarrow{FO}$;
b) $\overrightarrow{CD}$; $\overrightarrow{AE}$; $\overrightarrow{FB}$; $\overrightarrow{FE}$; $\overrightarrow{FD}$; $\overrightarrow{DE}$.



1519. Tõesta, et kolmnurga kesklõik on pool alusest.

1520. Tõesta, et trapetsi kesklõik on võrdne aluste poolsummaga.

1521. Joonesta vabalt mingid vektorid $\vec{a}$, $\vec{b}$ ja $\vec{c}$. Näita, et kehtivad järgmised omadused. Sõnasta need.

a) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$; b) $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$; c) $\vec{a} + \overrightarrow{O} = \vec{a}$.

1522. On teada, et $\vec{a} = (-3; 2)$ ja $\vec{b} = (0; 4)$ ja $\vec{c} = (2; -1)$. Lihtsusta järgmised avaldised ja leia vektori $\vec{m}$ koordinaadid, kui

a) $\vec{m} = 2\vec{a} + 3\vec{b} - \vec{c}$; b) $\vec{m} = -\vec{a} - 0{,}5\vec{b} + 5\vec{c}$; c) $\vec{m} = \vec{a} - 2\vec{c}$;
d) $\vec{m} = \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b} - \vec{c}$; e) $\vec{m} = -\vec{a} - \frac{1}{3}\vec{c}$; f) $\vec{m} = -\vec{c} - 1{,}4\vec{a}$.

1523. Missugust vektorit nimetatakse nullvektoriks? Missuguste vektorite summavektor on nullvektor?

1524. Missuguseid vektoreid nimetatakse kollineaarseteks?

1525. On teada, et $\vec{a} \parallel \vec{b}$. Leia puuduv koordinaat, kui

a) $\vec{a} = (3; 5)$ ja $\vec{b} = (x; -1)$; b) $\vec{a} = (2; x)$ ja $\vec{b} = (3; x)$;
c) $\vec{a} = (4; 1)$ ja $\vec{b} = (-2; t)$; d) $\vec{a} = (a; 2a)$ ja $\vec{b} = (3a; x)$.

1526. Ristküliku $RIST$ tipud on $R(-3; -2)$, $I(4; -2)$, $S(4; 6)$. Leia tipu T koordinaadid.

1527. Rööpküliku tipud on $M(-2; 3)$, $N(3; 5)$, $P(-3; 5)$. Leia neljanda tipu

1528. Lõik, mille otspunktid on $A(1; -3)$ ja $B(4; 3)$, tuleb jaotada kolmeks võrdseks osaks. Leia jaotuspunktide koordinaadid.

1529. Defineeri vektorite skalaarkorrutis.

1530. Selgita, missugustel juhtudel $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, $\vec{a} \cdot \vec{b} > 0$, $\vec{a} \cdot \vec{b} < 0$.

1531. Leia vektorite $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ skalaarkorrutis, kui

a) $\vec{a} = (-2; 0)$ ja $\vec{b} = (0; 5)$; b) $\vec{a} = (2; 0)$ ja $\vec{b} = (0; 5)$;
c) $\vec{a} = (-2; 5)$ ja $\vec{b} = (5; 5)$; d) $\vec{a} = (a; b)$ ja $\vec{b} = (b; -a)$.

1532. Leia vektorite $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ vaheline nurk, kui

a) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 20$ ja $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = 5$; b) $\vec{a} \cdot \vec{b} = -20$ ja $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 9$;
c) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ ja $|\vec{a}| = 7$, $|\vec{b}| = 3$; d) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \sqrt{3}$ ja $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = 5$.

1533. On teada, et $\vec{a} \perp \vec{b}$. Leia x, kui

a) $\vec{a} = (3; 4)$ ja $\vec{b} = (5; x)$; b) $\vec{a} = (-1; x)$ ja $\vec{b} = (-4; x)$;
c) $\vec{a} = (2x; 3)$ ja $\vec{b} = (-x; 7)$; d) $\vec{a} = (3; -1)$ ja $\vec{b} = (4x; -5)$.

1534. Leia nurk vektorite vahel, kui

a) $\vec{a} = (3; 1)$ ja $\vec{b} = (4; -2)$; b) $\vec{a} = (1; 5)$ ja $\vec{b} = (2; 3)$;
c) $\vec{a} = (-2; -1)$ ja $\vec{b} = (-3; -4)$; d) $\vec{a} = (0; 3)$ ja $\vec{b} = (4; -1)$;
e) $\vec{a} = (4; -2)$ ja $\vec{b} = (-1; 4)$ f) $\vec{a} = (4; 4)$ ja $\vec{b} = (5; 5)$.

1535. Kontrolli, kas kolmnurk tippudega $A(1; 1)$, $B(2; 3)$ ja $C(5; -1)$ on täisnurkne.

1536. Kontrolli, kas kolmnurk tippudega $A(-2; -3)$, $B(5; -7)$ ja $C(9; 12)$ on nürinurkne.

1537. Kontrolli, kas punktid $A(0; 3)$, $B(4; 0)$, $C(0; -3)$ ja $D(-4; 0)$ on ristküliku tippudeks. Kui antud nelinurk pole ristkülik, siis määra kindlaks, missuguse kujundiga on tegemist.

1538. Koosta sirge võrrand, kui sirge läbib punkti A ja tema sihivektor on $\vec{v}$.

a) $A(3; 5)$ ja $\vec{v} = (2; 0)$; b) $A(0; 0)$ ja $\vec{v} = (0; 3)$;
c) $A(-3; 4)$ ja $\vec{v} = (-2; 4)$; d) $A(-3; -3)$ ja $\vec{v} = (4; 2)$;
e) $A(3; 3)$ ja $\vec{v} = (1; 1)$; f) $A(x_1; x_2)$ ja $\vec{v} = (v_1; v_2)$.

1539. Koosta sirge võrrand, kui sirge läbib punkti A ja tema tõus on k.

a) $A(4; -1)$ ja $k = 1$; $k = 2$; $k = 3$; $k = 0$; $k = -1$; $k = -2$;
b) $A(3; 5)$ ja $k = 0{,}5$; $k = \sqrt{2}$; $k = -0{,}5$; $k = \sqrt{3}$.

1540. Koosta sirge võrrand, kui sirge läbib punkti A ja tema tõusunurk on α.

a) $A(2; -1)$ ja $\alpha = 60°$; b) $A(-1; 3)$ ja $\alpha = 45°$;
c) $A(3; 3)$ ja $\alpha = 90°$; d) $A(2; 3)$ ja $\alpha = 0°$;
e) $A(3; 4)$ ja $\alpha = 120°$; f) $A(2; -2)$ ja $\alpha = 135°$.

1541. Koosta x-teljega paralleelse sirge võrrand, y-teljega paralleelse sirge võr-

1542. Koosta x-teljega paralleelse sirge võrrand, kui sirge läbib punkti
a) $A(3; 3)$; b) $B(-1; 3)$; c) $O(0; 0)$; d) $H(-2; -3)$; e) $L(3; 0)$.

1543. Koosta y-teljega paralleelse sirge võrrand, kui sirge läbib punkti
a) $A(3; 3)$; b) $B(-1; 3)$; c) $O(0; 0)$; d) $H(-2; -3)$; e) $L(3; 0)$.

1544. Koosta sirge võrrand, kui sirge läbib punkte A ja B, kus
a) $A(-2; 3)$ ja $B(3; 5)$; b) $A(2; 2)$ ja $B(4; 4)$; c) $A(-3; -3)$ ja $B(0; 0)$;
d) $A(4; 2)$ ja $B(1; 3)$; e) $A(0; 3)$ ja $B(3; 0)$; f) $A(a; b)$ ja $B(c; d)$.

1545. Sirge üldvõrrand on $Ax + By = C$. Leia sellest võrrandist sirge sihivektori koordinaadid.

1546. Leia sirge tõus ja algordinaat.
a) $2x + y - 8 = 0$; b) $3x - y + 6 = 0$; c) $x + 3y = 0$;
d) $-x - 3y = 5$; e) $-2x - 3y = 0$; f) $3x - 0{,}45y = 9$.

1547. Joonesta koordinaatteljestikku sirged
a) $x - y = 4$; b) $2x - 3y + 6 = 0$; c) $4x + 5y = 9$.

1548. Ruudu üks tipp asub koordinaatide alguspunktis ja selle vastastipp punktis $A(4; 4)$. Leia ruudu külgede ja diagonaalide võrrandid.

1549. Võrdkülgse kolmnurga tipp asetseb koordinaatide alguspunktis ja üks küljegedest y-telje positiivsel osal. Leia kolmnurga külgede võrrandid, kui külje pikkus on 8 ühikut. Uuri kaht erinevat võimalust.

1550. Leia x-telje ja sirge $y = \sqrt{3}x$ vahelise nurgapoolitaja (sirge) võrrand.

1551. On antud kaks sirget: $2x + 3y - 13 = 0$ ja $5x - y - 18 = 0$. Esimesel sirgel on võetud punkt A abstsissiga 2 ja teisel sirgel punkt B ordinaadiga 7. Leia punktide A ja B vaheline kaugus.

1552. Kolmnurga ABC tipud on $A(2; 4)$, $B(0; 2)$ ja $C(4; -2)$. Leia kolmnurga külgede AC ja BC keskpunkte läbiva sirge võrrand.

1553. Leia teravnurk sirgete vahel, kui
a) $y = 2x + 3$ ja $y = x - 2$; b) $y = 3x + 1$ ja $y = 2x - 7$;
c) $2x - 3y + 6 = 0$ ja $y = x$; d) $y = 3x - 1$ ja $y = -3x - 1$.

1554. Missugused järgmistest sirgetest on paralleelsed ja missugused ristuvad?
a) $y = 2x + 3$; b) $y = 2x + 5$; c) $y = 0{,}5x - 1$; d) $y = -0{,}5x$;
e) $y = 3x + 1$; f) $y = -\frac{1}{3}x$; g) $y = \pi x - 1$; h) $y = -\frac{1}{2}x + 1$.

1555. Leia sirge võrrand, kui sirge läbib punkti $A(3; 4)$ ja on paralleelne sirgega $2x + y = 5$.

1556. Leia sirge võrrand, kui sirge läbib punkti $A(2; 3)$ ja on risti sirgega $y = -2x - 1$.

1557. Leia sirge võrrand, kui sirge läbib punkti $A(1; 2)$ ja on risti sirgega, mis läbib punkte $B(-3; 3)$ ja $C(0; -3)$.

1558. Valguskiir, väljudes punktist $A(1; 5)$, peegeldub sirgest $y = x$ ja jõuab punkti $B(3; 7)$. Leia langeva ja peegelduva kiire võrrandid.

1559. Arvuta rööpküliku pindala. Rööpküliku külgede võrrandid on:
$y = 2x + 1$; $y = 2x - 5$; $y = x - 2$ ja $y = x + 2$.

1560. Lahenda kolmnurk, kui on antud tippude koordinaadid.
a) $A(-3; 0)$, $B(1; 4)$ ja $C(5; -2)$; b) $A(-5; 2)$, $B(6; -1)$ ja $C(1; 4)$.

1561. Kirjuta ringjoone võrrand, kui ringjoone keskpunkt on $O(0; 0)$ ja raadius on R.

1562. Kirjuta ringjoone võrrand, kui ringjoone keskpunkt on $A(a; b)$ ja raadius on R.

1563. Missugused antud võrranditest on ringjoone võrrandid?
a) $3x^2 + y^2 - 4x + 5y - 18 = 0$; b) $x^2 - y^2 = 18$;
c) $x^2 + y^2 + 4y + 6x - 25 = 0$ d) $x^2 + y^2 = 25$;
e) $x^2 + y^2 - 14x + 12y - 204 = 0$; f) $x^2 + t^2 + 4y = 0$;
g) $x^2 + y^2 - 64 = 0$; h) $x^2 + y^2 + 3 = 0$.

1564. Leia ringjoone võrrand, kui raadius on R ja keskpunkt on A.
a) $A(-3; 4)$ ja $R = 3$; b) $A(3; 5)$ ja $R = 1$; c) $A(2; 3)$ ja $R = \pi$;
d) $A(-1; -2)$ ja $R = 5$; e) $A(0; 0)$ ja $R = 3$; f) $A(2; 3)$ ja $R = -1$.

1565. On anud ringjoon $(x-3)^2 + (y-5)^2 = 16$. Kas punktid $A(3; 4)$, $B(-2; 3)$, $C(0; -1)$, $D(3; -1)$, $E(3; -9)$ asetsevad ringjoone sees, ringjoonel või väljaspool ringjoont?

1566. On antud ringjoon $(x-2)^2 + (y+4)^2 = 25$. Leia sellega kontsentrilise, kuid kaks korda väiksema raadiusega ringjoone võrrand. Leia mõlema ringjoone pikkus ja tekkinud rõnga pindala.

1567. Ringjoon, mille keskpunkt on $F(3; -1)$, läbib lõigu AB keskpunkti. Koosta ringjoone võrrand, kui $A(5; 7)$ ja $B(1; 5)$.

1568. Leia sirge $x = 3$ ja ringjoone $x^2 + y^2 + 3x - 6y - 9 = 0$ lõikepunktide koordinaadid.

1569. Kui pikk on sirgega $x + y - 5 = 0$ määratud kõõl, kui ringjoone võrrand on $(x-1)^2 + (y+3)^2 = 25$?

1570. Leia ellipsi teljed, fookuste koordinaadid ja ekstsentrilisus.
a) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{36} = 1$; b) $\frac{x^2}{144} + \frac{y^2}{169} = 1$; c) $24x^2 + 49y^2 = 1176$.

1571. Leia ellipsi $4x^2 + 9y^2 - 36 = 0$ telgede pikkus.

1572. Leia ellipsi $16x^2 + 25y^2 = 400$ haripunktid.

1573. Leia ellipsi $4x^2 + 9y^2 = 36$ lõikepunktid sirgetega.

a) $2x + 3y - 6 = 0$; b) $2x + 3\sqrt{3}y = 12$; c) $y = x - 6$.

1574. Leia hüperbooli teljed, fookuste koordinaadid ja ekstsentrilisus.

a) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{25} = 1$; b) $\frac{x^2}{144} - \frac{y^2}{25} = 1$; c) $16x^2 - 9y^2 = 144$.

1575. Leia hüperbooli $3x^2 - 5y^2 = 28$ ja sirge $2x - y = 8$ lõikepunktid.

1576. Ruudu tipud asetsevad hüperboolil $25x^2 - 16y^2 = 400$. Leia ruudu tippude koordinaadid ja pindala.

1577. Leia parabooli võrrand. Parabooli haripunkt asetseb koordinaatide algus-punktis ja fookus punktis F.

a) $F(3; 0)$; b) $F(-2; 0)$; c) $F(0; 4)$; d) $F(0; -0{,}25)$.

1578. Leia parabooli haripunkt ja fookus, kui

a) $y = x^2 - 2x - 1$; b) $y^2 - 4x + 8 = 0$; c) $x^2 + 4y - 8 = 0$.

VIII peatükk. KEERUKAMAID ÜLESANDEID

„Kust ma pean alustama, Teie Kõrgus?" küsis Küülik.
„Alustage algusest, minge edasi, kuni jõuate lõpuni — siis peatuge," vastas Kuningas.
L. Carroll „Alice Imedemaal"

1579. Lihtsusta avaldis.

a) $\frac{1}{a(a-b)(a-c)} + \frac{1}{b(b-a)(b-c)} + \frac{1}{c(c-a)(c-b)}$

b) $\frac{x^3y - xy^3 + y^3z - yz^3 + z^3x - zx^3}{x^2y - xy^2 + y^2z - yz^2 + z^2x - zx^2}$

1580. Tõesta, et

$$\left(\frac{a-b}{c} + \frac{b-c}{a} + \frac{c-a}{b}\right) \cdot \left(\frac{c}{a-b} + \frac{a}{b-c} + \frac{b}{c-a}\right) = 9, \text{ kui } a + b + c = 0.$$

1581. Lihtsusta avaldis.

$$\frac{1}{x(x+1)} + \frac{1}{(x+1)(x+2)} + \frac{1}{(x+2)(x+3)} + \frac{1}{(x+3)(x+4)}.$$

1582. Lihtsusta avaldis.

$$\frac{b}{a}\sqrt{(a^2 - 2ab + b^2)(a^2 - b^2)(a+b)} \cdot \frac{a^3 - b^3}{\sqrt[3]{(a+b)^2}}.$$

1583. Tõesta, et

$(a^2 + b^2 + c^2)^2 = 2(a^4 + b^4 + c^4)$, kui $a + b + c = 0$.

1584. Tõesta, et kui $x + \frac{1}{y} = y + \frac{1}{z} = z + \frac{1}{x}$, siis $x = y = z$ või $|xyz| = 1$.

1585. Lahenda võrrand

$$\frac{x-a-b}{c} + \frac{x-b-c}{a} + \frac{x-c-a}{b} = 3.$$

1586. Lahenda võrrand

$$\frac{a^3 + x}{b^3 - x} - \frac{a^3 - x}{b^3 + x} = \frac{4abx + 2a^2 - 2b^2}{b^4 - x^2}.$$

1587. Koosta ruutvõrrand, mille lahenditeks on $\frac{a}{b}$ ja $\frac{b}{a}$.

1588. Lahenda võrrand $\sqrt{3x^2+6x+7}+\sqrt{5x^2+10x+14}=4-2x-x^2$.

1589. Lahenda võrrand $\sqrt[3]{2-x}+\sqrt{x-1}=1$.

1590. Lahenda võrrand $\sqrt{x+2}+\sqrt[4]{4-x}+\sqrt[6]{x-6}=11$.

1591. Mitu naturaalarvulist lahendit on võrrandil $19x+94y=1994$?

1592. Lahenda naturaalarvude hulgas võrrand $x^3-y^3=999$.

1593. Kas leiduvad sellised täisarvud m ja n, et $m^2=n^2+1994$?

1594. Leia võrrandi $x!+y!=10z+9$ kõik täisarvulised lahendid.

1595. Lahenda võrrandisüsteem

$$\begin{cases} x+y+z+u=5 \\ y+z+u+v=1 \\ z+u+v+x=2 \\ v+x+y+z=4 \end{cases}, \text{ kui } u+v=-x-y.$$

1596. Lahenda võrrandisüsteem.

a) $\begin{cases} x^3+y^3=7 \\ xy(x+y)=-2; \end{cases}$ b) $\begin{cases} x^4+y^4=17 \\ x+y=3; \end{cases}$ c) $\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ x^3+y^3=1. \end{cases}$

1597. Lahenda võrrandisüsteem.

a) $\begin{cases} (x+y)^4+4(x+y)^2=117 \\ x-y=25 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x^4+x^2y^2+y^4=481 \\ x^2+xy+y^2=37 \end{cases}$

1598. Lahenda võrrandisüsteem.

a) $\begin{cases} y^3-9x^2+27x-27=0 \\ z^3-9y^2+27y-27=0 \\ x^3-9z^2+27z-27=0; \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2y^3+2x^2+3x+3=0 \\ 2z^3+2y^2+3y+3=0 \\ 2x^3+2z^2+3z+3=0. \end{cases}$

(Moskva Riikliku Ülikooli konkursiülesanded.)

1599. Leia reaalarvude paarid, mille korral
$(x+y-1)^2+(x-y+3)^2=0$.

1600. Uuri arvuti abil, kas arv 1 000 001 on algarv.

1601. Leia $(1+\frac{1}{1})(1+\frac{1}{2})(1+\frac{1}{3})\ldots(1+\frac{1}{99})$.

1062. Leia arvuti abil avaldise väärtus, kui $n=2; 3; \ldots; 20$

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right].$$

1603. Arvud a, b, c ja d on positiivsed reaalarvud, mille korrutis on 1. Tõesta, et sel juhul $a^2+b^2+c^2+d^2+ab+ac+ad+bc+bd+cd \geq 10$.

1604. Kui suur saab olla maksimaalselt kolmnurga pindala, kui

1605. Maleturniirist võttis osa 8 maletajat ja igaüks neist kogus erineva arvu punkte. Teisele kohale tulnud maletaja kogus niisama palju punkte kui neli viimast kokku. Millise tulemusega lõppes partii kolmanda ja seitsmenda koha saanud maletajate vahel?

1606. On teada, et arvud a, b, c ja d on positiivsed reaalarvud. Tõesta, et vähemalt üks kolmest võrratusest on väär.

a) $a+b<c+d$; b) $(a+b)(c+d)<ab+cd$; c) $(a+b)cd<ab(c+d)$.

1607. Osutitega seinakell näitab 4. Mitme minuti pärast jõuab minutiosuti tunniosutile järele? Eeldame, et osutid liiguvad ühtlaselt.

1608. Aurik läbib tee Kiievist Dnepropetrovskisse kahe ööpäevaga. Tagasitulekuks kulub kolm ööpäeva. Mitme ööpäevaga ujub parv Kiievist Dnepropetrovskisse?

1609. Kaks töölist oleks seina ladunud 12 tunniga. Kui algul oleks esimene tööline ladunud pool seina ja seejärel teine tööline teise poole, siis oleks aega kulunud 25 tundi. Kui palju oleks kumbki tööline aega kulutanud terve seina ladumiseks?

1610. Kaks traktorit oleks põllu üles kündnud T päevaga. Kui algul oleks üks traktor kündnud poole põllust ja seejärel teine traktor teise poole, siis oleks aega kulunud K päeva. Mitme päevaga künnaks kumbki traktor terve põllu?

1611. Kolm ehitusmeest oleks majale aknad paigaldanud T tunniga. Esimene neist, töötades üksi, teeks töö kaks korda kiiremini kui kolmas tööline ja ühe tunni võrra kiiremini kui teine tööline. Mitu tundi kuluks igaühel neist akende paigaldamiseks, kui nad töötaksid üksinda?

1612. On kaks vee ja piirituse segu. Ühes segus on vee ja piirituse vahekord 2 : 3 ja teises segus 3 : 7. Kui palju tuleks kummastki segust võtta, et saada segu, milles on vee ja piirituse vahekord 5 : 11?

1613. Klubi saalis on A tooli, igas reas ühepalju toole. Kui igasse ritta lisada B tooli, kuid ridade arvu vähendada C võrra, siis kohtade arv väheneb $\frac{1}{10}$ esialgsest. Kui palju on toole igas reas?

1614. Kaubast müüdi $A\%$ kasumiga $P\%$, ülejäänud kaubast $B\%$ kasumiga $Q\%$. Kui suure kasumiga tuleb müüa allesjäänud kaup, et kasum kogu kauba müügist oleks $R\%$?

1615. Kaks keha liiguvad mööda ringjoont ühes ja samas suunas. Esimene keha läbib ringjoone 2 sekundi võrra kiiremini kui teine ja esimene keha möödub teisest iga 12 sekundi järel. Kui palju aega kulub kummalgi kehal ringjoone läbimiseks?

1616. Leia avaldise $\frac{\cos(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha+\beta)}$ väärtus, kui $\tan\alpha=\frac{3}{4}$, $\cos\beta=\frac{5}{13}$, $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ ja $0<\beta<\frac{\pi}{2}$.

1617. Lihtsusta

$$1+\sin(\alpha-2\pi)\cos(\alpha-\tfrac{3\pi}{2})-\tan(\pi-\alpha)\tan(\tfrac{3\pi}{2}-\alpha)-2\cos^2\alpha.$$

1618. Lihtsusta avaldis

$\frac{\sin^4 3\alpha-\cos^4 3\alpha}{\sin^2 3\alpha-\cos^2 3\alpha}+\tan^2\alpha$ ja arvuta selle väärtus, kui $\alpha=30°$.

1619. Tõesta, et $\tan 7°30'=\sqrt{6}+\sqrt{2}-\sqrt{3}-2$.

1620. Sirge läbib punkte $A(x_1;\ y_1)$, $B(x_2;\ y_2)$ ja $C(x_3;\ y_3)$. Tõesta, et sel juhul

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1\\ x_2 & y_2 & 1\\ x_3 & y_3 & 1\end{vmatrix}=0.$$

1621. Sirge läbib punkte $A(x_1;\ y_1)$ ja $B(x_2;\ y_2)$. Tõesta, et sel juhul sirge võrrand on

$$\begin{vmatrix} x & y & 1\\ x_1 & y_1 & 1\\ x_2 & y_2 & 1\end{vmatrix}=0.$$

1622. Punkt $E(1;-1)$ on ruudu keskpunkt ja ruudu külg asub sirgel $x-2y+12=0$. Koosta nende sirgete võrrandid, millel asuvad ülejäänud küljed.

1623. Missuguse a korral sirge $(a+2)x+(a^2-9)y+3a^2-8a+5=0$

a) on paralleelne x-teljega,

b) on paralleelne y-teljega,

c) läbib koordinaatide alguspunkti?

1624. Tõesta, et kui sirged $A_1x+B_1y=C_1$, $A_2x+B_2y=C_2$ ja $A_3x+B_3y=C_3$ lõikuvad ühes punktis, siis

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1\\ A_2 & B_2 & C_2\\ A_3 & B_3 & C_3\end{vmatrix}=0.$$

1625. Kontrolli, kas sirged lõikuvad ühes punktis.

a) $2x+3y-1=0$, $4x-5y+5=0$, $3x-y+2=0$;

b) $3x-y+3=0$, $5x+3y-7=0$, $x-2y-4=0$;

c) $2x-y+1=0$, $x+2y-17=0$, $x+2y-3=0$.

1626. Leia a väärtus, mille korral sirged $2x-y+3=0$, $x+y+3=0$ ja $ax+y-13=0$ lõikuvad ühes punktis. Tee joonis.

1627. Leia kolmnurga pindala, kui kolmnurka piiravad x-telg, y-telg ja sirge $3x-4y-12=0$.

1628. Leia kolmnurga ABC mediaanide lõikepunkti koordinaadid, kui

a) $A(0;\ 0)$, $B(0;\ 3)$ ja $C(5;\ 0)$; b) $A(1;\ 3)$, $B(3;\ 6)$ ja $C(-2;\ 5)$.

1629. Leia k väärtus, mille korral $\vec{a}+k\vec{b}$ on kollineaarne vektoriga $\vec{c}$

a) $\vec{a}=(2;\ 3)$, $\vec{b}=(3;\ 5)$ ja $\vec{c}=(-1;\ 3)$;

b) $\vec{a}=(1;\ 0)$, $\vec{b}=(2;\ 2)$ ja $\vec{c}=(3;\ -5)$;

c) $\vec{a}=(3;\ -2)$, $\vec{b}=(1;\ 1)$ ja $\vec{c}=(0;\ 5)$.

1630. Kolmnurgas ABC on punkt H kõrguste lõikepunkt. On teada, et $\overrightarrow{AB}=(6;\ -2)$, $\overrightarrow{AC}=(3;\ 4)$. Leia vektori $\overrightarrow{AH}$ koordinaadid.

1631. On antud kolmnurk ABC. Tõesta, et võrdus $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\vec{O}$ kehtib vaid juhul, kui punkt O on mediaanide lõikepunkt.

1632. On teada, et $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=1$, $|\vec{c}|=4$ ja $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{O}$. Leia $\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{c}\cdot\vec{a}$.

1633. Arvuta $\vec{a}\,\vec{b}$, kui

a) $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=3$ ja $|\vec{a}+\vec{b}|=4$; b) $|\vec{a}|=4$, $|\vec{b}|=2$ ja $|\vec{a}-\vec{b}|=10$.

1634. Leia $|\vec{a}+\vec{b}|$, kui $|\vec{a}|=11$, $|\vec{b}|=23$ ning $|\vec{a}-\vec{b}|=30$.

1635. Tõesta, et punkti $A(x_1;\ y_1)$ kaugus sirgest $Ax+By+C=0$ arvutatakse valemiga $d=\frac{|Ax_1+By_1+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$.

1636. Kui kaugel asuvad punktid $A(-2;\ 3)$, $B(3;\ 4)$, $C(0;\ 1)$ ja $D(-3;\ 5)$ sirgest $3x-4y=5$?

1637. Kolmnurga ABC kaks tippu on $A(-1;\ -1)$ ja $B(4;\ 5)$, kolmas tipp asub sirgel $y=5(x-3)$. Kolmnurga pindala on 9,5. Leia tipu C koordinaadid.

1638. Koosta ringjoone võrrand, kui ringjoon läbib punkte $A(2;\ 0)$, $B(5;\ 0)$ ja puudutab y-telge.

1639. On antud ringjoon $x^2+y^2=4$. Koosta x-teljega paralleelse sirge võrrand, kui on teada, et sirge lõikab ringjoont punktides M ja N ning $|MN|=1$.

1640. Tasandil on antud vektorid $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ ja $\vec{d}$ nii, et nende vektorite summa on nullvektor. Tõesta, et sel juhul

$|\vec{a}|+|\vec{b}|+|\vec{c}|+|\vec{d}|\geq|\vec{a}+\vec{d}|+|\vec{b}+\vec{d}|+|\vec{c}+\vec{d}|$.

1641. Kolmnurga ABC sees on võetud suvaliselt punkt O. Tõesta, et kehtib võrdus $S_A\cdot\overrightarrow{OA}+S_B\cdot\overrightarrow{OB}+S_C\cdot\overrightarrow{OC}=\vec{O}$, kus S_A, S_B ja S_C on kolmnurkade BCO, CAO ja ABO pindalad.

VANU ÜLESANDEID VÕRRANDITE JA VÕRRANDISÜSTEEMIDEGA

1. Leia arv, kui on teada, et sellele arvule liites $\frac{2}{3}$ temast ja saadud tulemusest lahutades $\frac{1}{3}$ saadud summast, saame arvu 10. (Ülesanne on Ahmese papüüruselt, 2000 — 1700 a. e. Kr.)

2. Pythagorase käest küsiti seda, kui palju on tal õpilasi. Pythagoras vastas: „Pooled minu õpilastest on õpivad matemaatikat, neljandik muusikat, seitsmes osa tegeleb vaikse mõtisklemisega ja on veel kolm naisterahvast." Kui palju oli Pythagorasel õpilasi? (Ülesanne „Kreeka antoloogiast" — heksameetris kirjutatud ülesannete kogust, mida kasutati eriti laialdaselt X — XIV saj. p. Kr.)

3. Laisk mees oli alates oma 18. eluaastast $\frac{3}{8}$ ajast maganud, $\frac{1}{16}$ söönud ja joonud, $\frac{1}{4}$ jalutanud, $\frac{1}{16}$ mänginud, $\frac{1}{16}$ kiiktoolis haigutanud ja ikkagi veel kokku 2 aastat töötanud. Kui vanalt ta suri? (Heis, 1880.)

4. Muistendi järgi sai kümneaastases Trooja sõjas üheainsa röövitud naise, ilusa Helena pärast surma 1 566 000 inimest, kreeklaste poolel 194 000 enam kui troojalaste poolel. Mitu inimest hukkus kummalgi poolel? (Neudorffer, 1616.)

5. Keegi palgati tööle aastapalgaga 12 rubla pluss kaftan. Töötanud 7 kuud, ta lahkus. Tasuks anti talle 5 rubla ja kaftan. Leia, kui palju maksis kaftan, kui on teada, et tasu maksti õiglaselt? (Ülesanne L. F. Magnitski „Aritmeetikast", 1703.)

6. Keegi ütles oma sõbrale: „Anna mulle 100 ruupiat ja ma olen sinust kaks korda rikkam." Sõber vastas: „Anna sina mulle 10 ruupiat ja ma olen sinust kuus korda rikkam." Kui palju oli kummalgi raha? (Bhaskara, umbes 1150. a.)

7. Muul ja eesel vedasid kõrvuti rasket koormat. Muul kurtis eeslile: „Kui sina annaksid minule ühe mõõdu oma koormast, siis saaks minu koorem sinu omast kaks korda raskemaks; kui aga mina annaksin oma koormast ühe mõõdu sinule, oleks meil ühepalju kanda." Kui suur koorem oli eeslil ja muulal? (Ülesanne „Kreeka antoloogiast".)

8. Üks ütleb teisele: „Anna mulle 7 dinaari ja ma olen sinust 5 korda rikkam." Teine vastab: „Anna sina mulle 5 dinaari ja ma olen sinust 7 korda rikkam." Kui palju oli kummalgi dinaare? (Ülesanne itaalia matemaatiku Leonardo Fibonacci (1180 — 1240) raamatust „Liber abaci" (1202).)

9. Veinikaupmees ostis kaht liiki veini. Kallimat veini oli vaadis 5 pange. See maksis 150 rubla. Odavamat veini oli vaadis 7 pange. See maksis 140 rubla. Kaupmees tahtis saada 50 pange kahe veini segu, mida saaks müüa hinnaga 30 rubla pang. Ühe pange pealt teeniks nii kolm rubla. Kui palju peab kaupmees ostma kummatki sorti veini? (A. Strannoljubski „Algebra kursus, mis põhineb järkjärgulisel aritmeetika ülesannete üldistamisel", 1868.)

10. Ahvikarja kaheksas osa, võetud ruutu, hüples murul, mängust röömu tundes. Kaksteist ülejäänud ahvi istus lobisedes künkal. Mitu ahvi oli karjas? (Bhaskara, umbes 1150. a.)

11. Lotoselill ulatub veest välja pool jalga. Tuulest viltu vajununa on tema õis 2 jala kaugusel esialgsest asendist veepinnal. Kui sügav on vesi? (Bhaskara, 1150.)

12. Lahenda võrrand $\frac{1}{x^2} + 2\frac{1}{x} = 1\frac{1}{4}$. (Umar Haijami (1048 — 1131) ülesanne.)

13. Leia kaks arvu, mille summa on 20, aga korrutis 96.
(Diophantes, traktaadist „Aritmeetika", III saj. p.Kr.)

14. Leia kaks arvu, mille summa on 10, aga ruutude summa 68.
(Diophantes, traktaadist „Aritmeetika".)

15. Leia niisugused kolm arvu, et suurem ületaks keskmist väiksema kolmandiku võrra, keskmine ületaks väiksemat suurema kolmandiku võrra ja väiksem oleks kümnest suurem keskmise arvu kolmandiku võrra. (Diophantes, traktaadist „Aritmeetika".)

16. Leia kaks arvu, mille jagatis on 3, aga mille ruutude summa jagatis arvude summaga on 5. (Diophantes, traktaadist „Aritmeetika".)

17. Leia kolm arvu, kui esimese kahe arvu summa korrutis kolmanda arvuga on 35, esimese ja kolmanda arvu summa korrutis teise arvuga on 27, teise ja kolmanda summa korrutis esimesega on 32. (Diophantes, traktaadist „Aritmeetika".)

18. Leia ristküliku küljed, kui on teada külgede suhe ja pindala.
(Moskva papüürus, 2000 — 1700 e. Kr.)

19. Lahenda võrrand $\frac{x}{10-x} + \frac{10-x}{x} = 25$. (Regiomontanus 1436 — 1476.)

20. Kolm meest, kel ei ole küllaldaselt raha, tahavad osta hobust, mille hind on 12 floriini. Esimene ütleb: „Andke mõlemad mulle pool oma rahast ja ma ostan hobuse." Teine ütleb: „Andke mõlemad mulle kolmandik oma rahast ja ma ostan hobuse." Kolmas ütleb „Andke mõlemad mulle neljandik oma rahast ja hobune on minu!" Kui palju raha oli igal mehel?
(Adam Riese, 1524.)

21. Kaks talunaist tõid turule müügiks 100 kanamuna; üks rohkem, teine vähem. Mõlemad müüsid munad ära ja teenisid ühepalju. Esimene ütles teisele: „Oleks minul sinu munad, ma oleks teeninud 15 kroitserit." Teine vastas: „Oleks minul sinu munad, ma oleks teeninud $6\frac{2}{3}$ kroitserit."
(Leonhard Euler, 1770.)

22. Leia arv, mille neljas aste annab pärast poolega sellest arvust jagamist ja $14\frac{1}{4}$ liitmist tulemuseks 100. (Leonhard Euler, 1770.)

23. Leia arv, millele arvu 5 liitmisel või arvu 11 lahutamisel saame mõlemal juhul täisruudu.
(Ühest Indiast leitud käsikirjast, mis on pärit umbes III — IV saj. p. Kr.)

24. 5 pühvlit ja 2 jäära maksid 11 kuldtukatit, 2 pühvlit ja 8 jäära 8 tukatit. Kui palju maksis pühvel, kui palju jäär?
(Ülesanne vanast hiina traktaadist „Matemaatika üheksas raamatus", II saj. e. Kr.)

25. Müüdi 2 pühvlit ja 5 lammast, osteti 13 siga. Järele jäi 1000 juaani. Müüdi 3 pühvlit ja 3 siga, osteti 9 lammast, tuli täpselt välja. Müüdi 6 lammast ja 8 siga, osteti 5 pühvlit, tuli 600 juaani puudu. Kui palju maksis lammas, pühvel ja siga?
(Ülesanne vanast hiina traktaadist „Matemaatika üheksas raamatus".)

26. Keegi kaupmees suurendab iga aastaga $\frac{1}{3}$ võrra oma tulusid. Pärast aastakokkuvõtet eraldab ta tuludest 100 naela. Selle raha kulutab ta oma perele. Kolme aasta pärast avastab kaupmees, et ta tulud on kahekordistunud. Kui palju raha oli tal alguses?
(I. Newtoni (1642 — 1727) „Üldine aritmeetika", 1707.)

27. Kaksteist inimest kannavad 12 leiba: iga mees kannab kahte leiba, iga naine poolt leiba ja iga laps veerandit leiba. Kui palju oli mehi, naisi ja lapsi?
(Ülesanne L. F. Magnitski „Aritmeetikast", 1703.)

28. Pärast kaupmehe surma jaotati ta varandus poegade vahel vastavalt testamendile. Vanem poeg sai 100 rubla ja $\frac{1}{6}$ jäägist, järgmine poeg sai 200 rubla ja $\frac{1}{6}$ jäägist, kolmas poeg sai 300 rubla ja $\frac{1}{6}$ jäägist jne., kuni noorem poeg sai kõik selle, mis jäi vanematest vendadest üle (jääki ei tekkinud). Lõpuks selgus, et kõik vennad said ühepalju. Mitu poega oli kaupmehel ja kui suur oli pärandus?

29. Tuleb segada kolme sorti teed: tseiloni teed, hinnaga 5 grivnat nael, india teed, hinnaga 8 grivnat nael ja hiina teed, hinnaga 12 grivnat nael. Millises vahekorras tuleb neid sorte võtta, et saada tee, mille hinnaks oleks 6 grivnat nael?
(Ülesanne L. F. Magnitski „Aritmeetikast", 1703.)

30. Kaksteist härga saavad süüa $3\frac{1}{3}$ juugerilt (vanarooma pindalaühik, umbes 2500 m²) karjamaalt 4 nädalat. 21 härga saavad 10 juugerilt samasuguselt karjamaalt süüa 9 nädalat. Mitu härga saab süüa 24 juugerilt karjamaalt 18 nädalat? Arvestada tuleb ka rohu kasvamisega.
(I. Newtoni „Üldine aritmeetika", 1707.)

IX peatükk. LÜHIKE JUHEND TÖÖKS BASIC'US

SISSEJUHATUS

BASIC on programmeerimiskeel, mis töötati välja 1960. aastate keskpaiku Ameerika Ühendriikides. Keele nimi BASIC (ingl. k. *basic* — põhiline) on tõlgendatav lühendina väljendist Beginners All-purpose Symbolic Instruction Code — algajate üldotstarbeline sümbolkäskude kood.

Basic on suhteliselt lihtne programmeerimiskeel, mille abil saab kasutaja suhelda arvutiga dialoogi vormis. Tänu oma lihtsusele ja kasutamismugavusele on Basic muutunud üheks enamkasutatavaks programmeerimiskeeleks maailmas.

Basic keelel on palju erinevaid versioone. Näiteks IBM-ga ühilduvatel arvutitel kasutatakse GWBasic'ut, Quick-Basicut ja Turbo-Basicut. Need versioonid on kõik üksteisest erinevad. Suured erinevused on ka „Yamahal" kasutatava MSX-Basicu ja „Jukul" kasutatavate keeleversioonide B80 ning Basicuga.

Püüame anda ülevaate Basicu lihtsamatest võimalustest, mis on ühised enamikule Basicu versioonidest. Paraku ei saa me garanteerida, et siin toodud näited ja programmitekstid töötavad isiklikel arvutitüübil mistahes Basicu versioonis. Seetõttu peab kasutaja tegema siin-seal väikseimaid muudatusi. Tuleb arvestada ka näiteks seda, et „Jukul" kasutatav B80 on küll väga sarnane GWBasicuga, kuid selles puudub graafika.

Oma käsitluse aluseks oleme võtnud „Microsoft GWBasic'u", sest selle kohta on lihtsal arvutikasutajal suhteliselt kergem saada eestikeelset lisainformatsiooni.[1]

BASIC-KEELE ELEMENDID

Nii nagu muudes keeltes, nii saab ka Basicus moodustada sõnu ja lauseid tähtedest. Basicu „tähestik" on järgmine.

Saab kasutada ladina alfabeedi tähti A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M, N, O, P, Q, R, S, T, U, V, W, X, Y, Z. Peale nende kasutatakse veel numbreid ja 0 – 9 ja tervet hulka spetsiaalseid sümboleid, näiteks

= — võrdusmärk või omistamismärk
+ — liitmismärk
- — lahutamismärk
* — korrutamismärk
/ — jagamismärk
^ — astendamistehte sümbol
, — koma
' — ülakoma
; — punktkoma (semikoolon)
: — koolon
? — küsimärk
% — protsendi märk
> — märk „suurem kui"
< — märk „väiksem kui"
(ja) — sulud
. — punkt või kümnendpunkt
" — jutumärgid
$ — rahaühiku märk (dollar)
\ — täisarvulise jagamise märk
& — märk „ja"

[1] Vt. näiteks ajakirja „Arvutustehnika ja Andmetöötlus" 1988. a. nr. 6 ja 1991. a. nr. 3-sisalduvat Basicu „spikrit", millest oleme meiegi üle võtnud oma käsitluse „spikri" osa.

Neid sümboleid kombineerides moodustatakse
— ***laused***, millest koostatakse programm,
— ***käsud***, mille abil töödeldakse programmi,
— ***andmed***, mida programm töötleb.

Andmed, mida Basic-keelne programm töötleb, jagunevad laias laastus kaheks: ***konstandid*** ja ***muutujad***. Nii konstandiks kui ka muutujaks võib olla nii ***tekstilõik*** (edaspidi nimetame neid ka *stringideks*) kui ka ***arv***.

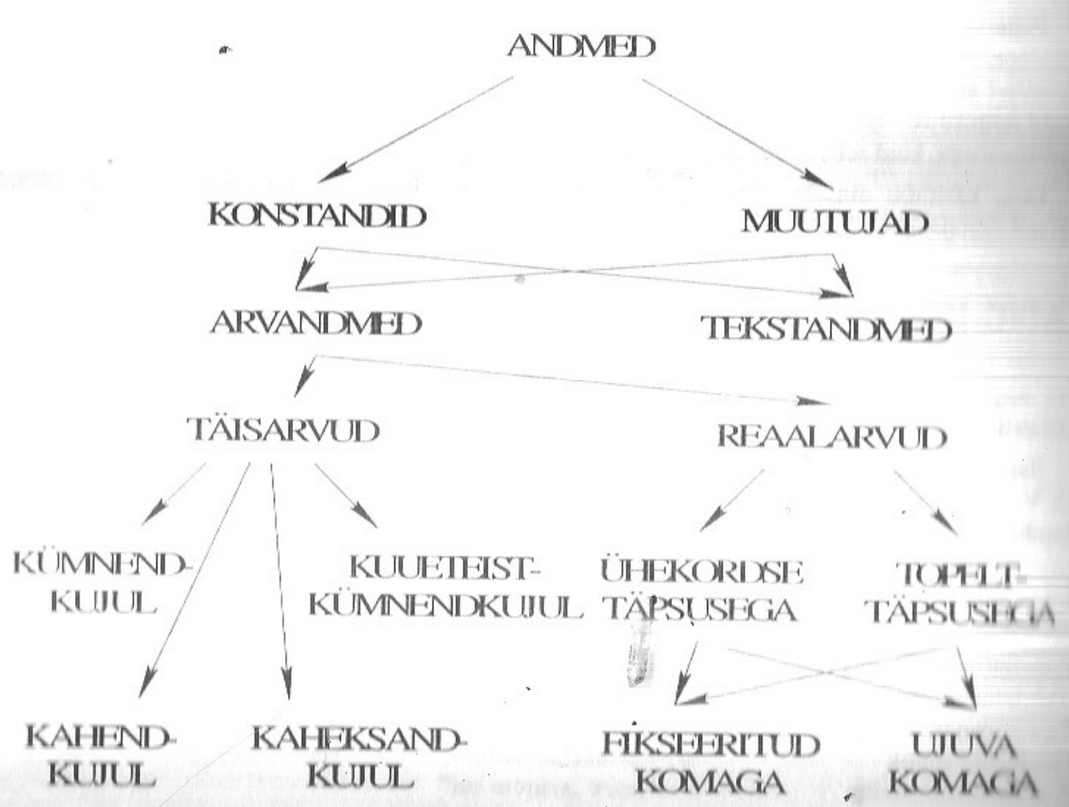
Arvandmed võivad olla ***täisarvulised*** (näiteks 2; – 5; 9999 jne.) või ***reaalarvulised*** (näiteks 3.14; $1.5 \cdot 10^6$; 98765.43210123). Täisarvud võivad olla esitatud kümnendsüsteemi, kahendsüsteemi, kaheksandsüsteemi ja kuueteistkümnendsüsteemi arvudena. Kahendsüsteemi arvude alguses on tähis &B, kaheksandsüsteemi alguses tähis &O, kuueteistkümnendsüsteemi alguses &H.

Reaalarvud võivad olla esitatud *ühekordse täpsusega arvudena* (maksimaalselt 7 numbrit) või *topelttäpsusega arvudena* (maksimaalselt 16 numbrit). Reaalarve võib esitada *fikseeritud komaga*, s.o. arvudena, milles on määratud, mitu kohta enne koma ja mitu kohta pärast koma peab arvu esituses olema. Näiteks, arvus 234.5678 on kolm kohta enne koma ja neli kohta pärast koma. Arve, mis on standardkujul, nimetatakse ***ujuvkomaga arvudeks***. Näiteks $2{,}345678 \cdot 10^2$.

Standardkujulisi arve tähistatakse Basicus järgmiselt.

Ühekordse täpsusega arvudel eelneb 10 astmele E täht,
näiteks $1{,}6 \cdot 10^{37}$ esitatakse Basicus kujul 1,6E + 37.

Topelttäpsusega arvudel eelneb 10 astmele D täht,
näiteks $1{,}2345678 \cdot 10^{-35}$ esitub Basicus kujul 1.2345678D – 35.



KOHESE TÄITMISE REŽIIM JA PROGRAMMEERIMISE REŽIIM

Nii nagu tavalises keeles, nii saab ka Basicus anda korraldusi koheseks täitmiseks ja edaspidiseks täitmiseks. Basicus nimetatakse neid töörežiime
a) kohese täitmise režiimiks ja
b) programmeerimise režiimiks.

Programmeerimise režiimi eelis on selles, et korraldus säilib pärast täitmist ja teda saab hiljem korduvalt kasutada.

KOHESE TÄITMISE REŽIIM

Kui tahetakse kasutada personaalarvutit kalkulaatorina, siis kasutatakse kohese täitmise režiimi. Tuleme mõned näited selle kohta.

Kui arvuti on tööks valmis, siis sisestame

`PRINT 20+5`[1] ja vajutame reavahetuse klahvile. Ekraanile ilmub arv 25.

Sisestades

`PRINT "Kaks korda kaks on "; 2*2` ning vajutades reavahetusele, saame:

Kaks korda kaks on 4.

Nüüdsest saab teha kõiki aritmeetilisi tehteid ja leida Basicus olemasolevate matemaatiliste funktsioonide väärtusi.

Näiteks, rida `PRINT SIN(0), COS(0)` toob pärast täitmist ekraanile siinuse ja koosinuse väärtused, kui nurk on null.

```
 0       1
```

Kohese täitmise režiimi abil saab teha ka keerulisemaid asju — katsetada ja testida valmistehtud programme. Näiteks, võib tuua ekraanile tabeleid. Järgmine rida,

`FOR I=1 TO 10:PRINT N,N^2,N^3:NEXT N`, toob ekraanile järgmise tabeli:

```
 1         1         1
 2         4         8
 3         9         27
 4         16        64
 5         25        125
 6         36        216
 7         49        343
 8         64        512
 9         81        729
 10        100       1000
```

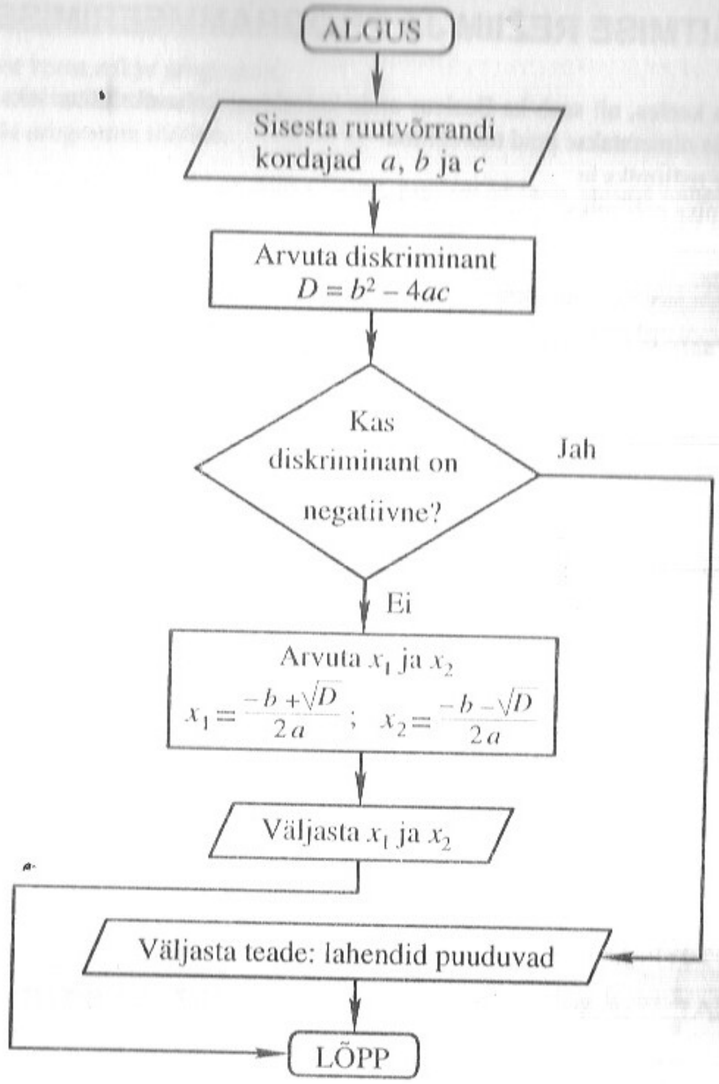
Esimeses veerus on arv, teises arvu ruut ning viimases veerus arvu kuup.

PROGRAMMEERIMISE REŽIIM

On palju ülesandeid, mille lahendamisel tuleb meil täpselt järgida mingit eeskirja. Selle järgimine aitab meil lahendada lihtsamaid võrrandeid ja võrrandisüsteeme, mängida edukalt „trips-traps-trulli" ja panna kokku Rubiku kuubikut. Eeskirju, mis määravad ülesande lahendamiseks vajalikud sammud ning nende sooritamise järjekorra, nimetatakse ***algoritmideks***. Uurime algoritmi, mida kasutatakse ruutvõrrandi reaalarvuliste lahendite leidmiseks personaalarvutil. See algoritm on esitatud *plokkskeemi* kujul.

---

[1] Eristamaks sisestatavat teksti muust tekstist esitame seda allakriipsutatuna. Eristamaks väljastatavat teksti muust tekstist esitame seda rasvaselt trükituna.



Kahjuks ei saa arvuti plokkskeemist aru ja seetõttu tuleb plokkskeem „tõlkida" arvutile arusaadavasse keelde — näiteks Basicusse. **Algoritmi esitust mingis arvutile mõistetavas keeles nimetatakse programmiks.**

Basicu programm koosneb ridadest, mis algavad üldjuhul reanumbriga. Reanumber peab olema naturaalarv. Reanumber ei saa olla kuitahes suur. Igas Basicu versioonis on olemas maksimaalne reanumber — mõnes versioonis 65 529, mõnes 32 767, mõnes veel väiksem.

Programmi täidetakse reanumbrite kasvamise järjekorras. Juhul kui programmi rida annab suunamise mingile teisele reale (vt. näiteks järgnevas programmis 70-ndat rida: `70 GOTO 90`), siis suundutakse sellele reale ja jätkatakse täitmist sealt.

Ühele reale võib märkida ka mitu programmilauset. Kui neid lauseid on mitu, siis peab nende lausete vahel olema *lauseeraldaja*. Enamikus Basicu versioonides kasutatakse lauseeraldajana koolonit (:), mõnes üksikus versioonis aga märki (\ ).

Ühest programmireast võib toimuda ka hargnemine. Juhul kui mingi tingimus on täidetud, siis suundutakse ühele reale, kui ei ole täidetud, siis hoopis teisele reale. Vaata näiteks järgneva programmi 30-ndat rida: `30 IF D<0 THEN 80` ← kui muutuja D väärtus on negatiivne, siis suundutakse 80-le reale, kui D ei ole negatiivne, siis järgmisele reale.

Esitamegi ülaltoodud algoritmi Basicu programmina:

```
10 INPUT „Sisesta ruutvõrrandi kordajad A, B ja C ";A,B,C
20 D=B^2-4*A*C
30 IF D<0 THEN 80
40 X1=(-B+SQR(D))/(2*A)
50 X2=(-B-SQR(D))/(2*A)
60 PRINT X1,X2
70 GOTO 90
80 PRINT „Lahendid puuduvad."
90 END
```

Parast selle programmi sisestamist ja käsu RUN abil käivitamist ilmub kuvarile allolev tekst ja arvuti jääb ootama ruutvõrrandi kordajate sisestamist. } rida 10

`Sisesta ruutvõrrandi kordajad A, B, C?`

NB! Kordajad tuleb sisestada ühe reana, arvude vahele tuleb panna märk „ , " — *tekstikoma*. Juhul kui kordajad ei ole täisarvud, siis tuleb kasutada arvu keskel punkti „ . " — *arvukoma*. Ruutliikme kordaja A väärtuseks ei tohi sisestada nulli. Miks?

Selles reas arvutatakse avaldise $B^2 - 4AC$ väärtus ja omistatakse see muutujale D. } rida 20

Selles reas kontrollitakse, kas diskriminant on negatiivne. Kui on, siis siirdutakse reale 80, kui ei ole, siis reale 40. } rida 30

Arvutatakse välja üks ruutvõrrandi lahend, selle väärtus omistatakse muutujale X1. } rida 40

Arvutatakse välja teine ruutvõrrandi lahend, selle väärtus omistatakse muutujale X2. } rida 50

Väljastatakse kuvarile saadud ruutvõrrandi lahendid. } rida 60

Siirdutakse programmi lõppu. } rida 70

Väljastatakse teade „Lahendid puuduvad." } rida 80

Programmi lõpp } rida 90

ARVMUUTUJAD JA TEKSTMUUTUJAD

Arvmuutujat tähistatakse tavaliselt ühe ladina alfabeedi tähega, mille juurde võib kuuluda ka üksik number [1].

Näiteks D, K, X1, N7.

Juhul, kui arvmuutuja esitab täisarvu, on ta järel märk %, kui reaalarvu, siis võib kasutada (ei pea kasutama!) märki !, kui topelttäpsusega reaalarvu, siis on ta järel märk #.

Tekstmuutujat tähistatakse tavaliselt ühe ladina tähestiku tähega. Tekstmuutuja tähisele järgneb alati märk „$". Tekstmuutujad on näiteks A$, Q$, C1$, Y3$.

Juhul kui muutuja algab tähtedega FN, siis loetakse teda kasutaja poolt defineeritud funktsiooniks.

[1] Paljudes uuemates Basicu versioonides võib nii arvmuutujat kui ka tekstmuutujat tähistada hoopis pikema tekstilõiguga. Sellise tekstilõigu pikkus võib olla kuni 40 märki; neist esimene peab olema täht, mitte aga arv.

MASSIIVID

Kui meil on suurem hulk ühetüübilisi andmeid, näiteks õpilaste nimed ja iga õpilase hinded, siis juhul, kui me tahame neid kõiki muutujatega tähistada, läheb tarvis väga palju erinevaid muutujaid. Mõistlik oleks suure hulga tähiste kasutamise asemel neid ühte tüüpi andmeid tähistada ühte moodi teatud tervikutena (*massiividena*) ja hoida neid nii ka arvuti mälus. Selliseid andmetervikuid kutsuvad programmeerijad tavaliselt **massiivideks**.[1]

Massiiv koosneb massiivi elementidest, millest igaühel on selles massiivis fikseeritud kindel koht.

Massiive tähistatakse sarnaselt muutujatega. Erinevus muutujatest on selles, et tähisele järgnevad sulud ning sulu sees on naturaalarv või muutuja naturaalarvuline väärtus.

Tuleb teha vahet mingi massiivi elemendi ja muutuja väärtuste vahel. Näiteks, K$(1) tähistab ühe tekstimassiivi esimest elementi, K1$ aga üht tekstmuutujat, millel võib olla hoopis muu väärtus. Täpselt samuti võib öelda, et $Z5 \neq Z(5)$. Esimene neist on arvmuutuja, teine aga arvu massiivi viies element.

Olgu näiteks järgmine andmehulk — kuude nimed ja nende pikkused:

Jaanuar, 31
Veebruar, 28
Märts, 31

Detsember, 31.

Mõistlik oleks need andmed esitada kahe massiivina. Ühes massiivis (tähistame K$( )) on kuude nimetused, teises massiivis (tähistame P( )) vastavate kuude pikkused päevades. Piltlikult võiks seda olukorda kujutada järgmiselt:

K$(1)	K$(2)	K$(3)	. . .	K$(11)	K$(12)
Jaanuar	Veebruar	Märts	. . .	November	Detsember
P$(1)	P$(2)	P$(3)	. . .	P$(11)	P$(12)
31	28	31	. . .	30	31

Näiteks massiivi K$( ) seitsmes element on „Juuli", massiivi P( ) üheksas element on päevade arv septembris, s.o. 30.

Kui ühes massiivis on üle üheteistkümne (mõnes Basicu versioonis üle 10) elemendi, siis tuleb selleks, et seda massiivi kasutada, eraldada arvuti mälus ruumi. Mälu eraldamiseks massiivile on Basicus lause DIM.

Basicus saab kasutada ka kahemõõtmelisi massiive. Neid läheb vaja tabelite ülesmärkimiseks.

TEHTED ARVUDEGA

Avaldis, mille väärtust arvutatakse, võib sisaldada muutujaid, konstante ning tehete sümboleid. Basicus kasutatakse järgmisi tehteid:

+ ← liitmine	näiteks 2+3 on 5.
- ← lahutamine	näiteks 3-2 on 1.
* ← korrutamine	näiteks 2*3 on 6.
/ ← jagamine	näiteks 2/3 on .6666667.

[1] Ühemõõtmelist massiivi kutsutakse vahel ka vektoriks (vt. aritmeetilise vektori kirjeldust selle raamatu punktis 6.10.) ja järjendiks. Kahemõõtmelist massiivi kutsutakse vahel ka maatriksiks.

^ ← astendamine	näiteks 3^2 on 9.
\ ← täisarvuline jagamine (leiab kahe täisarvu jagatise täisosa)	näiteks 17\5 on 3.
MOD ← modulo (leiab jagamisel tekkiva jäägi)	näiteks 17 MOD 5 on 2.

Mõnes algelisemas Basicus kahte viimast tehet ei ole.

Kui ühes avaldises kasutatakse mitut aritmeetikatehet, siis kehtivad seniõpitud tehte järjekorra reeglid. Seega, kõigepealt tehted sulgudes, seejärel astendamised, siis korrutamised ja jagamised. Nende järel tehakse täisarvulised jagamised ja jäägi leidmised ning kõige lõpuks liitmised ja lahutamised. Näiteks

Avaldis	Samm	Tehe	Tulemus
A+B*C/D^E	1	D^E	R1
	2	B*C	R2
	3	R1/R2	R3
	4	A+R3	R4
(A+B)*C/D^E	1	A+B	T1
	2	D^E	T2
	3	T1*C	T3
	4	T3/T2	T4

Pea meeles, et kahte tehet ei tohi märkida vahetult teineteise kõrvale. Näiteks X*-Y. Õige oleks X*(-Y).

Korrutustehte märk tuleb märkida alati. Näiteks A(B+1) esitatakse Basicus kujul A*(B+1). Miks?

TEHTED TEKSTILÕIKUDEGA

On üksainus tehe — kahe tekstilõigu liitmine, mida tähistatakse „ + " märgiga. Olgu näiteks kaks tekstilõiku X$="SABA " ja Y$="KASSI".

Siis X$+Y$="SABA KASSI", aga Y$+X$="KASSISABA ".

VÕRDLUSTEHTED

Võrdlustehteid saab kasutada kahe arvavaldise või kahe tekstilõigu omavaheliseks võrdlemiseks. Basicus kasutatakse järgmisi võrdlustehteid:

Tehe	Tähendus
=	on võrdne
<>	pole võrdne
<	on väiksem kui
>	on suurem kui
<=	on väiksem või võrdne
>=	on suurem või võrdne

Võrdlustehteid kasutatakse tihti konstruktsiooni IF . . . THEN juures.

Et tekstilõikude võrdlemine on arvavaldiste võrdlemise kõrval vähemtuntud asi, siis peatume sellel pikemalt. Tekstilõike on vaja võrrelda näiteks siis, kui me peame panema mõne nimekirja alfabeetilisse järjekorda.

Arvutil on olemas teatud kooditabel, nn. ASCII tabel. Selles tabelis on kõigi kasutatavate sümbolite koodid. Kui mingit kahte sümbolit võrreldakse omavahel, siis tegelikult võrreldakse nende sümbolite koode.

Arvude 0 – 9 koodid on 48 kuni 57. Tähestiku suurtähtede koodid algavad tähega A (65) ja lõpevad tähega Z (90). Väiketähed algavad tähega a (92) ja lõpevad tähega z (122). Tähed on kooditabelis üldiselt alfabeetilises järjekorras, välja arvatud mõned eesti tähestiku „katusega" tähed (õ, ä, ö, ü, š, ž). Neid tähti igas kooditabelis ei ole, seetõttu võib juhtuda, et teie arvuti ja printeriga neid tähti kasutada ei saa. Ka võib tekkida probleeme järjestamisega, sest nad ei paikne kooditabelis täpselt selles järjekorras nagu eesti tähestikus.

Tekstilõike võrreldakse sarnaselt nende alfabeetilise järjestamisega. Olgu meil kaks tekstilõiku `"MARGOT"` ja `"MARGIT"`. Esimesed neli sümbolit on neis tekstilõikudes samad, seega võrdleme viiendaid. Et O täht on tähest I alfabeedis tagapool, siis O kood on suurem kui I kood ja `"O">"I"`. Seega ka `"MARGOT">"MARGIT"`.

Kui meil on kaks tekstilõiku `"Pat"` ja `"Patasson"`, siis kehtib võrratus `"Pat"<"Patasson"`.

Kui meil on kaks tekstilõiku, näiteks `"JAAK"` ja `"JAAK "`, siis neli esimest sümbolit neis tekstilõikudes on võrdsed. Et teises tekstilõigus on veel üks sümbol — tühik, siis on teine tekstilõik suurem. Seega, `"JAAK"<"JAAK "`.

LOOGIKATEHTED

Selleks, et võrrelda keerukamaid avaldisi ja kontrollida üheaegselt mitmeid võrdusi ja võrratusi, kasutatakse *loogikatehteid*. Tihti läheb loogikatehteid vaja lauset `IF...THEN...ELSE` kasutades. Avaldistele, lausetele ja tingimustele, mis sisaldavad loogikatehteid, on omistatud *tõeväärtus*. Tõese lause tõeväärtus on 1 ja väära lause tõeväärtus on 0.

Basicus kasutatavad loogikatehted on järgmised:

NOT (NOT — ingl. k. ei, mitte) — loogiline eitus.
AND (AND — ingl. k. ja) — loogiline korrutamistehe.
OR (OR — ingl. k. või) — loogiline liitmistehe e. mittevälistav või.
XOR (eXclusive OR — ingl. k. välistav või) — välistav või.
EQV (EQuiValence — ingl. k. ekvivalentsus e. samaväärsus) — loogiline ekvivalentsus e. samaväärsus.
IMP (IMPlication — ingl. k. järelduvus) — implikatsioon e. loogiline järelduvus.

Järgnevas kirjeldaksime neid veidi põhjalikumalt.

NOT — loogikatehe, mida rakendatakse ainult ühele avaldisele. NOT-tehe muudab avaldise väärtuse vastupidiseks. Kui avaldis X on tõene, siis avaldis `NOT X` on väär. Kui avaldis X on väär, siis avaldis `NOT X` on tõene. Seda tõsiasja illustreerib ka järgmine tabel:

X	NOT X
1	0
0	1

AND — loogikatehe, mida rakendatakse kahele avaldisele. AND-tehte tulemus on tõene siis ja ainult siis, kui mõlemad avaldised on tõesed. AND-tehte tulemust illustreerib järgmine tabel:

X	Y	X AND Y
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

AND-tehet nimetatakse ka loogiliseks korrutamiseks — viimase tabeli kolmandas veerus olevad arvud on saadavad esimese ja teise veeru vastavate arvude korrutamise teel.

OR — loogikatehe, mida rakendatakse kahele avaldisele. Seda „mittevälistavat või" võib lahti mõtestada järgmiselt — „Kas üks või teine või mõlemad". OR-tehte tulemus on väär parajasti siis, kui mõlemad avaldised, mida ta ühendab, on väärad. OR-tehte tulemust illustreerib järgmine tabel:

X	Y	X OR Y
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

XOR — loogikatehe, mida rakendatakse kahele avaldisele. Seda „välistavat või" võib lahti mõtestada järgmiselt — „Üks või teine, kuid mitte mõlemad". XOR-tehe annab tulemuseks tõese, kui mõlemate avaldiste tõeväärtused on erinevad; väära, kui nende tõeväärtused on ühesugused. XOR-tehte tulemust illustreerib järgmine tabel.

X	Y	X XOR Y
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	0

EQV — ekvivalents e. samaväärsus. See on kahele avaldisele rakendatav loogikatehe, mis on tõene parajasti siis, kui avaldised X ja Y on mõlemad tõesed või mõlemad väärad. EQV-tehte tulemust illustreerib järgmine tabel:

X	Y	X EQV Y
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

IMP — implikatsioon e. loogiline järelduvus on kahele avaldisele rakendatav loogikatehe. Kirjaviisi `X IMP Y` võib lahti mõtestada nii: „Kui X, siis Y". Implikatsioon on väär ainult siis, kui esimene lause on tõene, teine aga väär. Kõigil ülejäänud juhtumitel on implikatsioon tõene. Seda võib illustreerida järgmise tabeliga:

X	Y	X IMP Y
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Kui lauses on aritmeetikatehteid, võrdlustehteid ja loogikatehteid, siis tehakse kõigepealt ära aritmeetikatehted, seejärel võrdlustehted ja lõpuks loogikatehted. Kui Basic-programmi lauses kasutatakse mitut loogikatehet, siis tehakse neid tehteid samas järjekorras, milles tutvustas neid teile ülaltoodud lühikirjeldus.

BASICU LAUSED PRINT. END. LET. REM

Lause PRINT esitab tekst- ja arvandmeid ekraanil.

Lause END lõpetab programmi töö. END-lause reanumber on tavaliselt kõige suurem reanumber antud programmis. END-lauset kasutatakse üldjuhul programmis üksainus kord.

Näide 1.

```
10 PRINT "Ameerika avastati 1492. aastal"
20 PRINT 1968-1492;" aastat hiljem jõudis inimene Kuu pinnale"
30 PRINT "Ühes aastas on keskmiselt";
40 PRINT 365.25*24*60*60;" sekundit."
50 END
```

Pärast käivitamist ilmuvad kuvarile järgmised read:

```
Ameerika avastati 1492. aastal
476 aastat hiljem jõudis inimene Kuu pinnale
Ühes aastas on keskmiselt 3.15576E+07 sekundit.
```

LET (ingl. k. — olgu) lause abil omistatakse tekst- ja arvmuutujaile väärtusi.

Näiteks

```
LET A=5                          ← Annab muuutujale A väärtuseks 5.
LET B$="Maakera on ümmargune"    ← Annab tekstmuutujale B$ väärtuseks jutumärkide
                                   vahel oleva teksti.
LET X=-P/2+SQR(P^2/4-Q)          ← Annab muutujale X väärtuseks X = -p/2 + √(p²/4 - q).
LET D$(5)="REEDE"                ← Tekstimassiivi D$() viies element saab väärtuseks REEDE.
LET Y=Z4                         ← Muutujale Y omistatakse muutuja Z4 väärtus.
LET N=N+1                        ← Muutuja N väärtust suurendatakse ühe võrra.
```

Näiteks järgmine programm teatab pärast käivitamist: **Pindala on 42**.

```
10 LET A=6
20 LET B=7
30 LET S=A*B
40 LET E$="Pindala on "
50 PRINT E$;S
60 END
```

Pea meeles, et võrdusmärki mõistetakse LET-lauses kui omistamismärki. Omistamismärgist paremal pool oleva avaldise väärtus omistatakse sellest märgist vasakul olevale muutujale. Näiteks Basicus on korrektne lause LET B4=C. Lause LET B-4=C ei ole korrektne.

LET-lause omapäraks on see, et enamikus Basicu versioonides võib LET-i ära jätta, kuid säilitada omistamine. Seega näiteks lause A=5 on samane lausega LET A=5.

PRINT-käsu üldine kuju on järgmine:

PRINT x_1 *eraldaja* x_2 *eraldaja* x_3 . . . x_i *eraldaja*,

kus x_1, x_2, x_3, . . . , x_i on ekraanile toodavad tekstilõigud või muutujate väärtused ja eraldajaks nende vahel on semikoolon või koma.

Kui eraldajaks on semikoolon, siis trükitakse järgmine andmetervik vahetult eelmise järele. Kui eraldajaks on koma, siis trükitakse järgmine andmetervik eelmise järele esimesse vabasse tabulatsioonipositsiooni.

Kui PRINT-lause lõpeb semikooloniga, siis alustatakse järgmise PRINT-lausega sealt, kus eelmise PRINT-lausega lõpetati. Kui PRINT-lause lõpeb komaga, siis jätkatakse järgmise PRINT-lausega esimeselt vabalt tabulatsioonipositsioonilt. Kui PRINT-lause lõpeb ilma semikooloni või komata, siis trükitakse järgmine lause alates järgmise rea algusest.

Tihti kasutatakse PRINT-lauset koos funktsiooniga TAB. Selle funktsiooni abil saab alustada väljastust antud reas alates veerust, mis on märgitud TAB-i järele sulgudesse. Seal võib olla arv 0, . . . 79.

Näide

```
10 A=6:B=4:C=20
20 D=A*B/C
30 PRINT A,B,C,D,B-C
40 PRINT A;B;C;D
50 PRINT
60 PRINT A,A,A,A,A,A,A
70 PRINT
80 PRINT B*C,"Ikka samal real",
90 PRINT (B*C)^A
100 X$="Seda lauset korratakse,"
110 LET Y$=X$
120 PRINT "01234567890123456789012345678901234567890123456789012345678901234567890"
130 PRINT TAB(C);"TERE!";TAB(36);A*C
140 PRINT Y$;X$
150 END
```

Pärast programmi käivitamist saame järgmise tulemuse:

```
                rea number
 6       4      20      1.2     -16      30
 6  4  20  1.2                           40
                                         50
                                         60
 6       6      6       6       6        60
 6       6                               70
 80      Ikka samal real      2.62144E+11 80  90
 01234567890123456789012345678901234567890123456789012345678901234567890  120
                 TERE!          120      130
 Seda lauset korratakse,Seda lauset korratakse,                            140
```

Read 30 ja 40 näitavad, mille poolest erineb koma ja punktkoma kasutamine. Read 50 ja 70 väljastavad tühja rea. Rida 60 trükitakse kahele reale, sest tabulatsioonipositsioone oli vaja rohkem kui on ekraanireas. Et rida 80 lõpeb komaga, siis trükitakse järgnev rida eelneva lõppu. 130. programmirida väljastab alates 20. veerust teksti „TERE!" ja alates 36. veerust arvude A ja C korrutise.

Lause LPRINT kasutamine on sarnane PRINT-lause kasutamisega, ainult et tulemused väljastatakse ekraani asemel printerile.

REM-lauset kasutatakse kommentaaride kirjutamiseks programmi juurde.

REM on lühend sõnast REMARK, mis tähendab inglise keeles kommentaari.

REM lause pole mõeldud arvutile, sest arvuti seda lauset ei täida. REM-lauset kasutatakse selleks, et arvutikasutajal oleks hõlpsam programmi lugeda.

Varemtoodud programmile, mis lahendas ruutvõrrandeid, oleks võinud juurde kirjutada järgmised kommentaarid:

```
 5 REM === Programm lahendab ruutvõrrandeid ===
 8 REM === A,B ja C sisestage komadega eraldatult, kusjuures a<>0.
10 REM && D - diskriminant &&
35 REM *Kui on kaks erinevat lahendit*
85 REM %Kui lahendid puuduvad%
```

REM-lausega saab programmi kommenteerida nii, et kommentaar moodustab ühe omaette seisva Basicu lause. Kui see lause on mõne teise Basicu lausega ühel real, siis tuleb see lause eraldada käsueraldajaga. REM-lause asemel saab programmi kommenteerida ka märgi ' (ülakoma) abil. Ülakomaga alustatud kommentaar ei ole iseseisev lause ja seda ei pea käsueraldajaga eraldama.

LAUSED INPUT GOTO IF . . . THEN . . . ELSE

INPUT-lause loeb klaviatuurilt sisestatavaid andmeid. Näiteks, lause INPUT A trükib kuvarile küsimärgi ja jääb ootama arvu väärtuse sisestamist. Lause INPUT A$ trükib samuti ekraanile küsimärgi ja jääb ootama tekstmuutuja A$ väärtuse sisestamist.

Enamikus Basicu versioonides saab INPUT-lausega trükkida kuvarile ka teksti. Näiteks, lause INPUT "Sisesta vanus ";V trükib ekraanile teksti ja **Sisesta vanus ?** ja jääb ootama arvmuutujale V väärtuse sisestamist.

Ühe INPUT-lausega võib sisestada ka mitme muutuja väärtused, aga need väärtused tuleb eraldada komadega.

```
INPUT "Teata nimi, sugu (M/N) ja vanus";A$,B$,C
```

Selle lause täitmise tulemusena omistatakse muutujale A$ isiku nimi, muutujale B$ tema sugu, muutujale C vanus.

NB! Pea meeles, et tekstmuutuja väärtuseks võib olla ka arv. Arvmuutuja väärtuseks aga tekstiloit olla ei saa. Juhul kui INPUT-lauses eeldatakse arvu sisestamist, aga programmi kasutaja sisestab teksti, siis mõnedes Basicu versioonides ilmub ekraanile teade:

Redo from start?

Siis saab selle vea parandada ja korrata sisestust.

GOTO-lause üldkuju on järgmine: GOTO *reanumber*.

Näiteks lause GOTO 100 suunab programmi täitmise reale 100.

NB! Kui me kasutame lauset GOTO programmis, siis peab see reanumber, millele GOTO suunab, olema programmis kasutatud.

Selle näitamiseks, kuidas töötab IF . . . THEN . . . ELSE toome järgmise programmilõigu:

```
10 REM &&& Skunksi müümine &&&
20 Y$="See on Sinust väga ilus, aga tead, mul on üks veel"
30 N$="Kõik ütlevad, et ei osta"
40 INPUT "Osta skunks ära ";A$
60 IF A$="ostan küll" THEN PRINT Y$ ELSE PRINT N$
70 GOTO 40
80 END
```

Pärast seda, kui oled selle programmi käivitanud, näed, et sel programmil on mitu puudust. Esimeseks puuduseks on see, et arvuti loeb kõik muud vastused peale "ostan küll" keeldumiseks (sealhulgas ka vastused "ostanküll" ja "Ostan küll"). Teiseks puuduseks on see, et see programm jääbki neid skunkse müüma, s.t. tal ei ole lõppu. Viimasest puudusest vabanemiseks võime lisada programmile rea

```
50 IF A$="mine metsa!" THEN 80
```

Kuigi see rida sisestatakse pärast 80. rea sisestamist, on ta tegelik koht 40-nda ja 60-nda rea vahel.

IF . . . THEN . . . ELSE lause üldkuju on järgmine:

IF *tingimus* THEN *esimene avaldis või esimene reanr* ELSE *teine avaldis või teine reanr*.

Lause täitmine toimub järgmiselt:
Kui *tingimus* on tõene, siis täidetakse esimene avaldis või suundutakse esimese reanumbriga märgitud reale; kui *tingimus* on väär, siis täidetakse teine avaldis või suundutakse teisena märgitud reale.

Mõnes Basicu versioonis ei saa lauseosa ELSE kasutada. Seal siirdutakse juhul, kui tingimus on täitmata, järgmisele reale.

Vahel kasutatakse lause IF . . . THEN kõrval ka lauset IF . . . GOTO. Siis on lause üldkuju IF *tingimus* GOTO *reanumber*.

FOR . . . TO . . . STEP . . . NEXT

Toome kõigepealt ära kaks programmi, mis leiavad paarisarvude 2 kuni 100 summa.

```
10 REM Paarisarvude 2-100 summa
20 REM S-summa; N-järgmine arv
30 N=N+2
40 S=S+N
50 IF N<100 THEN 30
60 PRINT "Summa on ";S
70 END
```

```
10 REM Paarisarvude 2-100 summa
20 REM
30 FOR I=2 TO 100 STEP 2
40 S=S+N
50 NEXT N
60 PRINT "Summa on ";S
70 END
```

Need programmid annavad ühe ja sama tulemuse, kuid parempoolne on ülevaatlikum ja ka kergemini loetav.

FOR ja NEXT on lausete paar, mille abil koostatakse tsükleid. Tsükkel on FOR-lause ja NEXT-lause vaheline osa, mida täidetakse korduvalt.

FOR-lausest algab tsükkel ja see lause näitab, mitu korda tuleb seda tsüklit täita. NEXT-lause lõpetab tsükli ja kontrollib, mitu korda on tsüklit täidetud.

FOR-lause üldkuju on järgmine:

FOR M=A TO L STEP S,

kus M on tsükli muutuja,
A on selle muutuja algväärtus,
L on selle muutuja lõppväärtus ja
S on selle tsükli muutuja muutumise samm.

Juhul, kui sammu ei ole märgitud, loetakse ta võrdseks 1-ga.

NEXT-lause üldkuju on järgmine:

NEXT M.

kus M on tsükli muutuja.
NEXT-lause kontrollib, kas M on võrdne L-ga. Kui pole, siis lisab ta M-le sammu S juurde ja suunab järgmise käsu juurde pärast FOR-lauset. Kui M=L, siis NEXT annab juhtimise üle järgmisele lausele pärast NEXT-lauset.

FOR . . . NEXT tsükli kasutamisoskust läheb vaja väga paljudes kohtades. Üheks neist on kõikvõimalike tabelite väljatrükk. Näiteks, järgmine programm trükib välja arvud, nende arvude ruudud, kuubid ja ruutjuured.

```
10 INPUT "Millest";A
20 INPUT "Milleni";B
30 INPUT "Mitmise sammuga";N
40 FOR S=A TO B STEP N
50 PRINT S,S^2,S^3,SQR(S)
60 NEXT S
70 END
```

Ühe FOR . . . NEXT tsükli võib panna teise FOR . . . NEXT tsükli sisse, kuid siin peab arvestama, et sisemine tsükkel peab paiknema täielikult välimise sees.

```
FOR I=1 TO N
FOR K=1 TO M
NEXT K
NEXT I
```

Õige kasutusviis

```
FOR I=1 TO N
FOR K=1 TO M
NEXT I
NEXT K
```

Väär kasutusviis

Kahekordse FOR . . . NEXT näiteks toome programmi, mis „sõelub välja" nn. Pythagorase kolmikuid.
Pythagorase kolmikud on sellised täisarvud A, B ja C, mille korral kehtib võrdus $C^2 = A^2 + B^2$.

```
10 PRINT "Pythagorase kolmikud"
20 FOR A=1 TO 99
30 FOR B=A TO 99
40 C=SQR(A^2+B^2)
50 IF C=INT(C) THEN PRINT A,B,C
60 NEXT B
70 NEXT A
80 END
```

Reas 40 leitakse C kui ruutjuur arvude A ja B summast.
Reas 50 kontrollitakse, kas arv C on võrdne oma täisosaga (kui on, siis on C täisarv); selleks kasutatakse *funktsiooni* INT, mis aitab leida täisosa.

Mida teeb järgmine programm?

```
10 PRINT "1X1"
20 FOR X=1 TO 10
30 FOR Y=1 TO 10
40 PRINT TAB(5*Y);X*Y;
50 NEXT Y
60 NEXT X
70 END
```

FUNKTSIOONID BASICUS

Basicus saab kasutada tervet hulka standardiseeritud funktsioone. Funktsioon ei ole lause, seda saab aga kasutada lause osana.

Funktsiooni argument on funktsiooni nime järel sulgude sees. Argumendiks võib olla arv, muutuja või avaldis. Avaldis võib omakorda sisaldada funktsioone, näiteks

```
10 INPUT X
20 PRINT X,SIN(X), COS(X),TAN(X),1/TAN(X)
30 PRINT SIN(SQR(X)+1)
```

See programm trükib ekraanile arvu, tema siinuse, koosinuse, tangensi ja tangensi pöördväärtuse (kootangensi). Teisele reale trükib programm siinuse arvu X ruutjuurest, millele on liidetud 1.

Funktsioonid jagunevad kaheks. Ühed funktsioonid on mõeldud tööks arvandmetega, teised tööks tekstandmetega.

Funktsioon ABS(X) leiab arvu X absoluutväärtuse.
Funktsioon INT(X) annab suurima täisarvu, mis ei ole suurem X-st.
Funktsioon FIX(X) annab arvu X täisosa.
Funktsioon SGN(X) annab arvu X märgi.
Funktsioon RND (mõnes versioonis RND(X)) annab juhuarvu vahemikus 0 . . . 1.
Funktsioon RANDOMIZE paneb juhuarvude generaatori juhuslikku seisu.
Funktsioon SIN(X) leiab arvu X siinuse.
Funktsioon COS(X) leiab arvu X koosinuse.
Funktsioon TAN(X) leiab arvu X tangensi.
} X peab olema esitatud radiaanides.

Funktsioon ATN(X) leiab arvu X arkustangensi. Väärtus on radiaanides, vahemikus $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$.
Funktsioon EXP(X) leiab arvu e (e = 2.71828 . . .) X-nda astme.
Funktsioon LOG(X) leiab arvu X naturaallogaritmi. X peab olema positiivne.
Funktsioon SQR(X) leiab arvu X ruutjuure. X ei tohi olla negatiivne.

Vajaduse korral saab kasutaja ise luua funktsioone juurde. Need funktsioonid võivad olla nii ühe muutuja funktsioonid kui ka *mitme muutuja funktsioonid*. Selleks, et programmis mõnd isetehtud funktsiooni kasutada, tuleb kõigepealt see funktsioon defineerida.

Funktsiooni defineerimiseks on lause DEF FN.

Näiteks defineerime kolme muutujaga funktsiooni, mis arvutab välja ühe ruutvõrrandi lahenditest:

```
DEF FNX1(A,B,C)=(-B+SQR(B*B-4*A*C))/(2*A)
```

Kui funktsioon on defineeritud, siis pärast defineerimist saab seda funktsiooni kasutada kuitahes palju kordi.

Toome veel mõned näited defineeritud funktsioonide kohta:

```
FNR(X)=(X/180)*3.141593
```
— teisendab kraadid radiaanideks.

```
FNU(X,N)=INT(X*10^N+.5)/10^N
```
— ümardab arvu X N kohta koma järel.

```
FNT(A,L)=A+INT(RND(X)*(L-A+1))
```
— genereerib juhuarvud alates arvust A (algus) kuni arvuni L (lõpp) sammuga 1.

```
FNT(A,L,S)=A+S*INT(RND(X)*((L-A)/S+1))
```
— genereerib juhuarvud alates arvust A (algus) kuni arvuni L (lõpp) sammuga S.

```
FNM(A,B)=((A+B)-ABS(A-B))/2
```
— leiab kahest sisestatud arvust A ja B minimaalse.

```
FNM(A,B)=((A+B)+ABS(A-B))/2
```
— leiab kahest sisestatud arvust A ja B maksimaalse.

```
FNC(X)=1/TAN(X)
```
— leiab arvu X kootangensi.

```
FNA(X)=ATN(X/SQR(1-X*X))
```
— leiab arkustangensi abil arkussiinuse.

```
FNJ(L,N)=L-N*INT(L/N)
```
— leiab jäägi (nn. moodulifunktsioon); L — lugeja, N — nimetaja.

Juhuslike arvude generaator annab tegelikult pseudojuhuslikke arve. Lause RANDOMIZE toob ekraanile küsimuse

```
Random number seed (-32768 to 32767)?
```

Sellele küsimusele vastuseks tuleb sisestada mingi arv sellest vahemikust.

Järgmine programm trükib välja 5 pseudojuhuslikku arvu vahemikust 0 – 1.

```
10 RANDOMIZE
20 FOR S=1 TO 5
30 A=RND
40 PRINT A
50 NEXT S
60 END
```

Käivitame selle programmi ja RANDOMIZE poolt esitatavale küsimusele vastame: 100.

```
Random number seed (-32768 to 32767)? 100
 .6421716
 .3360541
 .6738085
 .9198399
 .8513622
```

Järgmine programm trükib välja 15 juhuslikku täisarvu ühest kuni kuueni.

```
10 PRINT "Täringu visete simulatsioon"
20 PRINT
30 REM Tsükkel 15 viske jaoks
40 FOR K=1 TO 15
50 A=INT(RND*6)+1
60 PRINT A;
70 NEXT K
80 END
```

Pärast käivitamist saame 15 juhuslikku arvu vahemikus 1 – 6:

```
3  5  3  4  1  1  6  2  2  5  3  3  1  3  6
```

TEKSTIFUNKTSIOONIDEST

Basicus on terve hulk tekstifunktsioone, enamkasutatavad neist on järgmised:

`LEN(A$)` ← Leiab tekstilõigu `A$` pikkuse, näiteks `LEN("Tekst")=5`.

`LEFT$(A$,n)` ← Leiab `n` vasakpoolset märki tekstilõigust `A$`. Näiteks `LEFT$("MIKU JA MANNI",7)` on `"MIKU JA"`.

`RIGHT$(A$,n)` ← Leiab `n` parempoolset märki tekstilõigust `A$`. Näiteks `RIGHT$("MIKU JA MANNI",5)` on `"MANNI"`.

`MID$(A$,m,n)` ← Leiab tekstilõigust `A$` osa, mis algab `m`-ndast sümbolist ja on `n`-sümbolit pikkune. Näiteks `MID$("MIKU JA MANNI",7,5)` on `"A MAN"`.

`INSTR(k,A$,B$)` ← Leiab, mitmendal kohal on tekstilõigu `B$` algus tekstilõigus `A$`, alates kohast `k`. Näiteks `INSTR("MIKU JA MANNI","JA")` on 6, ja `INSTR(4,"MIKU JA MANNI","JA")` on 6, aga `INSTR(7,"MIKU JA MANNI","JA")` on 0.

`VAL(A$)` ← Leiab numbritest koosneva tekstilõigu arväärtuse. Näiteks `VAL("57")` on arv 57.

Järgmine programm teisendab ingliskeelseid nimisõnu ainsusest mitmusesse:

```
10 INPUT W$
20 IF RIGHT(W$,1)<>"Y" THEN P$=W$+"S":GOTO 50
30 L=LEN(W$)
40 P$=LEFT$(W$,L-1)+"IES"
50 PRINT "The Plural of ";W$;" is ";P$
60 END
```

Näiteks, sisestades sõnad WORD ja STORY, saame

```
? WORD
The Plural of WORD is WORDS
? STORY
The Plural of STORY is STORIES
```

Järgmine programm leiab, mitu korda esineb otsitav täht antud tekstilõigus:

```
10 INPUT "Sisesta tekstilõik";A$
20 INPUT "Sisesta otsitav täht";B$
30 FOR R=1 TO LEN(A$)
40 IF MID$(A$,R,1)=B$ THEN S=S+1
50 NEXT R
60 PRINT "Täht ";B$;" esines tekstilõigus ";S;" korda."
70 END
```

Pärast programmi käivitamist saame näiteks:

```
Sisesta tekstilõik? MUSTA LEHMA SABA VALGE LEHMA TAGA...
Sisesta täht? A
Täht A esines tekstilõigus 8 korda.
```

Järgmine programmilõik koostab sisestatud tekstilõigu A$ abil tekstilõigu B$, mis koosneb samadest tähtedest vastupidises järjekorras. Juhul, kui saame sama tekstilõigu tagasi, teatab programm, et tegu on palindroomiga.[1]

```
10 INPUT "PALUN SISESTA TEKSTILÕIK";A$
20 FOR I=LEN(A$) TO 1 STEP -1
30 B$=B$+MID$(A$,I,1)
40 NEXT I
50 IF A$=B$ THEN PRINT A$;" ON PALINDROOM"
60 IF A$<>B$ THEN PRINT A$;" JA ";B$;" EI OLE PALINDROOMID"
70 END
```

Pärast selle programmi käivitamist võime saada näiteks järgmisi tulemusi:

```
PALUN SISESTA TEKSTILÕIK? AIAS SADAS SAIA
AIAS SADAS SAIA ON PALINDROOM
```

või

```
PALUN SISESTA TEKSTILÕIK? MISSISSIPI
MISSISSIPI JA IPISSISSIM EI OLE PALINDROOMID
```

[1] NB! Selle programmi abil saab leida ainult neid palindroome, mis annavad ümberpööratud järjestuses *täpselt sama teksti*. Näiteks sõnad LAMMAS ja SAMMAL on palindroomid, aga nii lihtsale programmile käib selle kindlakstegemine üle jõu.

DIM-LAUSE

Kui tahame mingit massiivi kasutada, siis tuleb selle massiivi jaoks eraldada arvuti mälus ruumi.

`DIM` lausele järgnevad kasutatavate massiivide nimed. Iga massiivi järel on sulgudes kirjas selle massiivi suurus.

Näiteks lause `DIM A(100),B(30,40)` eraldab mälus ruumi kahele massiivile, neist massiiv `A()` on ühemõõtmeline massiiv, milles on 100 elementi, `B( , )` on aga kahemõõtmeline massiiv, milles on 30×40 elementi.

Lause `DIM A$(40),F(N)` eraldab mälus ruumi samuti kahele massiivile, neist `A$()` on tekstimassiiv, milles on ruumi 40 tekstilõigule. `F()` aga arvumassiiv, milles on ruumi `N` arvule. Mõnedes Basicu versioonides on massiivi esimese elemendi järjekorranumber null, mõnedes üks.

Järgmine programm simuleerib 600 täringuviset. Massiivi `C()` kasutatakse selleks, et üles märkida seda, mitu korda on esile tulnud mingi number.

```
10 DIM C(6)
20 FOR P=1 TO 600
30 A=INT(RND(1)*6+1)
40 C(A)=C(A)+1
50 NEXT P
60 FOR R=1 TO 6
70 PRINT R;" esines ";C(R);" korda"
80 NEXT
90 END
```

Pärast käivitamist saame järgmise tulemuse:

```
1 esines 93 korda
2 esines 92 korda
3 esines 92 korda
4 esines 120 korda
5 esines 102 korda
6 esines 101 korda
```

LAUSED DATA, READ JA RESTORE

Peale `INPUT`-lause on veel muid võimalusi programmi andmete sisselugemiseks. Üheks selliseks on lausete `DATA` ja `READ` kasutamine.

Nende lausete korral ei oota arvuti andmete sisestamist klaviatuurilt, nagu `INPUT` lause korral, vaid loeb ise sisse andmed, mis on kirjas programmi sees.

DATA-lausega esitatakse arv- ja tekstandmeid, mille väärtused omistatakse READ-lauses olevatele muutujatele. DATA-lauses olevad arv- ja tekstandmed on üksteisest eraldatud komadega. DATA-lause üldkuju on järgmine:

DATA ***väärtus 1, väärtus 2, . . . , väärtus n***

READ-lause omistab DATA-lauses olevaid väärtusi READ-lauses olevatele muutujatele. READ-lauses on muutujad samuti üksteisest eraldatud komadega. READ-lause üldkuju on järgmine:

READ ***muutuja 1, muutuja 2, . . . , muutuja n***

Võtame näiteks järgmise programmilõigu:

```
10 READ A,B,H$,C
20 READ K,L$,M,N
30 DATA 1,9,JUKU,35,42
40 DATA 11,12,13,14,65
```

See programmilõik omistab muutujatele A, B, H$, C, K, L$, M ja N järgmised väärtused:

A	B	H$	C	K	L$	M	N
1	9	JUKU	35	42	11	12	13

DATA-lausetest moodustab arvuti ühe ühtse andmejada (DATA-jada), millest esimene READ-lause loeb algusest järjest elemente ja omistab nende väärtused READ-lause järel loetletud komaga eraldatud muutujatele. Järgmine READ jätkab andmete lugemist sealt, kus eelmine READ-lause lõpetas.

Kui DATA-jadas on väärtusi programmi READ-lausete jaoks liiga palju, siis jäävad viimased väärtused lugemata (näiteks selles programmilõigus 14 ja 65). Kui väärtusi tuleb puudu, siis väljastab arvuti veateate ja programmi täitmine katkeb. Seetõttu tuleb alati kontrollida, et DATA-lausete abil oleks programmis küllaldaselt andmeid, mida READ-lausete abil sisse lugeda.

Pea meeles, et READ-lausetega loetavad väärtused oleksid andmetüübi poolest kooskõlas DATA-jada vastavate väärtustega. Näiteks, tekstmuutuja väärtuseks saab omistada ka arvu, aga arvmuutuja väärtuseks teksti ei saa.

DATA-lausel on veel üks iseärasus — ta peab paiknema programmis eraldi real.

READ-lause täitmisel programmi ei katkestata (nii nagu INPUT-lause korral) ja seetõttu töötab programm kiiremini ning on välistatud programmi kasutaja poolt andmete sisestamisel tehtavad vead.

Kui tahame programmis ühtesid ja samu DATA-jada väärtusi korduvalt kasutada, siis läheb vaja RESTORE-lauset.

Järgmine programm väljastab ekraanile DATA-jadas loetletud filmide pealkirju ja küsib kasutajalt nende filmide lavastajate nimesid. Juhul, kui kasutaja eksib, siis programm väljastab õige lavastaja nime.

35-ndat programmirida kasutatakse selleks, et valida filmide pealkirjü juhuslikult, s.t. et umbes pooltel juhtudest omistatakse järjekordse filmi pealkiri ja autori nimi muutujatele V$ ja W$, mida edaspidi ei kasutata. Nii nihkub loendur DATA-jadas kahe elemendi võrra edasi. Juhul, kui tahetakse pärast kümmet küsimust ja vastust veel kord oma teadmisi proovile panna, võimaldab RESTORE lause alustada DATA-jada kasutamist selle algusest peale.

```
10 PRINT "SULLE NÄIDATAKSE FILMIDE NIMESID, SINA PEAD SISESTAMA"
20 PRINT "(SUURTE TÄHTEDEGA) LAVASTAJA PEREKONNANIME"
30 FOR I=1 TO 10
35 IF RND(1)<.5 THEN READ V$,W$
40 READ A$,B$
50 PRINT A$;:INPUT " LAVASTAJA ON";C$
60 IF C$=B$ THEN PRINT "ÕIGE" ELSE PRINT "VÄÄR! ÕIGE ON ";B$
70 NEXT I
80 INPUT "KAS VEEL (J/E) ";D$
90 IF D$="E" OR D$="e" THEN 190
100 RESTORE
110 GOTO 30
120 DATA KULLAPALAVIK,CHAPLIN,KODANIK KANE,WELLES,PATUKAHETSUS,ABDULAZE
130 DATA MAASIKAVÄLU,BERGMAN,PALJAS SAAR,SHINDO,JAAM KAHELE,RJAZANOV
140 DATA ANDREI RUBLJOV,TARKOVSKI,AMARCORD,FELLINI,LUNASTUS,TARKOVSKI
150 DATA RISTIISA,COPPOLA,IVAN GROZNÕI,EISENSTEIN,SÜGISSONAAT,BERGMAN
160 DATA LINNUD,HITCHCOCK,LUMIVALGEKE JA SEITSE PÕIALPOISSI,DISNEY
170 DATA 39 SAMMU,HITCHCOCK,SUURLINNA TULED,CHAPLIN,GARAAZ,RJAZANOV
180 DATA KRAMER KRAMERI VASTU,BENTON,RAHVUSE SÜND,GRIFFITH,ROOMA,FELLINI
190 END
```

LAUSED ON . . . GOTO, GOSUB JA ON . . . GOSUB

Tihti on vaja sõltuvalt mingi avaldise väärtusest anda juhtimine mitmele erinevale programmireale. Selleks kasutatakse lauset ON . . . GOTO. Selle lause üldkuju on järgmine:

ON ***muutuja*** **GOTO** ***reanumbrite loetelu***

Reanumbrite loetelus on need reanumbrid, kuhu suunatakse, eraldatud komadega. ON . . . GOTO-lause täitmisel ümardatakse **muutuja** väärtus täisarvuks. Kui tulemus on 1, siis siirdutakse esimese numbriga märgitud reale, kui 2, siis teise numbriga märgitud reale jne. Kui ümardamise tulemus on väiksem ühest või suurem kui reanumbrite arv lauses ON . . . GOTO, siis jätkatakse lausele ON . . . GOTO järgneva lause täitmisega.

Järgmine programm „genereerib" nn. spordiennustuse tulemusi (**1**, **X** ja **2**), valides neid juhuslikult

```
10 REM Juhuslikud spordiennustuse tulemused
30 RANDOMIZE
30 FOR I=1 TO 13
40 X=INT(3*RND+1)
50 ON X GOTO 60,70,80
60 PRINT I,"1":GOTO 90
70 PRINT I,"X":GOTO 90
80 PRINT I,"2"
90 NEXT I
100 END
```

40. programmirida omistab muutujale X väärtuseks kas 1, 2, või 3. Kui X = 1, siis suunab 50. programmirida 60-ndale reale. Kui X = 2, siis 70-ndale reale ja kui X = 3, siis 80-ndale reale. Pärast programmi käivitamist saame näiteks järgmised tulemused:

```
Random number seed (-32768 to 32767)? 99
 1    1
 2    1
 3    X
 4    X
 5    1
 6    1
 7    1
 8    1
 9    X
 10   2
 11   X
 12   X
 13   X
```

Pseudojuhuarvude asemel saab kasutada ka ehtsaid juhuarve. Selleks on mitu erinevat võimalust. Ühes neist kasutavad programmeerijad tekstifunktsiooni INKEY$. See funktsioon loeb klaviatuuri puhvrist momendil vajutatud klahvi koodi. Kui klahvi ei ole vajutatud, siis siirdub programm järgmise lause juurde.

Viimasele programmile tuleks lisada 15. rida ja muuta 20-ndat rida, tehes seda järgmiselt:

```
15 PRINT "Vajuta suvalisele klahvile"
20 A$=INKEY$:R=RND:IF A$="" THEN 20
```

Kui mingit programmilõiku kasutatakse antud programmis korduvalt, siis on mõistlik see lõik vormistada eraldi alamprogrammina.

Alamprogrammi suundumiseks kasutatakse GOSUB-lauset. Sõna GOSUB on lühend ingliskeelsest väljendist „go to subprogram" — siirduda alamprogrammi.
GOSUB-lause üldkuju on järgmine:

GOSUB ***reanumber*** ,

kus reanumbriks on selle rea number, millest algab alamprogramm.

Alamprogramm peab lõppema lausega RETURN (ingl. k. „return" — pöörduda tagasi). RETURN-lause suunab programmi täitmise GOSUB-lausele järgneva lause juurde. Alamprogrammi poole võib antud programmis pöörduda kuitahes palju kordi.

Toome ühe lihtsa näite:

```
10 PRINT "Selle rea järel siirdutakse alamprogrammi"
20 GOSUB 50
30 PRINT "Oleme jälle põhiprogrammis"
40 GOTO 70
50 PRINT "See rida trükitakse alamprogrammis"
60 RETURN
70 END
```

Pärast programmi käivitamist saame:

```
Selle rea järel siirdutakse alamprogrammi
See rida trükitakse alamprogrammis
Oleme jälle põhiprogrammis
```

Sõltuvalt avaldise väärtusest võib suunata ka mitmesse erinevasse alamprogrammi. Selleks kasutatakse lauset ON...GOSUB. Selle lause üldkuju on järgmine:

ON ***muutuja*** GOSUB ***reanumbrite loetelu***

Lauset ON...GOSUB kasutatakse analoogiliselt lausega ON...GOTO.

Näiteks järgmine programmilõik

```
10 INPUT X
20 PRINT "Teadmised on";
30 ON X GOSUB 100,200,300,400,500
40 END
100 PRINT "nõrgad":RETURN
200 PRINT "mitterahuldavad":RETURN
300 PRINT "rahuldavad":RETURN
400 PRINT "head":RETURN
500 PRINT "väga head":RETURN
```

väljastab vastavalt X väärtusele 1, 2, 3, 4 ja 5 kas "Teadmised on nõrgad", "Teadmised on mitterahuldavad", "Teadmised on rahuldavad", "Teadmised on head" või "Teadmised on väga head".

Kontrolli, mis juhtub, kui sisestada muid arve peale täisarvude 1 – 5.

Järgmine programm sisaldab DATA-jadas kuue linna vahekauguste tabeli. Kasutaja peab sisestama linnade nimed suurte tähtedega. Programm teatab nende linnade vahekauguse. See programm illustreerib nii mõndagi seniõpitut: DATA ja READ-i kasutamist, kahemõõtmelisi massiive. Reast 270 algav alamprogramm määrab kindlaks selle, kas antud linna kohta on tabelis andmeid ja teeb kindlaks, mitmenda linnaga on tegemist.

```
10 DIM NIMI$(6),KAUGUS(6,6)
20 FOR R=1 TO 6
30 READ NIMI$(R)
40 DATA TALLINN,TARTU,PÄRNU,RAKVERE,HAAPSALU,VALGA
50 NEXT R
60 FOR R=1 TO 6
70 FOR S=1 TO 6
80 READ KAUGUS(R,S)
90 NEXT S
100 NEXT R
110 DATA 0,187,129,98,102,245
120 DATA 187,0,183,126,268,89
130 DATA 129,183,0,183,111,144
140 DATA 98,126,183,0,200,214
150 DATA 102,268,111,200,0,255
160 DATA 245,89,144,214,255,0
170 INPUT "SISESTA ESIMESE LINNA NIMI";B$
180 GOSUB 270
190 IF R=0 THEN 170
200 LET A=R
210 INPUT "SISESTA TEISE LINNA NIMI";B$
220 GOSUB 270
230 IF R=0 THEN 210
240 IF KAUGUS(A,R)=0 THEN PRINT "SEE ON ÜKS JA SAMA LINN":GOTO 260
250 PRINT "LINNADEVAHELINE KAUGUS ON ";KAUGUS(A,R);" KILOMEETRIT"
260 END
270 FOR U=1 TO 6
280 IF B$=NIMI$(U) THEN R=U ELSE R=0
290 NEXT U
300 IF R=0 THEN PRINT "SELLE LINNA KOHTA EI OLE INFORMATSIOONI"
310 RETURN
```

Seda programmi saab täiustada mitmes suunas: suurendada linnade arvu, muuta programm nii „intelligentseks", et ta mõistaks, et Tallinn ja TALLINN on üks ja sama linn. Andmeid võib DATA-jada asemel hoida ka andmefailides jne.

See kõik nõuaks aga tunduvalt põhjalikumat ja mahukamat käsitlust. Me ei looda, et selle lühijuhendi läbitöötamine õpetaks selgeks programmeerimise Basic-keeles. Küll aga võib temast olla abi esimeste sammude tegemisel Basicu õppimisel ning väikeste matemaatikaprobleemi illustreerivate programmilõikude koostamisel, kasutamisel ja katsetamisel.

1 õpuks kirjandus, millest võiks asjahuvilisel olla abi esimeste sammude tegemisel ja ka sügavama huvi korral.

See loend ei ole täielik. Raamatu ilmumise ajaks on see kindlasti vananenud, sest arvutialast kirjandust ilmub maailmas palju. Kahjuks ilmub Eestis sellist kirjandust suhteliselt vähe. Seetõttu on mõned raamatud inglise, saksa, soome või vene keeles. Tõsisemal asjahuvilisel on mõttekas tutvuda ka selle võõrkeelse kirjandusega, mida tal õnnestub hankida.

Alljärgnev kirjandus jaguneb kahte ossa: raamatud Basicust ning raamatud, mis tutvustavad personaalarvuteid ja nende kasutamist.

1. G. Diehr, T. Barron, T. Munro „BASIC Programming for the IBM Personal Computer", NY, John Wiley & Sons Inc, 1987.
2. D. Inman, B. Albrecht „Using Quick BASIC", Osborne McGraw-Hill, Berkeley, California, USA, 1988.
3. W. Schupp „Schüler Programmieren in BASIC", Paderborn, Verl. Ferdinand Schöningh, 1986.
4. H. Brockmeyer „Schüler Programmieren Graphiken in BASIC", Paderborn, Verl. Ferdinand Schöningh, 1986.
5. P. Fischer „BASIC für Anfängen", Berlin, Verl. Wirtschaft, 1987.
6. D. Walton „Programming exercises in BASIC", Oxford, Oxford University Press, 1983.
7. „BASIC-interpretaator. Kasutamisjuhend ja keele kirjeldus.", Tln., ETKVL, 1988 (Tõlge saksa keelest, tõlkinud A. Lehtlaan).
8. „BASIC-arvutigraafika". Abimaterjal informaatika õppijatele ja õpetajatele. Tln., VÕT, 1988. (Autor-koostaja A. Renzer.)
9. „MSX-BASIC. (Abimaterjal õpetajatele)". Tln, ENSV Haridusministeerium ja VÕT, 1987. (Koostaja V. Jokk).
10. R. Järgenson „Programmeerimine". Tln, Valgus, 1989.
11. U. Kaasik, J. Kiho, M. Koit „Kuidas programmeerida" — Tln, Valgus, 1990.
12. Ajakirja „Arvutustehnika ja andmetöötlus" järgmised numbrid: 1988, nr. 6; 1991, nr. 3; 1992, nr. 2. Seal sees Jüri Noore koostatud BASIC-u spikker. (Meie õpiku lõpus oleva spikri analoog ja eeskuju.)
13. В. Н. Дьяконов „Справочник по алгоритмам и программам на языке бейсик для персональных ЭВМ". Москва, Наука, 1989.
14. Г. И. Светозарова, А. А. Мельников, А. В. Козловский „Практикум по программированию на языке БЕЙЗИК". Москва, Наука, 1989.
15. Е. С. Башмакова, И. М. Витенберг, А. Б. Либеров „Программирование микроЭВМ на языке БЕЙЗИК". Москва, Радио и связь, 1991.
16. Г. Г. Гнездилова, О. А. Гончаров, Г. В. Сенин „Персональный компьютер в играх и задачах". Москва, Наука, 1988.
17. P. Aaltola, H. Hänninen „Lukion tiedotekniikka". Tampere, Weilin+Göös, 1985.
18. K. Bolle „Arvutiaabits". Tln, Valgus, 1990.
19. „Huvitav informaatika I" Tln, ENSV Haridusministeerium ja VÕT, 1987. (Autorid-koostajad Jaak Henno ja Leo Võhandu)
20. „Huvitav informaatika II" Tln, ENSV Haridusministeerium ja VÕT, 1989. (Autor-koostaja U. Agur)
21. J. Henno „Huvitav informaatika III. (PROLOG — see on imelihtne!)". Tln, ENSV Haridusministeerium ja VÕT, 1989.

LÜHIKE BASIC-KEELE SPIKKER

See spikker on koostatud ajakirjas „Arvutustehnika ja andmetöötlus" 1988 nr. 6 ilmunud Basicu spikri (autor Jüri Noor) eeskujul. Esimeses veerus on Basicu käskude ja lausete nimetused, teises nende seletused ja kolmandas mingi näide kasutamise kohta. Käskude täielikku süntaksit siin ei ole võimalik esitada, kuna see eeldaks hoopis põhjalikumat käsitlust. Kahjuks ühe matemaatika-õpiku mahupiirid seda ei võimalda.

ÜLDKÄSUD

AUTO	Peale <RETURN>-ile vajutamist annab automaatselt järgmise reanumbri	AUTO 20,5
CONT	Jätkab programmi tööd pärast <ctrl> + C-d, STOP-i või END-i	CONT
DELETE	Kustutab programmi read	DELETE 10-90
EDIT	Parandab antud numbriga rida	EDIT 120
FILES	Näitab ketta sisukorda.	FILES "*.BAS"
KILL	Kustutab kettal olevaid faile	KILL "*.BAK"
LIST	Näitab mälus olevat programmi täielikult või osaliselt	LIST 10-200
LLIST	Trükib välja programmi teksti täielikult või osaliselt	LLIST -200
LOAD	Laadib kettalt programmi	LOAD "BIOR"
MERGE	Lisab kettal oleva programmi mälus olevale programmile	MERGE "ATS"
NAME	Muudab kettal oleva faili nime	NAME "ATS.BAS" AS "MATS.BAS"
NEW	Kustutab mälus olevad programmid ja muutujad	NEW
RENUM	Nummerdab programmiread uuesti	RENUM 150,50,5
SAVE	Salvestab programmi kettale	SAVE "BIORYTM",A
SYSTEM	Väljub Basicust	SYSTEM
TRON	Lülitab sisse jälgimisrežiimi	TRON
TROFF	Lülitab välja jälgimisrežiimi	TROFF

PROGRAMMI JUHTIMINE

END	Lõpetab programmi töö	END
FOR...NEXT	Kordab käske FOR ja NEXT vahel	FOR K=1 TO 10 STEP 5
GOSUB...RETURN	Pöördub RETURN-iga lõppeva alamprogrammi poole	GOSUB 2000
GOTO	Tingimusteta üleminek vastava numbriga reale	GOTO 155
IF...THEN ELSE	Kui tingimus on täidetud, siis täidetakse avaldis 1, vastasel juhul avaldis 2	IF tingimus THEN avaldis1 ELSE avaldis2
ON...GOSUB	Avaldise väärtuse järgi suundub vastavatesse alamprogrammidesse	ON X+5 GOSUB 100,200, 300,400
ON...GOTO	Avaldise väärtuse järgi annab juhtimise vastavale reale	ON A GOTO 160,180,200
STOP	Peatab programmi täitmise	STOP
WHILE...WEND	Täidab lauseid WHILE ja WEND vahel, kuni tingimus püsib tõene	WHILE tingimus lause(d) WEND

MATEMAATILISED FUNKTSIOONID

ABS	Leiab arvu X absoluutväärtuse	C=ABS(X)
ATN	Leiab arvu X arkustangensi	E=ATN(X)
COS	Leiab arvu X koosinuse	F=COS(X)
DEF FN	Defineerib funktsiooni	DEF FN nimi(X)=avaldis
EXP	Leiab irratsionaalarvu e (e ≈ 2,71) X-nda astme	G=EXP(X)
FIX	Leiab arvu X täisosa	H=FIX(X)
INT	Leiab suurima täisarvu, mis pole suurem kui X	B=INT(X)
LOG	Leiab arvu X naturaallogaritmi	K=LOG(X)
RANDOMIZE	Paneb juhuarvude generaatori juhuslikku seisu	RANDOMIZE 21
RND	Annab juhuarvu vahemikus 0 . . . 1	Z=RND(X)
SGN	Leiab arvu X märgi	Y=SGN(X)
SIN	Leiab arvu X siinuse	E=SIN(X)
SQR	Leiab arvu X ruutjuure	F=SQR(X)
TAN	Leiab arvu X tangensi	B=TAN(X)

TÖÖ TEKSTANDMETEGA

ASC	Annab tekstilõigu X$ esimese märgi ASCII koodi	B=ASC(X$)
CHR$	Annab sümboli, mille ASCII kood on X	B$=CHR$(X)
DATE$	Annab kuupäeva kujul KK-PP-AAAA	B$=DATE$
INSTR	Otsib, mitmendal kohal on tekstilõigu B$ algus tekstilõigus A$ alates kohast k	S=INSTR(k,A$,B$)
LEFT$	Leiab n vasakpoolset märki tekstilõigust X$	B$=LEFT$(X$,n)
LEN	Leiab tekstilõigu X$ pikkuse	B=LEN(X$)
MID$	Leiab tekstilõigust X$ osa, mis algab m-ndast sümbolist ja on n sümboli pikkune	B$=MID$(X$,m,n)
RIGHT$	Leiab n parempoolset märki tekstilõigust X$	B$=RIGHT$(X$,n)
SPACE$	Tekstilõik, mis koosneb n tühikust	B$=SPACE$(n)
STRING$	Tekstilõik, mis koosneb n märgist ASCII koodiga m	B$=STRING$(n,m)
TIME$	Kellaaeg kujul TT:MM:SS	B$=TIME$

ANDMETE TEISENDAMINE ÜHEST TÜÜBIST TEISE. MASSSIIVID, MUUTUJAD, KONSTANDID

CDBL	Teisendab arvu A topelttäpsusega reaalarvuks B#	B#=CDBL(A)
CINT	Teisendab arvu A täisarvuks B%	B%=CINT(A)
CSGN	Teisendab arvu A reaalarvuks	B=CSGN(A)
CLEAR	Nullib muutujate väärtused, suleb failid	CLEAR
DEFINT	Defineerib muutujad täisarvudena	DEFINT A-E
DEFSGN	Defineerib muutujad tavalise täpsusega arvudena	DEFSGN K,L

DEFDBL	Defineerib muutujad topelttäpsusega arvudena	DEFDBL G-K,T
DEFSTR	Defineerib muutujad tekstimuutujatena	DEFSTR U,V,W
DATA	Kirjeldab lausega READ loetavaid andmeid	DATA JUUNI,30
DIM	Eraldab mälus ruumi antud mõõtmetega massiivile	DIM A(50),B$(N)
ERASE	Vabastab mälu massiivide alt	ERASE A,B
HEX$	Tekstilõik B$, mis sisaldab arvu A kuueteistkümnendväärtust	B$=HEX$(A)
LET	Omistab muutujale D avaldise väärtuse	LET D=(A+B)/2
OCT$	Tekstilõik B$, mis sisaldab arvu A kaheksandväärtust	B$=OCT$(A)
OPTION BASE	Määrab massiivi indeksi alumiseks rajaks 0 või 1	OPTION BASE 0
READ	Loeb väärtusi DATA-lausetest ja omistab neid muutujatele	READ A$,X1,C
RESTORE	Kasutatakse DATA-lause esimese elemendi näitamiseks	RESTORE
STR$	Arvu A esitus tekstina	B$=STR$(A)
SWAP	Vahetab muutujate väärtused	SWAP A,B
VAL	Numbritest koosneva tekstilõigu arväärtus	B=VAL(A$)

ANDMETE SISESTUS JA VÄLJASTUS. KUVA JUHTIMNE

CLS	Tühjendab ekraani	CLS
COLOR	Määrab värvuse	COLOR esiplaan,foon,raam
CSRLIN	Teatab kursori rea numbri	A=CRSLIN
LOCATE	Paigutab kursori	LOCATE rida,veerg
INKEY$	Loeb klaviatuuri puhvrist märgi	A$=INKEY$
INPUT	Loeb klaviatuurilt sisestatud andmed	INPUT "Raadius";R
INPUT$	Loeb klaviatuurilt n märki	A$=INPUT$(n)
KEY	Määrab või näitab funktsiooniklahvide otstarbe	KEY n,a$ KEY LIST KEY ON KEY OFF
KEY(n)	Funktsiooniklahvi sisse- ja väljalülitamine	KEY(n) ON KEY(n) OFF KEY(n) STOP
LINE INPUT	Sisestab kogu rea tekstimuutujasse A$	LINE INPUT "teade";A$
ON KEY	Kontrollib mingile (suuna- või funktsiooniklahvile) vajutust	ON KEY(n) GOSUB reanr
POS	Teatab kursoriveeru numbri	A=POS(1)
PRINT	Väljastab ekraanile andmeid	PRINT "x=";A
LPRINT	Väljastab printerile andmeid	LPRINT "y=";B
PRINT USING	Väljastab ekraanile andmeid etteantud vorminguga	PRINT USING "#.#";A
LPRINT USING	Väljastab printerile andmeid etteantud vorminguga	LPRINT USING "#.##^^^^";A,B
SCREEN	Teatab märgi koodi (k=1) või värvuse (k=0)	A=SCREEN(rida,veerg,k)

SPC	Väljastab n tühikut	PRINT SPC(n)
TAB	Alustab väljastust veerust n	PRINT TAB(n)
WIDTH	Määrab ekraani laiuse	WIDTH n
WRITE	Väljastab andmed ekraanile komadega eraldatult. Tekstilõigud esitatakse jutumärkides	WRITE A$,B,C$

TÖÖ ANDMEFAILIDEGA

CLOSE	Suleb numbriga märgitud faili	CLOSE #2
CVD	Teisendab stringi A$ topelttäpsusega reaalarvuks B#	B#=CVD(A$)
CVI	Teisendab stringi A$ täisarvuks B%	B%=CVI(A$)
CVS	Teisendab stringi A$ reaalarvuks B	B=CVS(A$)
EOF	Saab tõeseks, kui saabub faili lõpp	EOF(failinr)
FIELD	Eraldab mälupiirkonna puhvrile, kus hoitakse muutujaid otsepöördumisega faili jaoks	FIELD 1,30 AS C$
GET	Loeb otsefailist kirje	GET # failinr,kirjenr
INPUT #	Loeb andmeid jadafailist ja omistab saadud väärtused muutujatele	INPUT # failinr, muutujate loetelu
LINE INPUT #	Loeb rea jadafailist ja omistab saadud väärtused tekstimuutujatele	LINE INPUT # failinr, muutujate loetelu
MKD$	Teisendab topelttäpsusega reaalarvu A# stringiks B$	B$=MKD$(A#)
MKI$	Teisendab täisarvu A% stringiks B$	B$=MKI$(A%)
MKS$	Teisendab reaalarvu A stringiks B$	B$=MKS$(A)
OPEN	Avab faili	OPEN viis, # failinr, faili nimi, kirje pikkus
PRINT #	Väljastab andmed jadafaili number n	PRINT #n,A,B$
PRINT # USING	Väljastab andmed etteantud vorminguga jadafaili number n	PRINT #n,USING "###.##";A,B,C,D
PUT	Salvestab otsefaili kirje	PUT # failinr,kirjenr
WRITE #	Kirjutab andmed jadafaili ja eraldab komadega	WRITE #n,A,B,C$

GRAAFIKA JA HELI

BEEP	Annab helisignaali	BEEP
CIRCLE	Joonestab ringi, ellipsi või sektori	CIRCLE(x,y),r
COLOR	Määrab värvused	COLOR foon,kujund
DRAW	Joonestab parameetriga määratud kujundi	DRAW A$
GET	Salvestab spraidi massiivi	GET(x1,y1)-(x2,y2),A
LINE	Joonestab lõigu	LINE(x1,y1)-(x2,y2)
PAINT	Värvib kujundi	PAINT(x,y),v
PLAY	Esitab muusikat	PLAY A$
POINT	Teatab punkti (x,y) värvuse	POINT(x,y)
PSET	Värvib punkti (x,y)	PSET(x,y),värv
PRESET	Värvib punkti (x,y) foonina	PRESET(x,y)
PUT	Taastab massiivis asuva spraidi	PUT(x1,y1),A
SCREEN	Määrab ekraani tüübi ja värvi	SCREEN mood,värv
SOUND	Esitab teatud sageduse ja vältusega heli	SOUND sagedus,vältus

VEATÖÖTLUS

ERR	Teatab vea koodi	ERR
ERL	Teatab vearea numbri	ERL
ERROR	Imiteerib vea nr N tekkimist	ERROR N
ON ERROR	Vea korral annab juhtimise reale number N	ON ERROR GOTO N
RESUME	Lähtestab veaoleku ja määrab tegevuse pärast viga:	
	0 juhtimine samale reale	RESUME 0
	NEXT juhtimine järgmisele lausele	RESUME NEXT
	reanr juhtimine selle numbriga reale	RESUME reanr

MASINKOODI KASUTAMINE

BLOAD	Laadib masinkoodis programmi aadressile n	BLOAD failikirjeldus,n
BSAVE	Salvestab faili mäluosa alates aadressist n pikkusega m	BSAVE failikirjeldus,n,m
CALL	Täidab masinkoodis programmi	CALL aadress(argumentide loetelu)
DEF SEG	Defineerib mälusegmendi algusaadressi	DEF SEG=N
DEF USR	Määrab n-nda masinkoodis programmi algusaadressi m	DEF USRn=m
INP	Loeb baidi poordist N (N∈]0; 255[ )	A=INP(N)
OUT	Kirjutab baidi A poordi N	OUT N,A
PEEK	Loeb mälust aadressil n oleva baidi	A=PEEK(n)
POKE	Kirjutab mällu aadressile n baidi m	POKE n,m
USR	Täidab n-nda masinkood-alamprogrammi argumendiga x	USRn=x
VARPTR	Leiab muutuja mäluaadressi	I=VARPTR(muutuja)
WAIT	Katkestab programmi töö, et kontrollida sisendpoordi seisundit	WAIT 4,2

X peatükk. LÜHILEKSIKON

absoluutne viga — suuruse ja selle lähisväärtuse vahe absoluutväärtus.

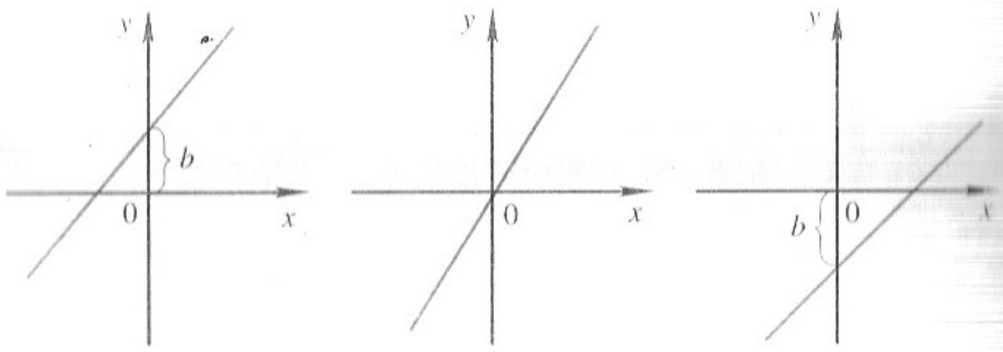
absoluutväärtus — reaalarvuga x määratud mittenegatiivne reaalarv

$$|x| = \begin{cases} x, \text{ kui } x \geq 0, \\ -x, \text{ kui } x < 0. \end{cases}$$

abstsisstelg — x-telg.

algarv — arv, mis jagub vaid ühe ja iseendaga.

algordinaat — antud sirge ja ordinaattelje lõikepunkti ordinaat



sirge $y = ax + b$, $b > 0$ sirge $y = ax$, $b = 0$ sirge $y = ax + b$, $b < 0$.

algtegur — täisarvu algarvuline tegur.

algteguriteks lahutamine — naturaalarvu esitamine algarvuliste tegurite korrutisena. Näiteks, $48 = 2^4 \cdot 3$.

araabia numbrid — kümnendnumbrite 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 graafiliste kujutiste traditsiooniline nimetus.

aritmeetiline keskmine — suuruste summa jagatis nende suuruste arvuga. Näiteks arvude 6 ja 8 aritmeetiline keskmine on 7. Arvude 6, 8 ja 13 aritmeetiline keskmine on 9.

arvtelg, arvsirge — reaalarvude kujutamiseks kasutatav sirge, millel on fikseeritud arvude 0 ja 1 kujutised ning sellega määratud ka teiste reaalarvude kujutised. Alguspunkti ehk nullpunkti, pikkusühiku ning positiivse suunaga varustatud sirge.

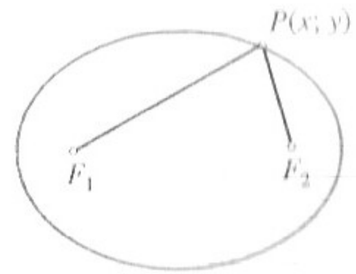
arvusüsteem (numeratsioonisüsteem) — võtete kogu, mis võimaldab arve ühesel viisil tähistada ja nimetada.

astendamine — 1) võrdsete tegurite korrutise $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ korda}}$ leidmine, kus a^n on aste, a astme alus ehk astendatav ja n astendaja ehk astmenäitaja; 2) negatiivse astendaja korral $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ ja 3) murrulise astendaja korral $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$.

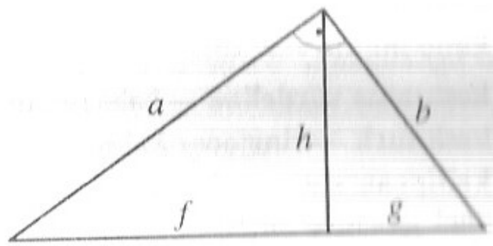
biruutvõrrand — neljanda astme võrrand kujul $ax^4 + bx^2 + c = 0$. Lahendamiseks sobib asendusvõte, näiteks $x^2 = t$, pärast seda lahendame ruutvõrrandi $at^2 + bt + c = 0$.

diagonaal — hulknurga kaht mitte ühele küljele kuuluvat tippu ühendav lõik või sirge. Hulktahuka kaht mitte ühele tahule kuuluvat tippu ühendav lõik või sirge.

ellips — punktihulk tasandil, kus iga punkti kaugused kahest kindlast punktist annavad jäävad suurusega summa.



Eukleidese teoreem — täisnurkse kolmnurga kaateti ruut võrdub selle kaateti projektsiooni ja hüpotenuusi korrutisega. $a^2 = fc$ $b^2 = gc$.



Euleri sirge — sirge, millel paiknevad kolmnurga mediaanide lõikepunkt, külgede keskristsirgete lõikepunkt ja kolmnurga kõrguste (või nende pikenduste) lõikepunkt.

faktoriaal — n esimese naturaalarvu korrutis, $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n$.

geomeetriline keskmine — n-s juur n suuruse korrutisest. Näiteks arvude 10 ja 20 geomeetriline keskmine on $\sqrt{10 \cdot 20} = \sqrt{200} = 10\sqrt{2}$, arvude 8, 27 ja 64 geomeetriline keskmine on $\sqrt[3]{8 \cdot 27 \cdot 64} = 24$.

harmooniline keskmine — suuruste pöördväärtuste aritmeetilise keskmise pöördväärtus $h = \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n}}$. Arvude 5 ja 10 harmooniline keskmine on $6\frac{2}{3}$.

Heroni valem — valem kolmnurga pindala arvutamiseks kolme külje järgi, $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, kus $p = \frac{a+b+c}{2}$.

hüperbool — punktihulk tasandil, kus iga punkti kaugused kahest fikseeritud punktist annavad jääva suurusega vahe.

intervall — vahemiku, poollõigu ja lõigu üldnimetus.

irratsionaalarv — reaalarv, mis pole ratsionaalarv. Irratsionaalarvud on näiteks $\sqrt{2}$; $\sqrt[3]{3}$; π; sin 10° jne.

juur (n-astme juur, n-s juur) — arv, mille n-s aste on antud arv a. Tähistatakse sümboliga $\sqrt[n]{a}$, kus a on juuritav ja n juurija.

juuremärk (juurimismärk, radikaal) — juurimisoperatsiooni tähis $\sqrt[n]{\ }$.

juurimine — astendamise pöördoperatsioon: astendatava leidmine antud astme ja astendaja järgi.

kaalutud keskmine (kaalutud aritmeetiline keskmine) — $x = \frac{a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n}{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}$.

kaheksandarv — kaheksandsüsteemis kirjutatud arv. Näiteks, 1981 kirjutatakse kaheksandarvuna 3675.

kaheksandsüsteem — positsiooniline arvusüsteem, mille alus on arv 8.

kahendarv — kahendsüsteemis kirjutatud arv. Näiteks, 1981 kahendarvuna on 11110111101.

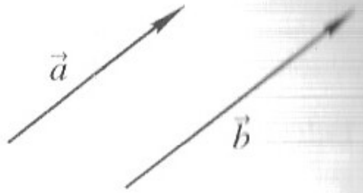
kahendsüsteem — positsiooniline arvusüsteem, mille alus on arv 2.

kanooniline võrrand — võrrandi teatavas mõttes lihtsaim kuju.

keskmine võrdeline — kahe positiivse arvu a ja b geomeetriline keskmine $\sqrt{a \cdot b}$.

kesknurk — ringjoone kahe raadiuse vaheline nurk.

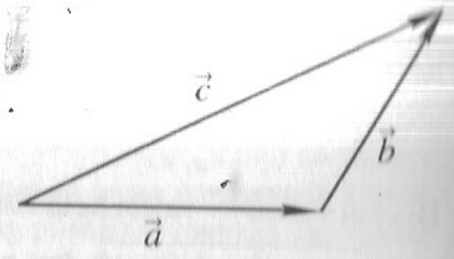
kollineaarsus — 1) punktide omadus paikneda ühel ja samal sirgel. 2) Kahe vektori omadus olla ühe ja sama sihiga, s.t. erineda vaid skalaarse teguri poolest, tähis $\vec{a} \parallel \vec{b}$.



kolmnurga elemendid — põhilised kolmnurka iseloomustavad suurused: küljed, nurgad, pindala, sageli ka siseringjoone ja ümberringjoone raadiused.

kolmnurga lahendamine — kolmnurga kõigi elementide leidmine mõningate etteantud elementide kaudu.

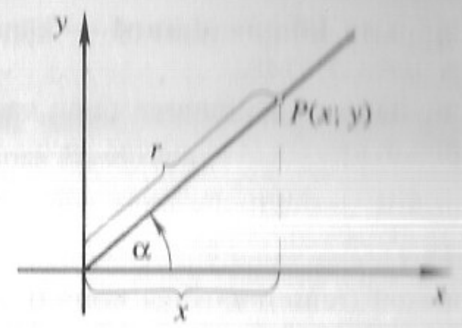
kolmnurgareegel — vektorite summa $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ leidmise graafiline reegel.



konstant — suurus, mille väärtus vaadeldavas protsessis (mõttekäigus) ei muutu.

koonuselõige — joon (ringjoon, ellips, parabool või hüperbool), mis saadakse pöördkoonuse lõikamisel selle tippu mitteläbiva tasandiga.

koordinaadid — arvud, mis määravad punkti asukoha tasandil (ruumis).



koosinus — täisnurkses kolmnurgas lähiskaateti ja hüpotenuusi suhe. Mistahes nurga korral nurga lõpphaara punkti x-koordinaadi ja raadiuse suhe.

koosinusteoreem — kolmnurga ühe külje ruut võrdub teiste külgede ruutude summaga, millest on lahutatud teiste külgede ja nendevahelise nurga koosinuse kahekordne korrutis. $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$.

kootangens — trigonomeetriline funktsioon, mille väärtus on sama nurga koosinuse ja siinuse jagatis $\cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$.

kordarv — naturaalarv, mis on esitatav ühest erinevate naturaalarvude korrutisena.

korrapärane hulknurk — kumer hulknurk, mille kõik küljed ja sisenurgad on võrdsed.

korrapärane kolmnurk — võrdkülgne kolmnurk.

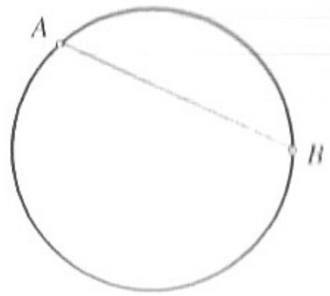
kraad — ringjoone kaare või vastava kesknurga mõõtühik, $\frac{1}{360}$ täispöördest, tähis °.

kujund — punktihulk tasandil või ruumis.

kuueteistkümnendsüsteem — positsiooniline arvusüsteem, mille alus on arv 16; kuueteistkümnendsüsteemi numbreid tähistatakse tavaliselt sümbolitega 0, 1, 2, . . . , 9, A, B, C, D, E, F.

kuupjuur — kolmanda astme juur — arv $\sqrt[3]{a}$, mille kuup on a.

kõõl — joone (näiteks ringjoone) kaht punkti ühendav lõik, ringjoone kõõl joonisel.



kõõlhulknurk — hulknurk, mille kõik tipud paiknevad ühel ringjoonel või üldse kinnisel kõveral.

kümnendarv — kümnendsüsteemis kirjutatud arv.

kümnendkoht — kümnendsüsteemi numbrikoht.

kümnendmurd — kümnendsüsteemis kirjutatud murdarv.

kümnendsüsteem — positsiooniline arvusüsteem, mille alus on arv 10.

liitmisvalemid — valemid nurkade summa või vahe trigonomeetriliste funktsioonide väärtuste leidmiseks. Näiteks, $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$.

lõik — 1) sirge kahe punkti A ja B vaheline osa; 2) reaalarvude piirkond, mille korral $a \leq x \leq b$.

lõpmatu kümnendmurd — kümnendmurd, mille ükski number pole viimane. Näiteks, 3,37483 . . .

mediaan — kolmnurga tippu vastaskülje keskpunktiga ühendav lõik (ka selle pikkus).

minut — ringjoone kaare või vastava kesknurga mõõtühik, võrdub $\frac{1}{60}$ kraadiga, tähis $'$.

mudel (matemaatiline mudel) — teatavat nähtust kirjeldavate matemaatiliste seoste kogum.

murdvõrrand — võrrand, mis sisaldab tundmatut murru nimetajas.

naturaalarv — loendamise teel saadud arvud 1, 2, 3, . . .

negatiivne nurk — nurk, mis tekib liikumisel kellaosuti liikumise suunas.

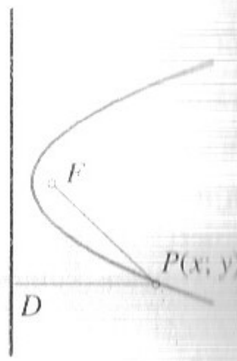
nurkkiirus — pöörleva keha pöördenurga muutus ajaühikus.

nullvektor — vektor, mille pikkus on 0, tähis $\vec{0}$.

optimaalne plaan — planeerimisülesande lahend. Plaan, mis annab planeerimisülesande sihifunktsioonile minimaalse (maksimaalse) väärtuse.

ordinaattelg — y-telg.

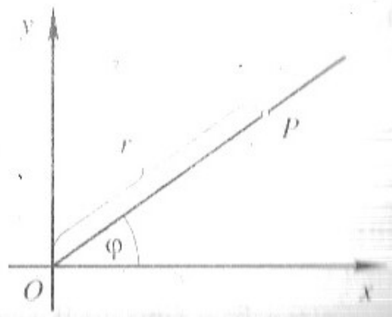
parabool — punktihulk tasandil, mille iga punkti kaugused mingist kindlast punktist ja kindlast sirgest on võrdsed.



paralleelsus — sirgete omadus olla ühe ja sama sihiga.

perioodiline kümnendmurd — kümnendmurd, mille murdosa mingist kindlast kohast alates teatav arv numbreid lõpmatult kordub. Kui periood algab pärast koma, siis on puhtperioodiline kümnendmurd. Näiteks 5,(3) = 5,33333 . . . Vastasel juhul on kümnendmurd segaperioodiline. Näiteks 4,4(3) = 4,4333 . . .

polaarkoordinaadid — tasandi punkti P koordinaadid $(r; \varphi)$, mis määratakse pooluse O ja sellest lähtuva pooltelje abil.



poolnurga valemid — valemid, mis võimaldavad antud nurga trigonomeetriliste funktsioonide järgi leida kaks korda väiksema nurga trigonomeetriliste funktsioonide väärtusi

$\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$, $\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$ jt.

positsiooniline arvusüsteem — arvusüsteem, milles numbri väärtus sõltub tema asukohast arvu tähises. Koma eraldab täisosa murdosast.

Pythagorase arvud — naturaalarvude kolmik $(a; b; c)$, mis rahuldab võrrandit $a^2 + b^2 = c^2$. Üldvalem $a = 2m$, $b = m^2 - n^2$, $c = m^2 + n^2$, kus m ja n on naturaalarvud ning $m > n$.

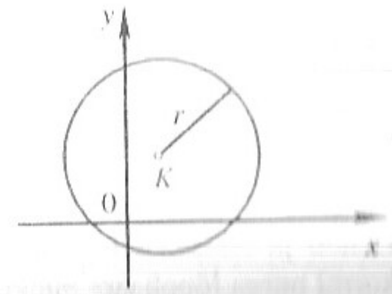
radiaan — nurkade mõõtmise ühikuna kasutatav nurk. Kesknurk, mis toetub raadiuse pikkusele kaarele. Kraadimõõdus ligikaudu 57°17′45″.

ratsionaalarv — arv, mida saab esitada kujul $\frac{a}{b}$, kus a ja b on täisarvud ning $b \neq 0$. Ratsionaalarvude hulga tähis on $\mathbb{Q}$.

reaalarv — lõpmatu kümnendmurruna esitatav arv (ei lõpe numbriga 9 perioodis). Reaalarvude hulka tähistatakse tähega $\mathbb{R}$.

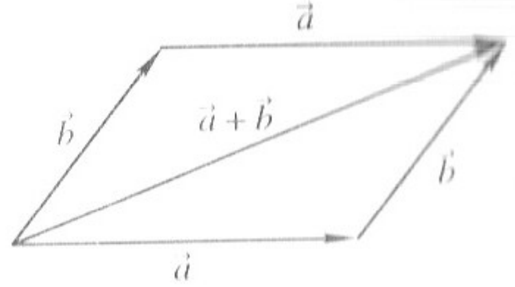
relatiivne (suhteline) viga — mõõdetava suuruse absoluutse vea ja suuruse enda absoluutväärtuse jagatis.

ringjoon — tasandiline joon, mille moodustavad fikseeritud punktist C (ringjoone keskpunkt) ühel ja samal kaugusel R olevad punktid. Arv R on ringjoone raadius. Ringjoone võrrand ristkoordinaadistikus on $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$, kus a ja b on keskpunkti koordinaadid.



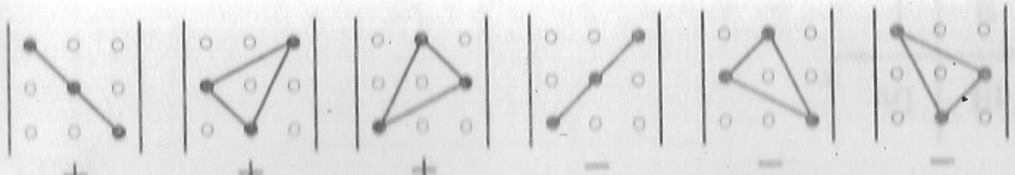
rooma numbrid — liitmis-lahutamisprintsiibil põhinev arvusüsteem. Näiteks, 1 — I, 4 — IV, 23 — XXIII, 80 — LXXX, 903 — CMIII.

rööpkülikureegel — vektorite summa $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ leidmise graafiline reegel.

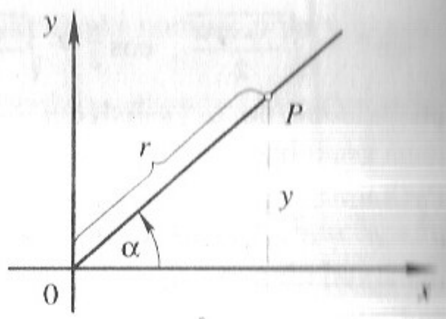


samasus — võrdus, mis kehtib temas esinevate muutujate mistahes väärtuste korral.

Sarruse reegel — kolmerealise determinandi arvutamise eeskirja graafiline esitus.



siinus — täisnurkses kolmnurgas vastaskaateti ja hüpotenuusi suhe. Mistahes nurga korral nurga lõpphaara punkti y-koordinaadi ja raadiuse suhe.



siinusteoreem — kolmnurga küljed on võrdelised vastasnurkade siinustega.

$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}=2R.$$

skalaar (skalaarne suurus) — objekt, mis on iseloomustatud täielikult üheainsa arvuga.

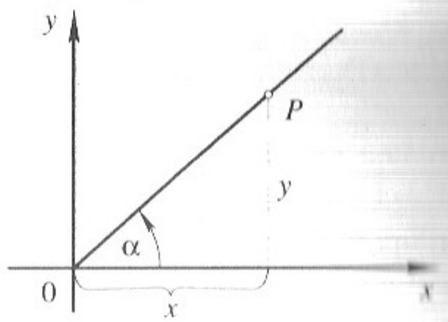
skalaarkorrutis — vektorite $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ skalaarkorrutis $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi$. Koordinaatkujul, kui $\vec{a}=(x_1; y_1)$ ja $\vec{b}=(x_2; y_2)$, siis $\vec{a}\cdot\vec{b}=x_1x_2+y_1y_2$.

suurim ühistegur — mitme täisarvu ühistegur, mis jagub nende arvude iga teise teguriga. Näiteks, arvude 24 ja 36 suurim ühistegur on 12. Arvud 23 ja 44 on ühistegurita.

taandamisvalemid — valemid, mis võimaldavad mistahes nurga trigonomeetriliste funktsioonide väärtuste leidmise taandada teravnurga trigonomeetriliste funktsioonide väärtuste arvutamisele. Näiteks, $\sin(180°+\alpha)=-\cos\alpha$, $\tan(360°-\alpha)=-\tan\alpha$ jne.

taandatud ruutvõrrand — ruutvõrrand kujul $x^2+px+q=0$.

tangens — täisnurkses kolmnurgas vastaskaateti ja lähiskaateti suhe; mistahes nurga korral nurga lõpphaara punkti y-koordinaadi ja x-koordinaadi suhe.



täisruut, ruutarv — naturaalarv, mis võrdub mõne teise täisarvu ruuduga.

vahemik — reaalarvude hulk, mille korral $a<x<b$.

vastandarv — arv, mille summa antud arvuga on null.

vastandvektor — antud vektorist $\vec{a}$ moodustatud vektor $-\vec{a}$.

veerand — 1) üks neljandik ühikust; 2) tasandi kvadrant — tasandi kahe niisuguse pooltasandi ühisosa, mille ääred ristuvad. Kui ääred on ristkoordinaadistiku teljed, siis nummerdatakse veerandeid joonisel näidatud viisil:

vektor — suurus $\vec{x}$, millel on suund, siht, pikkus ning mis on nende andmetega täielikult määratud. Geomeetriliselt esitatav suunatud lõiguna.

viga — mõõtmis-, vaatlus- või arvutustulemuste erinevus vastava suuruse tõelisest väärtusest.

võrrand — võrdus, mis sisaldab tundmatuid ja kehtib vaid tundmatute mõningate väärtuste korral. Neid väärtusi võib ka mitte leiduda.

võrrandi lahendamine — võrrandi kõigi lahendite leidmine või lahendite puudumise tõestamine.

võrratus — avaldis, mille poolte vahel on üks märkidest $<$, $>$, $\leqslant$, $\geqslant$.

võõrlahend — võrrandi lahendamisel saadud tulemus, mis ei rahulda lähtevõrrandit.

ühikvektor — vektor, mille pikkus on 1.

x-telg — abstsisstelg.

xy-tasand — koordinaattasand.

y-telg — ordinaattelg.

PEA MEELES

ARVUHULGAD

1. Naturaalarvude hulk $\mathbb{N} = \{1; 2; 3; \ldots\}$.
2. Positiivsete täisarvude hulk $\mathbb{Z}^+ = \mathbb{N}$.
3. Negatiivsete täisarvude hulk $\mathbb{Z}^- = \{-1; -2; -3; \ldots\}$.
4. Täisarvude hulk $\mathbb{Z} = \mathbb{Z}^+ \cup \mathbb{Z}^- \cup \{0\}$.
5. Ratsionaalarvude hulk $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \middle| a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \right\}$.
6. Irratsionaalarvude hulga $\mathbb{I}$ moodustavad lõpmatud mitteperioodilised kümnendmurrud
7. Reaalarvude hulk $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$.

KORRUTAMISE ABIVALEMID

8. $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$.
9. $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$.
10. $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$.
11. $a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$.

ASTMED JA JUURED

12. Korrutise aste $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$.
13. Jagatise aste $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$.
14. Võrdsete alustega astmete korrutis $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$.
15. Võrdsete alustega astmete jagatis $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$.
16. Astme aste $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$.
17. Korrutise juur $\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$.
18. Jagatise juur $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$.
19. Juure aste $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$.

20. Juure juur $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}$.
21. Astendaja 0 $a^0 = 1$, kui $a \neq 0$.
22. Negatiivne astendaja $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$.
23. Murruline astendaja $a^{m:n} = \sqrt[n]{a^m}$.

RUUTVÕRRAND

24. Taandatud ruutvõrrand $x^2 + px + q = 0$.
25. Võrrandi $x^2 + px + q = 0$ lahend on valem $x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$.
26. Taandamata ruutvõrrand $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 1$.
27. Võrrandi $ax^2 + bx + c = 0$ lahend on valem $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.
28. Viète'i valemid $x_1 + x_2 = -p$ ja $x_1 \cdot x_2 = q$, kus x_1 ja x_2 on taandatud ruutvõrrandi lahendid.
29. Ruutkolmliikme $ax^2 + bx + c$ lahutamine teguriteks:
$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$, kus x_1 ja x_2 on ruutvõrrandi lahendid.

DETERMINANDID

30. Kaherealine determinant $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = a \cdot d - c \cdot b$.
31. Kolmerealine determinant $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = aei + cdh + bfg - gec - ahf - dbi$.

TRIGONOMEETRIA

32. Põhiseosed $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \tan\alpha$, $1 + \tan^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$

$\tan\alpha \cdot \cot\alpha = 1$, $1 + \cot^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}$.

33. Mõnede nurkade trigonomeetriliste funktsioonide väärtused.

	0°	30°	45°	60°	90°
$\sin\alpha$	0	0,5	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0,5	0
$\tan\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	puudub
$\cot\alpha$	puudub	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

34. Täiendusnurga trigonomeetrilised funktsioonid

$\sin(90°-\alpha)=\cos\alpha$, $\cos(90°-\alpha)=\sin\alpha$, $\tan(90°-\alpha)=\cot\alpha$.

35. Negatiivse nurga trigonomeetrilised funktsioonid

$\sin(-\alpha)=-\sin\alpha$, $\cos(-\alpha)=\cos\alpha$, $\tan(-\alpha)=-\tan\alpha$.

36. Tähtsamad taandamisvalemid

$\sin(180°-\alpha)=\sin\alpha$	$\sin(180°+\alpha)=-\sin\alpha$	$\sin(360°-\alpha)=-\sin\alpha$
$\cos(180°-\alpha)=-\cos\alpha$	$\cos(180°+\alpha)=-\cos\alpha$	$\cos(360°-\alpha)=\cos\alpha$
$\tan(180°-\alpha)=-\tan\alpha$	$\tan(180°+\alpha)=\tan\alpha$	$\tan(360°-\alpha)=-\tan\alpha$

37. Ühest täispöördest absoluutväärtuse poolest suuremate nurkade taandamisvalemid

$\sin(360°\cdot n+\alpha)=\sin\alpha$, $\cos(360°\cdot n+\alpha)=\cos\alpha$, $\tan(360°\cdot n+\alpha)=\tan\alpha$,

kus n on täisarv.

38. Nurkade summa ja vahe trigonomeetrilised funktsioonid

$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta\pm\cos\alpha\cdot\sin\beta$,

$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta\mp\sin\alpha\cdot\sin\beta$,

$$\tan(\alpha\pm\beta)=\frac{\tan\alpha\pm\tan\beta}{1\mp\tan\alpha\cdot\tan\beta}.$$

39. Kahekordse nurga trigonomeetrilised funktsioonid

$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cdot\cos\alpha$ $\quad\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$ $\quad\tan 2\alpha=\dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$

40. Poolnurga trigonomeetrilised funktsioonid

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}},\qquad \cos\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}},$$

$$\tan\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}},\qquad \tan\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

VEKTORID TASANDIL

On antud punktid $A(x_1; y_1)$ ja $B(x_2; y_2)$.

41. Vektori $\vec{AB}$ koordinaadid on $\vec{AB}=(x_2-x_1; y_2-y_1)$.

On antud vektorid $\vec{u}=(a; b)$ ja $\vec{v}=(c; d)$.

42. Summa ja vahe $\vec{u}\pm\vec{v}=(a\pm c; b\pm d)$.

43. Korrutis arvuga r $\quad r\cdot\vec{u}=(ra; rb)$.

44. Vektorite skalaarkorrutis $\vec{u}\cdot\vec{v}=a\cdot c+b\cdot d$ ja $\cdot\vec{u}\cdot\vec{v}=|\vec{u}|\,|\vec{v}|\cdot\cos\varphi$.

45. Vektori pikkus $|\vec{u}|=\sqrt{u_1^2+u_2^2}$.

46. Kahe punkti $A(x_1; y_1)$ ja $B(x_2; y_2)$ vaheline kaugus

$AB=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$.

47. Nurk vektorite vahel

$$\cos\alpha=\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\,|\vec{v}|}.$$

KOLMNURK

48. Siinusteoreem $\dfrac{a}{\sin\alpha}=\dfrac{b}{\sin\beta}=\dfrac{c}{\sin\gamma}=2R$.

49. Koosinusteoreem $a^2=b^2+c^2-2bc\cos\alpha$

$b^2=a^2+c^2-2ac\cos\beta$

$c^2=a^2+b^2-2ab\cos\gamma$.

50. Kolmnurga pindala

$$S=\frac{1}{2}ah,\quad S=\frac{1}{2}ab\sin\gamma,\quad S=\frac{a^2\sin\beta\sin\gamma}{2\sin\alpha},\quad S=pr,$$

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},\quad S=\frac{abc}{4R},$$

kus r on kolmnurga siseringjoone raadius ja R ümberringjoone raadius.

SIRGE VÕRRANDID

51. Üldvõrrand $ax+by=c$ või $ax+by+c=0$.

52. x-teljega paralleelne sirge $y=a$.

53. y-teljega paralleelne sirge $x=b$.

54. Koordinaattelgede vahelise nurga poolitaja võrrand:
I ja III veerand $y=x$; II ja IV veerand $y=-x$.

55. Punktiga $A(x_1; y_1)$ ja vektoriga $\vec{v}=(s_x; s_y)$ määratud sirge

$$\frac{x-x_1}{s_x}=\frac{y-y_1}{s_y}.$$

56. Punktidega $A(x_1; y_1)$ ja $B(x_2; y_2)$ määratud sirge

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}.$$

57. Punktidega $A(a; 0)$ ja $B(0; b)$ ehk telglõikudes määratud sirge

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1.$$

58. Punktiga $A(x_1; y_1)$ ja tõusuga k määratud sirge

$y-y_1=k(x-x_1)$.

59. Tõusuga k ja algordinaadiga b määratud sirge $y=kx+b$.

60. Nurk sirgete $y=k_1x+b_1$ ja $y=k_2x+b_2$ vahel

$$\tan\varphi=\left|\frac{k_1-k_2}{1+k_1k_2}\right|.$$

MUUD

61. Lõigu AB keskpunkti koordinaadid, kui $A(x_1; y_1)$ ja $B(x_2; y_2)$ ja keskpunkt on $C(x_c; y_c)$, siis $C\left(\frac{x_1+x_2}{2}; \frac{y_1+y_2}{2}\right)$.

62. Lõigu AB otspunktid on A ja B ning punkt C jaotab lõigu suhtes $m:n$, $C\left(\frac{mx_2+nx_1}{m+n}; \frac{my_2+ny_1}{m+n}\right)$.

63. Ringjoone võrrand, kui keskpunkt on $K(a; b)$ ja raadius r $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$.

Kui $K(0; 0)$, siis ringjoone võrrand on $x^2+y^2=r^2$.

64. Seosed rist- ja polaarkoordinaatide vahel

$$\begin{cases} x = r\cdot\cos\varphi \\ y = r\cdot\sin\varphi \end{cases} \quad \text{ja} \quad \begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2} \\ \tan\varphi = \frac{y}{x}. \end{cases}$$

ÜLESANNETE VASTUSED

1. Vead on alaülesannetes b, f, g ja i. **2.** Esimene teisendus on õige. **3. a)** 1; **b)** iga arv; **c)** 0,5; **d)** iga arv; **e)** $\frac{21}{8}$; **f)** lahendeid pole. **4. a)** $x=1$; **b)** sama; **c)** sama; **d)** $x=-2$, $y=-4$; **e)** $x=0$, $y=0$; **f)** $x=1$, $y=1$. **5. a)** $\pm\sqrt{4}$; **b)** 0 ja 2; **c)** ± 2, **g)** $-2{,}5$ ja -2; **j)** -2 ja 0; **k)** 7; -7. **1)** $S=6$, $P=12$; **2)** $x=-40-2\pi$, $P=24+2\pi$. **4)** $S=6$, $P=12$; **5)** $S=64\pi$, $P=32\pi$; **6)** $S=29$, $P=26$. **8.** Kolmnurga ümbermõõt on vale. **11.** Üleliigne on variant a. **12. 1)** $S=214$, $V=210$; **3)** andmed on vastuolulised; **4)** $S=50\pi$, $V=1500\pi$. **14.** 68. **17.** 24, 60 ja 200. **20. a)** 19; **c)** 0,1; **d)** -15. **22. a)** $\frac{p-3}{p}$; **e)** $y-3$; **e)** $\frac{1}{x+y}$; **g)** $\frac{-9b^4c}{4}$. **23. a)** $\frac{20}{3}$; **c)** $\frac{a(b-a)}{a+b}$; **e)** $\frac{a+1}{ab}$. **26.** 20 ja 48. **29.** 12. **30.** 4; 8; 12. **31. 1)** $\alpha=60°$, $\beta=120°$; **3)** $\alpha=60°$, $\beta=30°$; **4)** $\alpha+\delta=65°$, $\beta=65°$, $\gamma=115°$; **8)** $\alpha=\beta=73°$; **9)** $\beta=80°$, α ja γ ei saa üheselt määrata. **37.** 80° ja 100°. **38.** 72° ja 108°. **40.** 10 cm. **41.** 24 cm. **43.** 1,5 cm. **45.** 12 cm ja 18 cm. **46. 3)** 54 ja 72; **4)** andmed on puudulikud. **47.** $\frac{ab}{a+b}$. **49. a)** $a=2$; **e)** iga arv; **g)** $x=1/16$. **50.** 30 ja 20. **51.** 5, 7 ja 9 või -5, -7 ja -9. **52.** 32. **54.** 5 cm. **55.** 5 tundi ja 7,5 tundi. **56.** 7. **57.** 75 km/h. **58.** Triinu. **60.** $p=1$ ja $q=-2$ või $p=q=0$. **61.** 12 ja 9. **66.** Ei. **68.** 32 ja 64; 18 ja 324; 2 ja 420. **70.** Ja. **74.** 6. **75.** Auto number on 8208. **76.** 2521. Näpunäide: kõigepealt leia arv, mis jagub arvudega ühest kuni kümneni. **80.** Kahekohaline arv $10x+y$, kus x on kümneliste number ja y üheliste number, kolmekohaline arv $100x+10y+z$. **82.** Üks võimalus valamiseks on selline 12-0-0, 4-8-2, 4-3-5, 9-3-0, 9-0-3, 1-8-3, 1-6-5. Mõtle, kas see on kõige lühem lahendus. **83.** 35 248. **85.** 128 g. **86.** Oletame, et murd on taanduv. Siis arvude $21n+4$ ja $14n+3$ suurim ühine tegur on d ($d\neq 1$). Sel juhul jagub ka $21n+4-14n-3=7n+1$ d-ga. Sama arvuga peab ka jagunema $2(7n+1)=14n+2$. Oletuse järgi $14n+3$ jagub d-ga, siis jagub ka vahe $14n+3-14n-2=1$. Seega, $d=1$, kuid eelduse järgi nii ei tohi olla. Järelikult on murd taandumatu. **88.** $(2n-1)^2-1=4n^2-4n=4(n-1)n$. Kahe järjestikuse täisarvu korrutis jagub 2-ga, seega korrutis jagub 8-ga. **89.** Olgu x sajaliste, kümneliste ja üheliste number, siis kolmekohaline arv esitub kujul $100x+10x+x=111x=3\cdot 37x$. **91.** 0,5. **92.** Kuna perioodi pikkust pole näidatud (seda võib vaid aimata), siis ühest vastust anda ei saa. **93. b)** $\frac{27}{133}$; **c)** 0,75. **95. a)** $\frac{1}{7}$; **b)** $\frac{3}{7}$; **c)** $\frac{1}{2}$; **d)** 1. **109.** $A<B$. **110.** Teine arv on suurem. **112. a)** väär; **b)** tõene; **c)** tõene; **d)** väär. **113. a)** $6|a|$, **b)** $13b^2$; **c)** $15a^3$; **d)** $|a-b|$, **e)** $|a-b|$, **f)** $|b+2|$. **114. a)** $6\sqrt{2}$; **b)** $11\sqrt{5}$; **e)** -14. **118.** Tõesed on a, e ja h. **121. a)** $a_1a_2a_3\ldots a_n\neq 0$, **b)** $a_1^2+a_2^2+a_3^2+\ldots+a_n^2\neq 0$. **122. a)** $a=b$, **b)** $a=0$ või $b=0$. **123.** Näpunäide: avalda esimesest võrdusest üks tundmatu ja asenda teise võrdusesse. **124.** 5050. Ilmselt $100^2-99^2=(100-99)(100+99)$ jne. Pärast koondamist tuleb leida summa $100+99+98+\ldots+2+1$. Esimese ja viimase liidetava summa on 101, teise ja eelviimase liidetava summa on 101 jne. Kokku on 50 liidetavat, kogusumma on $50\cdot 101=5050$. **125. a)** jah, **b)** ei, **d)** jah; **e)** ei; **f)** ei. **126.** Näpunäide: näita, et korrutis on $(x^2-7x+9)^2+1$. **127.** Korruta esimene ja neljas, teine ja kolmas tegur. Lopptulemuseks saad $(n^2+3n+1)^2$. **134. a)** $+3$; **b)** lahendeid ei ole; **c)** 0; **d)** $\pm\pi$; **f)** -2 ja 6; **g)** -3; **h)** -5 ja 1. **136.** a) $a\neq 0$; **b)** $a\neq 0$; **c)** $a=0$. **137.** Ei järeldu, näiteks $1-51=151$, kuid $-5\neq 5$. **142. a)** SÜT = 24, VÜK = 4032, **c)** SÜT = 25, VÜK = 6000. **143.** 4000. **144. a)** $\frac{7}{11}$; **b)** $\frac{9}{37}$; **c)** $\frac{257}{495}$; **d)** $1\frac{7}{999}$; **e)** $2\frac{17}{18}$. **153.** Väärad on a, d ja f. **156.** 25. **157.** 405 t. **159. a)** ± 10; **b)** lahendeid pole; **c)** 1 ja 5; **d)** ± 1; **e)** 1; **f)** lahendeid pole; **g)** 2. **161.** Esimene murd on suurem. **162.** 167, 334 ja 55778. Olgu x ja y kolmekohalised arvud ja z viiekohaline arv, siis kehtib võrdus $\frac{1000x+y}{z}=\frac{3xy}{z}$, millest $1000x+y=3xy$. Ilmselt x jagub y-ga, seega $y=kx$. $1000x+y$ jagub 3-ga, seega k on 2, 5 või 8. Kuna x ja y on kolmekohalised arvud, $x\neq 5$ ja $x\neq 8$. **163.** $S=r^2(12+\pi+6\sqrt{3})$ ja $P=2r(6+\pi)$. **164.** $h=26(3\sqrt{3}+2)$. **166.** 22, 24, 26, 28, 30, 32 või -32, -30, -28, -26; -24, -22. **167.** 1782 a. **168. c)** MCDXCII. **169. a)** 1917; **c)** 1343. **170.** 12 489 781. **175. a)** 5 vihti: 1, 2, 4, 8, 16 (kg); **b)** 4 vihti: 1, 3, 9, 27 (kg); **c)** 10 vihti: $2^0, 2^1, \ldots, 2^9$ (g) ja 7 vihti: $3^0, 3^1, \ldots, 3^6$ (g). **180.** 9 lahendit. Vt.

ka Ü. Kaasik „Lihtsaid ja keerulisi II", Tln, 1975. **184. a)** 11010; **c)** 110010; **e)** 101. **185. a)** 1001; **c)** 10010; **e)** 11001; **g)** 101010010. **186. a)** 1001; **c)** 1101; **e)** 1000. **187. a)** 11101011; **c)** 1111111; **e)** 111110100. **190.** Kui murru nimetaja on arvu 2 aste. **191.** FFFF = 65535.
194 Vaata tabeleid **196. b)** Näpunäide: uuri, mitu „ühte" on paaritus-, mitu paarisarvus.

+	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	10
2	2	10	11

×	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	11

198. 215 + 1415 + 1415 + + 8630 = 12 776. **203. a)** esimene; **b)** teine; **c)** teine; **d)** teine; **e)** teine; **f)** võrdsed. **204. d)** 3^8p^{14}; **e)** $\frac{1}{3}n^6x^6$; **f)** $(ac)^{2m+3}$. **207. a)** $-\frac{1}{6}$. **208.** $2^{128}-1$. Korruta avaldist teguriga (2–1) ja siis kasuta ruutude vahe valemit. **215. a)** $\frac{1}{(a+b)^2}$; **b)** $\frac{a+b}{a-b}$; **c)** $\frac{1}{x^8}$. **231. a)** $-3x^2yz$; **b)** $10a^{m+1}b^5$; **c)** $3a^2x^2b^2$; **d)** $-\frac{1}{3}a^2b^9$. **233.** 1. Kui $x=0$ või $x=1$, siis avaldisel puudub mõte. **242.** 44%. **243.** 25%. **244.** 50. **245.** $33\frac{1}{3}$%. **246. a)** $\frac{1}{6}$. Esita iga murd kahe murru vahena, näiteks $\frac{1}{20}=\frac{1}{4}-\frac{1}{5}$, $\frac{1}{30}=\frac{1}{5}-\frac{1}{6}$ jne.; **b)** 0,9. **247. a)** viiendsüsteem; **b)** neljandsüsteem; **c)** kaheksandsüsteem, **d)** kuuendsüsteem; **e)** seitsmendsüsteem; **f)** neljandsüsteem; **g)** üheteistkümnendsüsteem; **h)** suvaline arvusüsteem, mille alus on neljast suurem; **i)** kuuendsüsteem; **j)** viieteistkümnendsüsteem; **k)** neljateistkümnendsüsteem; **l)** seitsmendsüsteem. **250.** Esimene murd on suurem. **251.** Vaatleme arve kujul $3n$, $3n+1$ ja $3n+2$, kus n on mittenegatiivne täisarv. Tõstame nüüd arvud $3n$, $3n+1$ ja $3n+2$ ruutu. Saame, et $(3n)^2=9n^2$ — see arv jagub kolmega, $(3n+1)^2=9n^2+6n+1$, esimesed kaks liidetavat jaguvad 3-ga, jääk on 1. Ning $(3n+2)^2=9n^2+12n+4=3(3n^2+4n+1)+1$. **256.** Reaalarvuna avalduvad a, c, e ja f. **260. a)** $2-a$; **b)** $a-2$; **c)** $a-b$; **d)** $b-a$. **261.** 111111111. Arvesta asjaolu, et $11^2=121$, $111^2=12\,321$ jne. **262.** 12. **263.** 7. **264.** 3, 3, 4, 2, 3. **265.** 15, 21, 12, 34. **266.** ei, ja, ei, ja. **271. a)** 20; **b)** 54; **c)** 90; **d)** 560; **e)** 18; **f)** 80; **g)** 280; **h)** 120. **272. c)** $\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{26}$; **d)** $2\sqrt[3]{2}$; **g)** $2\sqrt[4]{2}$; **h)** $2\sqrt[3]{3}$; **k)** $5\sqrt[4]{2}$; **l)** $0{,}1\sqrt[3]{16}$; **o)** $4\sqrt[4]{2}$; **p)** 2. **273. c)** $\sqrt{18}$; **d)** $\sqrt[3]{16}$; **g)** $\sqrt[3]{40/9}$; **h)** $\sqrt{4a^3}$. **274. a)** teine; **b)** esimene; **c)** teine; **d)** esimene; **e)** esimene; **f)** teine. **275. a)** $|a+b|\sqrt{a+b}$; **b)** $2\sqrt{3}\,|m+n|$; **c)** $x^2|x+1|\sqrt{x}$; **d)** $3\sqrt{2}\,|m-1|$; **e)** $3(1-\sqrt{5})\cdot\sqrt[3]{3}$; **f)** $2(\sqrt{17}-4)\sqrt[4]{2}$; **g)** $(\sqrt{5}-2)\sqrt{3}$; **h)** a^2-b^2. **279. a)** $\frac{1}{|a|}$; **b)** $\frac{1}{b^2}$; **c)** $\frac{1}{x^2}$; **d)** $\frac{3}{z^3}$; **e)** $\frac{5|m|}{7m^2}$; **f)** $-\frac{5}{6}a$. **282. e)** $\sqrt[15]{-27}$, $\sqrt[15]{-32}$, $\sqrt[15]{10}$; **f)** $\sqrt[12]{a^8}$, $\sqrt[12]{a^{-6}}$, $\sqrt[12]{a^9}$; **g)** $\sqrt[36]{x^{30}}$, $\sqrt[36]{y^{-27}}$, $\sqrt[36]{z^{32}}$; **h)** $\sqrt[24]{a^4b^6}$, $\sqrt[24]{6^n a^{-3n}n^{2n}}$. **283. i)** $\sqrt{6a}$; **j)** $\sqrt{3b}$; **k)** $\sqrt[3]{z^2}$; **l)** $a\sqrt{2}$; **m)** $b\sqrt{2ab}$; **n)** $b\sqrt{3a}$; **o)** $\frac{x^2}{3}\sqrt{5}$; **p)** $\sqrt[4]{3m^3}$. **285. a)** teine; **b)** teine; **c)** esimene. **286.** Kõik vahed on negatiivsed. **288. a)** $\sqrt[4]{3}$; **c)** $\sqrt[12]{15}$; **e)** $\sqrt{c}\cdot\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[6]{b}$. **296.** Astenda võrduse mõlemaid pooli arvuga 2. **297.** Näita, et $20+14\sqrt{2}=(2+\sqrt{2})^3$ ja $20-14\sqrt{2}=(2-\sqrt{2})^3$. **300. a)** 9, $\frac{125}{216}$, 243, 36. **305. f)** $\frac{\sqrt{3}}{3}$; **g)** $\frac{3\sqrt{5}}{5}$; **h)** $\frac{4\sqrt{6}}{3}$; **i)** $5\sqrt{5}$; **j)** $14\sqrt{0{,}5}$. **306. a)** $2\sqrt[3]{4}$; **b)** $2\sqrt[3]{9}$; **c)** $\sqrt[3]{3}$; **d)** $\sqrt[3]{5}$; **e)** $\sqrt[3]{45}$. **307. f)** $\frac{\sqrt[3]{3}}{3}$; **g)** $\sqrt[3]{2m^2}$; **h)** $2\sqrt[3]{4x^2}$; **i)** $\frac{1}{y}\sqrt[3]{y^2}$; **j)** $3b\sqrt[3]{a}$. **308. b)** $\sqrt{m-n}$; **c)** $\frac{\sqrt{x^2-9}}{x-3}$; **e)** $\frac{\sqrt{m^2-n^2}}{m-n}$; **f)** $\frac{\sqrt{x^2-1}}{x+1}$; **i)** $\frac{\sqrt{3}}{3}$, kui $z>3$ ja $-\frac{\sqrt{3}}{3}$, kui $z<3$. **309. e)** $\frac{4(3-2\sqrt{2})}{3}$; **f)** $6+\sqrt{35}$; **g)** $\frac{4\sqrt{5}-21}{19}$; **h)** $\frac{35-12\sqrt{6}}{19}$; **i)** $\frac{\sqrt{21}}{7}$; **j)** $-(5+2\sqrt{6})$; **k)** $\frac{\sqrt{10}}{2}$; **l)** $\frac{2\sqrt{3}}{3}$. **310. a)** $\frac{(\sqrt[4]{5}+\sqrt[4]{2})(\sqrt{5}+\sqrt{2})}{3}$; **b)** $\frac{\sqrt[3]{215}+\sqrt[3]{105}+\sqrt[3]{49}}{8}$; **c)** $\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+\sqrt{5})}{2}$; **d)** $\frac{2+\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$; **e)** $\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}$; **f)** $\frac{(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{7}-\sqrt{5})}{2}$.

311. a) 28; **d)** $\frac{1-\sqrt{3}}{2}$. **312. a)** $2\frac{1}{3}$; **b)** 1; **d)** $125\sqrt{5}$. **314. a)** $-\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^2}$; **b)** $a-1$; **c)** $1-m$; **d)** $c-1$; **e)** $x-y$. **315. a)** $\frac{2m}{n^2}$; **b)** 4; **d)** 14; **f)** 12. **317.** Tõestamisel kasutas Taavi tõestatavat võrdust tõese võrdusena, seega pole tõestus korrektne. **318. a)** $3+2\sqrt{2}$; **c)** $3-2\sqrt{2}$; **f)** $\sqrt{7}-\sqrt{3}$. **319. b)** $\sqrt{m}-\sqrt{n}$. **321. a)** $4x^2y^{10}$; **b)** $\frac{3}{a^4b^2}$. **322. a)** 5239; **b)** 639,5. **328. a)** 37,5; **b)** 8. **332. a)** $\sqrt{3}-\sqrt{2}$; **c)** 0; **e)** $2y$. **334. a)** $0{,}5\sqrt{2}(\sqrt{5}-\sqrt{3})$; **c)** $\sqrt{2}$. **335. a)** 13; **b)** $a+b$; **c)** 0; **d)** $16\sqrt{15}$. **337.** Puuduga 280; 4430; 28370; 32000; 6980; 200; liiaga 290; 4440; 28380; 32010; 6990; 210. **344.** Tegelik absoluutne viga on 0,001428..., absoluutse vea ülemmäär on 0,005. **346. a)** 17 ± 1; **b)** $4{,}39\pm0{,}08$; **c)** 160 ± 8. **350. 1)** $15\leqslant m+n<18$; **2)** $15<a\cdot b<24$; **3)** $6<a-b<9$. **354. a)** 4%; **c)** 7%; **e)** 0,3%; **g)** 2%. **356.** Esimene. **360. a)** 2; **b)** 3; **c)** 4; **d)** 5; **e)** 2; **f)** 3; **g)** 2; **h)** 3. **363.** Esimesel juhul on kõik kolm numbrit õiged, teisel juhul on 5 kahtlane number. **364. a)** 2 õiget; **b)** 2 õiget; **c)** 2 õiget; **d)** 2 õiget; **e)** 3 õiget. **371. b)** 123,78; **d)** 47,4; **f)** 456,39; **h)** 128,404. **372. a)** 222,1; **c)** 62,2923; **f)** 341,04; **h)** 374,26; **j)** 0,10. **373. a)** 410,7; **d)** 3466,9. **375.** 6,828. **377.** $3\frac{1}{7}$. **378.** 9,83. **381. a)** 170; **b)** 340; **c)** 548; **d)** 0,14. **387. a)** 12,5; **b)** 4,34; **c)** 2,5; **d)** 0,051; **e)** 62. **389.** Absoluutne viga on 0,5 ja relatiivne viga on 0,2%. **399.** 11 kg. **400. a)** 34 ± 1; **c)** $100\pm1{,}4$. **401.** 3 tüvenumbriga, 4 tüvenumbriga. **403.** Leia $(a+\Delta a)^2$. Suuruse $(\Delta a)^2$ võib jätta arvestamata. **409. a)** $A=0$, $B=0$, $C=-1$; **c)** pole võimalik; **e)** pole võimalik. **410. a)** iga x korral; **b)** $\alpha\neq90°+k\pi$, kus $k\in\mathbb{Z}$; **c)** iga α korral. **411. a)** samaväärsed; **c)** samaväärsed; **e)** pole samaväärsed. **413. a)** $a=0$ või $b=0$; **c)** $a=0$ või $b=0$ ja $c\neq0$; **e)** võrdus ei kehti; **g)** $a=0$ ja $b\neq0$. **415.** 240 kg. **417. a)** 5; **c)** lahendeid pole; **e)** lahendeid pole. **418. a)** –3; **d)** 5; **e)** 3; **g)** –3,76. **419. a)** 2; **c)** 40,5; **e)** lahend puudub. **420. a)** iga arv, $x\neq0$; **c)** lahendid puuduvad. **423.** Vanaisa 60, poeg 35, pojapoeg 5. **424.** 7 lammast, 11 kana. **425.** 3 rüütlit, 7 lohemadu. **429.** a ja c ei ole samaväärsed, b ja d ei ole samaväärsed. **431.** 4. **432.** Leia ruutvõrrandi diskriminant. Eraldi uuri juhtumit, kui $2a=b$. **434.** $x_1^3x_2+x_2^3x_1=x_1x_2(x_1^2+x_2^2)=x_1x_2\left[(x_1+x_2)^2-2x_1x_2\right]=-\frac{196}{27}$. **436. a)** a; **c)** $\frac{2}{a}$. Kui $a=1$, siis iga arv. Kui $a=0$, siis lahend puudub; **e)** $\frac{1}{m}$. Kui $m=3$, siis iga arv. Kui $m=0$, siis lahend puudub; **g)** $2a$ ja $6a$; **i)** 1 ja $\frac{1}{a}$. **438.** –10 või 10. **439.** $c<0$. Uuri, kas on võimalik, et $a>0$. **440.** $m\neq0$ ja $m\neq1$. **442.** $k=-6$. **444. a)** üheselt; **c)** üheselt; **e)** lõpmata palju. **445. a)** $x=3$ ja $y=3$; **c)** $x=0$ ja $y=\frac{2}{3}$; **e)** $x=5$ ja $y=1$. **447.** Ei leidu, alati on olemas lahend $x=0$ ja $y=0$. **450. c)** $x=8$, $y=3$ ja $x=6$, $y=4$; **e)** $x=-5$, $y=3$ ja $x=-2$, $y=-3$; **d)** $x=1$, $y=0$ ja $x=2$, $y=-1$; **f)** $x=4$, $y=7$ ja $x=7$, $y=4$; **h)** $x=-7$, $y=1$; $x=7$, $y=-1$; $x=1$, $y=-7$ ja $x=-1$, $y=7$; **j)** $x=1$, $y=6$ ja $x=6$, $y=1$; **l)** $x=3$, $y=2$ ja $x=2$, $y=3$. **452.** 35 ja 20. **454.** 9 ja 6. **455.** 3/4. **456.** 3 m. **457.** 6 kg ja 4 kg. **458.** 20 või 32. **459.** 40. **460.** 100 ja 80 või 80 ja 80. **461.** 4000 km. **467.** 82. **468.** 6 km/h, ≈ 29 km/h. **469.** 15 h ja 12 h. **470.** (7; 2), (9; 6) ja (23; 22). **471.** 156. **472.** 34 ja 51. **473. a)** 9; **c)** –55; **e)** 0; **g)** 0. **475. a)** ±4; **b)** –1; **d)** 1 ja 3; **f)** 0. **476. a)** 1; **c)** –1; **e)** $4ac$. **477. a)** (1; 1); **c)** (0; 0); **e)** (5; 2); **g)** (5,8; 6,1). **478. a)** (–3; 1); **c)** (8; 9); **e)** (3; 2). **479. a)** (–3; 2); **c)** lahendid puuduvad; **e)** (2; 1). **480. a)** $(\frac{a+2b}{2};\frac{a-2b}{2})$; **c)** $(\frac{1}{a};0)$; **e)** $(0;\frac{a}{b})$. **482. a)** 8; **c)** –6. **483. a)** –44; **c)** 3. **484. a)** ei; **c)** ja; **e)** ei. **485. a)** $a=-6$; **c)** $a=1{,}2$; **490. a)** (1; 1; 1); **c)** (2; 3; 4). **491. a)** (11; 19; 12); **c)** (1,5; 0,5; 2,5); **e)** süsteem on vastuoluline. **492. a)** $a=0$ või $a=5$; **c)** $a=3$. **493.** Sellist kolmnurka pole olemas. **495.** 60 lehma, 40 siga ja 20 küülikut. **499. a)** ei ole; **b)** ja; **c)** ei ole; **d)** ja. **500. a)** 3; **c)** 8; **e)** 3; **h)** 5; **j)** 9. **502. a)** 2; **c)** 1; **e)** 0; **g)** 2. **503. a)** 23; **c)** 2. **504. a)** Asenda $x^2-4x+6=t$; **c)** –3 ja 4. Tõsta võrduse pooled kuupi. **505. a)** 0,5 ja 1; **c)** lahendid puuduvad; **e)** 1. **507. a)** 0,5 ja 5; **b)** –1. **511.** Eksitud on juhtudel c ja f. **517.** Avalda hüpotenuusi kaudu kaatet ja arvuta ümbermõõt. **520. a)** $x<-4$; **c)** lahendid puuduvad; **e)** $x>2{,}5$; **g)** $x>5$; **i)**

$x<2$. **521. a)** $x>0$; **c)** $x\leq -14$; **e)** $x\leq -\frac{2}{3}$; **g)** ei teisendu lineaarvõrratuseks. **522. a)** $x>8$; **c)** $x<3{,}5$; **e)** $x<2+\sqrt{3}$; **g)** $x>-2\sqrt{3}-3\sqrt{2}$. **525.** Mõeldud naturaalarv võib olla 1; 2 või 3. **529. a)** $x\leq -1$ või $x\geq 3$; **c)** iga x; **e)** lahendeid pole; **f)** lahendeid pole; **h)** iga x; **j)** $x<0$ või $x>7$. **531. a)** $x<0{,}4$ või $x>1$; **c)** $x<-1$ või $x>1$; **e)** $1\leq x\leq 4$; **g)** $x=0$; **h)** $x=6$; **j)** $x<2$ või $x>2$; **l)** $x<-0{,}2$ või $x>0{,}2$. **533. a)** $x\leq -3$ või $-1\leq x\leq 1$ või $x\geq 3$; **c)** $x<-\sqrt{3}$ või $x>\sqrt{3}$. **534. a)** $x<-1$ või $x>3$; **b)** $x<-1$ või $x>1$; **c)** $-2\leq x\leq 2$. **536.** $a\leq -\frac{4}{9}$ või $a>0$. **542. a)** $-3\leq x\leq 3$; **c)** $2\leq x\leq 3$; **e)** $x<2$ või $x>3$. **543. a)** $x>1$; **b)** $x<3$; **c)** $x<\pi$. **544. 1)** $-3<x<-1$ või $x>1$; **3)** $x\geq 2$; **5)** $x\leq 5$; **7)** $x\leq 0$; **9)** $x=2$ või $x=3$; **10)** $x\geq 0$; **12)** $0{,}6<x<2\frac{1}{3}$; **14)** $x<0$ või $x>1$. **545. a)** $-2\leq x\leq -1$ või $3\leq x\leq 4$; **c)** lahendid puuduvad; **e)** lahendid puuduvad. **548. a)** $x>2$; **b)** $x>2{,}6$; **c)** $x<0{,}5$; **d)** $x<\frac{2}{3}$. **550. a)** $x>2$; **b)** $x>\frac{2}{3}$; **c)** $x>0{,}8$; **d)** $x<4$; **e)** $x<-2$ või $x>0{,}5$; **f)** $x<-2$ või $x>0{,}5$; **g)** $x<1$ või $x>2\frac{2}{3}$; **h)** $1{,}25<<x<7$. **553. a)** $x<-5$ või $x>2$; **c)** $x<-1$ või $x>4$. **554. a)** $5{,}1<x<6$; **c)** $1\frac{8}{9}\leq x<2$. **555. a)** $0<x<0{,}25$; **c)** $x=0$ või $x>3$; **e)** $0<x<1$ või $x>1$; **g)** $x<0{,}5$; **556. a)** $x>2$; **d)** $x<-1$ või $x>1$; **e)** $x>-1$. **557. a)** $-3<x<1$; **c)** $x<-\sqrt{7}$ või $2<x<2$ või $x>\sqrt{7}$; **e)** $-1<x<0$ või $x>4$. **561. a)** -2; **b)** 1 ja 3; **e)** lahendeid pole. **563.** 1. **565. a)** -2 ja 1; **b)** 1 ja 4; **c)** 2 ja 5. **566. a)** 0; **c)** $(3+\sqrt{5})/2$ ja $(3-\sqrt{5})/2$; **f)** lahendeid pole; **h)** -3; -2; 1 ja 0. **567. a)** -3 ja 5; **c)** -2 ja 6; **e)** $-1\leq x\leq 2$. **568. a)** 2; **c)** $1-\sqrt{5}$ ja 0; **e)** $0{,}5(19+\sqrt{29})$; **g)** -1. **570. a)** $x<1$ või $x>9$; **b)** $\frac{1}{3}<x<3\frac{2}{3}$; **c)** $0{,}9<x<7{,}7$. **571. a)** $-\frac{13}{18}<x<-\frac{2}{5}$ või $\frac{2}{5}<x<\frac{1}{12}$; **b)** lahendid puuduvad; **c)** $\frac{7}{8}<x<2$ või $2<x<4{,}25$; **e)** $2<x<2{,}5$ või $2{,}5<x<6$. **572. a)** $x<-3$ või $x>-1$; **c)** $0<x<0{,}4$; **d)** $0\leq x\leq\frac{1}{3}$; **f)** $x\leq -4$ või $x\geq 1$; **g)** $x<-5$ või $x>-1$. **573. a)** $1{,}5\leq x\leq 2$; **b)** $-5<x<-2$ või $2<x<3$ või $3<x<5$; **c)** $x<3$; **d)** $x\leq -2$ või $x\geq -1$; **e)** $0\leq x\leq 1{,}6$ või $x>2{,}5$; **g)** $-2<x<3$; **i)** $x<0$ või $x>6$. **578.** $x\leq -1{,}5$; **b)** $3\leq x<10$; **c)** $x<9$; **d)** $2\leq x\leq 5\frac{1}{14}$. **579. a)** lahendid puuduvad; **c)** $x<-1{,}5$; **e)** $0{,}5<x<\frac{95}{38}$. **580. a)** $x\leq -1$; **c)** $x\leq -1$ või $x\geq 6$; **e)** $x\leq -2$ või $-1\leq x<1$ või $x>2$. **581. a)** -1; 0; 1; 2; **b)** 2; 3; 4. **583.** $28<t<30$. **584.** $a<4$. **585.** Mitte ühegi a korral. **586.** $-25{,}125<a<-5$ või $a>10$. **589. a)** ja; **c)** ei; **e)** ei. **594.** 40°. **596. a)** -3 ja 2; **b)** -3 ja 5; **c)** -2 ja 0; **d)** -4 ja 5; **e)** -3. **597. a)** 2,5; **b)** 1 ja 3; **c)** $m=2$ ja n; **d)** $-a$ ja $b+3$; **e)** a ja $b-3$. **602.** 3 ja 5. **603. a)** $x^2+(p-2)x+1-p+q=0$; **b)** $qx^2+2(p+q)x++4+2p+q=0$. **604. a)** $\frac{a-1}{a+4}$; **b)** $\frac{2(a-9)}{3(a+7)}$; **c)** $\frac{2m-n}{2n-m}$. **605. a)** $c=2{,}25$; **b)** $c>-\frac{1}{12}$; **c)** $c\leq\frac{1}{32}$; **d)** $c>\frac{1}{3}$. **606.** Seitsmendsüsteemis. **607.** 19. **608.** 8 t ja 17 t. **609.** 6 ja 4. **610. c)** ± 2; **e)** $\pm 0{,}5$; **f)** $\pm\frac{2}{3}$ ja $\pm\frac{1}{3}$. **612. a)** -4; **b)** -2; **c)** $5a$; **d)** 3. **613. a)** 2. **614. a)** $x=5$, $y=3$; **c)** lahendid puuduvad. **615.** $m=-2$. **616. a)** $(0{,}5; -2)$; **c)** $(13; 11)$; **d)** $(-2; 3)$. **617. a)** 0; **b)** 18; **c)** 0. **618. a)** $(4; 3; 7)$; **b)** $(2; -3; 0{,}5)$; **d)** $(-2; -5; -1)$. **620. a)** $x<1$ või $x>4$; **b)** $-4<x<0$; **c)** $x\leq -1{,}5$ või $x\geq 5$; **d)** $-2\frac{1}{3}<x<3{,}75$. **621. a)** lahendid puuduvad; **b)** iga arv; **c)** $-9\leq x\leq -4$; **f)** iga arv. **622. a)** $x<-2$ või $x>3$; **c)** $-2<x<4$; **e)** $x<3$. **623. a)** 0 ja 6; **b)** -2 ja 4; **c)** 0,5. **625. a)** lahendid puuduvad; **b)** lahendid puuduvad; **c)** $x<-1$ või $3<x\leq 4$ või $x\geq 7$; **e)** $6<x\leq 9$; **f)** $-4<x<-2$ või $4<x<4{,}5$. **628.** I sordi riiet ei tohi olla üle 12 meetri. 632. **a)** 4; **b)** 4. **633. a)** $-0{,}5$; **b)** 2 ja 34; **c)** 1; **d)** 6; **e)** ± 3; **f)** 3. **634. c)** 4; **d)** $\frac{1}{3}$. **635. a)** $x>9$; **b)** $0\leq t\leq 9$; **c)** $u\geq 0$; **d)** $x\geq 2$; **e)** lahendid puuduvad; **f)** $x\leq -1$ või $x\geq 3$. **636. a)** $x\geq 2$; **c)** $x>3$; **e)** $2\frac{2}{9}<x<4$ või $x>5$; **g)** $0\leq x\leq 3$; **i)** $x<-2$. **637. a)** $x<-1$; **e)** $-33<x<3$; **e)** $x>2\frac{2}{3}$; **g)** $x\leq -2$ või $x>2$; **i)** $x>\frac{24}{19}$. **639. a)** kui $a<0$, siis $x\neq -1$; kui $a=0$, siis $-1\leq x<\frac{1}{a}-1$. **640. b)** $-1\leq x<\sqrt[3]{4}$. **644.** Esimesest kahest võrrandist leiame, et $x=1$ ja $x=3$. See lahend ei rahulda kolmandat võrrandit. **646.** Ei. Süsteemi teine võrrand on vastuoluline, sest võrduse vasakul poolel on paarisarv, paremal aga paaritu arv. **647. a)** $k=-5$; **b)** $M=-0{,}25$ või $M=-7$. **649. a)** $(-4; -5)$ ja $(5; 4)$; **c)** lahendeid pole. **650. c)** $(4; 1)$. **651. a)** $(1; 1; 1)$ ja $(-2; -3; -3)$; **c)** $(1; 0)$. **652. a)** $(3; 2)$, $(1; 4)$, $(-3; -4)$ ja $(-5; -2)$. **653. a)** $(t; 7t)$, kus $t\in\mathbb{R}$; **c)** $(2; 3)$ ja $(3; 3)$; **f)** $(2; 1)$ ja $(-2; -1)$. **654. c)** $(2; 3)$ ja $(3; 2)$; **d)** $(2; 1)$ ja $(1; 2)$; **f)** $(2; 1; 0)$ ja $(-2; -1; 0)$; **h)** $(1; 1; 1)$; **i)** $(1; 2; 3)$ ja $(0; 0; 0)$; **j)** $(0; 0; 0)$, $(\sqrt{2}; \sqrt{2}; \sqrt{2})$ ja $(-\sqrt{2}; -\sqrt{2}; -\sqrt{2})$. **l)** $(13; 0; 13)$ ja $(8; 2; 4)$. **685.** Teine. **686. a)** 35°45′ **c)** 14°36′ **e)** 48°7′30″. **687. a)** 7,59° **c)** 46,49°. **688. 1)** 14°40′ **3)** 92°3′30″. **690.** 14°. **692.** 18,6 m. **694.** 42°. **696.** 32°. **698.** 600 m. **700. a)** ei; **c)** ei; **e)** $\alpha=14°29'$ ja $\beta=75°31'$ **g)** $\alpha=89°26'$ ja $\beta=0°34'$. **702.** 75°31′; 104°29′. **704. 1)** 13,7; **3)** 1,0; **5)** $x=21{,}0$ $y=30{,}0$; **7)** $x=54{,}0$ $y=64{,}3$; **9)** $x=28$ $y=10$; **11)** $x=13{,}5$ $y=6{,}45$ $z=15{,}9$. **707.** 26,5 m, 67,9 m. **708.** $x=10{,}3$ m, $d=30$ m. **710. a)** 1; **c)** 1; **e)** 0,25; **g)** 0,25; **i)** $\cot^2\alpha$; **k)** $\tan^2\alpha$. **711. 9)** $a=6{,}52$, $b=30{,}7$; **11)** kolmnurk pole määratud; **12)** $a=3$, $b=4$ või $a=4$, $b=3$. **713.** Kui $R=6380$ km, siis 20 300 km. **715.** $\approx 32{,}4$ m ja ≈ 20 km. **716. a)** ≈ 5080 km; **b)** 43°. **717.** $R=10-5\sqrt{2}$; $(3-2\sqrt{2})\pi$. **720.** 70,5°. **725. 1)** $194°+5\cdot 360°$ **3)** $249°+(-1)\cdot 360°$ **5)** $220°+10\cdot 360°$ **7)** $80°+(-3)\cdot 360°$ **9)** $0°+(-1)\cdot 360°$. **726. a)** $-60°$, $-252°$, $-1080°$; **c)** $-354°$, $-21\,600°$, $-518\,400°$. **729. 1)** III; **3)** II; **5)** III; **7)** II; **9)** IV; **11)** II; **13)** III; **15)** I; **17)** II. **731. 1)** 180° **3)** 135° **5)** 120° **7)** $-288°$ **9)** $-370°$ **11)** 114°35′ **13)** 48°58′ **15)** 9°10′ **17)** 51°26′ **19)** 359°49′. **732. 1)** $\frac{\pi}{2}$; **3)** $\frac{5}{6}\pi$; **5)** $\frac{2}{5}\pi$; **7)** $-\frac{5\pi}{12}$; **9)** $\frac{29}{12}\pi$; **11)** $\frac{11}{18}\pi$; **13)** 4π. **733. 1)** 2,23; **3)** 2,123; **5)** $-0{,}01745$; **7)** $-5{,}415$; **9)** 1,335. **735.** $\frac{2}{9}\pi$, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{4}{9}\pi$. **736. 1)** sin 1; **3)** sin 1; **5)** tan 1; **7)** sin 2; **9)** võrdsed. **737.** $\frac{\pi}{21600}$, $\frac{\pi}{1800}$, $\frac{\pi}{30}$. **738. a)** 96π; **b)** $\frac{8}{5}\pi$. **740.** 2°26′ ehk 0,0424 rad. **741.** 8π mm. **742.** $2\cdot 10^{-7}\frac{\text{rad}}{\text{s}}$, $30\frac{\text{km}}{\text{s}}$. **743.** 12,7 pööret. **747.** $S=\frac{1}{2}lr$ ja $S=\frac{1}{2}ah$. **748.** 60. **749.** 107,7. **750.** 597 m. **752.** 240 m. **754.** 5,61 m. **755.** ≈ 3474 km. **757.** 1,16 cm^2. **758.** $\frac{a^2}{6}(2\pi-3\sqrt{3})$. **759. 1)** $\sin 340°$ **3)** $\tan 180°$ **5)** $\sin 287°$ **7)** $\tan 36°$. **760. 1)** $\sin 30°$ **3)** $\tan 120°$ **5)** $\sin 280°$ **7)** $\tan 0°$. **761. 1)** -1; **3)** 0; **5)** -1; **7)** väärtus puudub; **9)** 0; **11)** 0; **13)** 0; **15)** $0{,}5\sqrt{2}$; **17)** 0,5; **19)** 1. **762. 1)** $-$ **3)** $-$ **5)** $-$ **7)** $+$ **9)** $+$ **11)** $-$ **13)** $-$ **15)** $-$. **763. 1)** III; **3)** I; **5)** II. **765. 1)** 0; **3)** 1; **5)** a. **767. a)** $\cos\alpha=-\frac{3}{5}$, $\tan\alpha=-\frac{4}{3}$, $\cot\alpha=-\frac{3}{4}$; **c)** $\cos\alpha=-\frac{9}{41}$, $\tan\alpha=\frac{40}{9}$, $\cot\alpha=\frac{9}{40}$; **e)** $\cos\alpha=-\frac{\sqrt{10}}{10}$, $\sin\alpha=\frac{3\sqrt{10}}{10}$, $\cot\alpha=-\frac{1}{3}$; **g)** $\tan\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos\alpha=\frac{\sqrt{5}}{3}$, $\sin\alpha=\frac{\sqrt{3}}{3}$; **i)** $\sin\alpha=0{,}8$, $\tan\alpha=-\frac{4}{3}$, $\cot\alpha=-0{,}75$. **768. a)** 1; **c)** $-\frac{1}{3}$; **e)** 1; **g)** 1; **i)** 4; **k)** -5. **769. a)** $\sin^2\alpha$; **e)** $\frac{1}{\sin^2\alpha}$; **e)** $2\cos\alpha$; **g)** -1; **i)** $\tan\alpha$; **k)** 1; **m)** $\sin\alpha$; **o)** 1; **q)** 1. **772. 1)** 0,5; **3)** $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; **5)** $\frac{\sqrt{3}}{3}$; **7)** 1; **9)** $-0{,}5\sqrt{2}$; **11)** -1; **13)** $-0{,}5$; **15)** väärtus puudub; **17)** 0,5; **19)** $-0{,}5\sqrt{2}$. **774. 1)** 0, π, 2π; **3)** $\frac{\pi}{2}$; **5)** $\frac{3}{2}\pi$; **7)** $\frac{\pi}{4}$; $\frac{5}{4}\pi$. **775.** $-0{,}2$. **777. 1)** 0; **3)** 0; **5)** $-\sqrt{3}$; **7)** $1+\sqrt{3}$; **9)** $0{,}5\sqrt{3}$; **11)** -1; **13)** $\sqrt{2}-1$. **778. 1)** $\cot^2\alpha$; $\alpha\neq 0+k\pi$, kus $k\in\mathbb{Z}$; **3)** $\sin^2\alpha$; $\alpha\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$, kus $k\in\mathbb{Z}$. **779. 1)** 0; **3)** -2; **5)** -1; **7)** $\tan^2\alpha-\sin^2\alpha$. **780. 1)** $\frac{\pi}{3}$; $\frac{2}{3}\pi$; $\frac{4}{3}\pi$; $\frac{5}{3}\pi$. **783.** $2\sin\frac{\alpha}{2}$; ≈ 94 cm. **785.** 14. **788.** 10,8 mm. **789. 1)** $\frac{\sqrt{2}}{2}$; 1; 0; $-\frac{\sqrt{2}}{2}$; -1. **3)** -1; 1. **790.** 4950 mm. **791.** 10. **792.** $\sin\alpha=\frac{7}{25}$; $\cos\alpha=\frac{24}{25}$; $\tan\alpha=\frac{7}{24}$. **793.** 18 cm^2. **794. 1)** $a=9{,}74$; $b=15{,}4$; $\beta=57°40'$. **2)** $b=72{,}3$; $c=125$; $\beta=35°20'$.

3) $b = 15{,}7$; $\alpha = 55°16'$; $\beta = 34°44'$. **4)** $c = 54{,}2$; $\alpha = 36°41'$; $\beta = 53°19'$. **795.** 270° ehk $\frac{3}{2}\pi$ rad. **796. a)** $\frac{7}{6}\pi$; **b)** $-\frac{5}{4}\pi$; **c)** $\frac{\pi}{12}$; **d)** $\frac{3}{5}\pi$; **e)** $\frac{7}{8}\pi$. **797. a)** 165°; **b)** 67°5′; **c)** −90°; **d)** 150°; **e)** −114,6°. **798. a)** 157°30′; **b)** 49°30′; **c)** 146°15′; **d)** 468°. **799.** $\frac{\pi}{12}\frac{\text{rad}}{\text{h}}$; $\frac{\pi}{720}\frac{\text{rad}}{\text{min}}$; $\frac{\pi}{43200}\frac{\text{rad}}{\text{s}}$ = 1670 km. **800. 1)** −1; **2)** −6; **3)** $3+\sqrt{2}$; **4)** 2; **5)** $\frac{19}{54}$. **801. 1)** $\frac{40}{41}$; $-\frac{9}{40}$; $-\frac{40}{9}$. **2)** $\frac{4}{5}$; $\frac{4}{3}$; $\frac{3}{4}$. **3)** $\frac{5}{13}$; $-\frac{5}{12}$; $-\frac{12}{5}$. **4)** $0{,}5\sqrt{2}$; $-0{,}5\sqrt{2}$; −1. **5)** $-\frac{1}{2}$; $-0{,}5\sqrt{3}$; $-0{,}5\sqrt{3}$. **6)** $-\frac{3}{5}$; $-\frac{4}{5}$; $\frac{4}{3}$. **802. 1)** $\cot\alpha$; **2)** $2\cot 2\alpha$; **3)** $\cot^4\alpha$; **4)** $\frac{1}{\cos\alpha}$; **5)** 1; **6)** $\frac{1}{\sin^2\alpha}$. **7)** $\sin\alpha-\cos\alpha$; **8)** $\sin\alpha-\cos\alpha$; **9)** 0; **10)** 0. **804. 1)** $0{,}5\sqrt{3}$; $-\frac{1}{2}$; $-\sqrt{3}$. **2)** $-\frac{1}{2}$; $-0{,}5\sqrt{3}$; $\frac{\sqrt{3}}{3}$. **3)** $-0{,}5\sqrt{3}$; $-0{,}5\sqrt{2}$; 1. **4)** $-0{,}5\sqrt{2}$; $0{,}5\sqrt{2}$; −1. **805. 1)** $0{,}5\sqrt{3}$; **2)** $2\cos\alpha$; **3)** $\frac{4}{3}$; **4)** $\sqrt{3}$; **5)** 0; **6)** 2. **806. a)** $\frac{1}{2}$; **b)** $0{,}5\sqrt{2}$; **c)** $-\sqrt{3}$; **d)** $\frac{1}{2}$; **e)** 1. **807.** 40°. **808.** $(\sin\alpha+\cos\alpha)$. **811. 1)** $0{,}5\sqrt{2}$; **3)** $0{,}5\sqrt{2}$; **5)** $\sin\alpha$; **7)** $\sin 5\alpha$; **9)** 0,5; **11)** $-\sin 1$; **13)** $\sqrt{3}$; **15)** $\sqrt{3}$; **17)** $\tan\alpha$. **812. 1)** $\tan\alpha\cot\beta$; **3)** $\cot\alpha$; **5)** 1; **7)** $\sin 2\alpha$; **9)** $\cos\alpha$. **814.** Juhis: kasuta seda, et $\frac{1}{\tan(\alpha\pm\beta)} = \cot(\alpha\pm\beta)$. **817.** Vt. juhist ülesandele 819. **818.** Esita $\tan(\alpha+\beta+\gamma)$ $\tan\alpha$, $\tan\beta$ ja $\tan\gamma$ kaudu. **819.** Näiteks $\cos(\alpha+\beta+\gamma) = \cos[(\alpha+\beta)+\gamma] = \cos(\alpha+\beta)\cos\gamma - \sin(\alpha+\beta)\sin\gamma = -\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma - \cos\alpha\sin\beta\sin\gamma - \cos\beta\sin\alpha\sin\gamma - \cos\gamma\sin\alpha\sin\beta$. **822. 1)** 0,96; 0,28; $\frac{24}{7}$; **3)** −0,96; 0,28; $\frac{24}{7}$. **823. 1)** $\frac{\sqrt{2}}{2}$; **3)** $\frac{\sqrt{2}}{2}$; **5)** $\frac{\sqrt{3}}{3}$; **7)** $-\frac{3}{4}$; **9)** −1. **825. 1)** $\sin 80°$; **3)** 1; **5)** $\cos 4\alpha$; **7)** $\frac{1}{4}\sin 4\alpha$; **9)** 1; **11)** $\frac{1}{2}\sin 4\alpha$. **831.** $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$, kus $k \in \mathbb{Z}$. **832.** $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$, kus $k \in \mathbb{Z}$. **833.** $\frac{1}{16}\sin 16\alpha$. **834.** $0 + 2k\pi$, kus $k \in \mathbb{Z}$. **835. 1)** $\frac{\sqrt{10}}{10}$; $\frac{3\sqrt{10}}{10}$; $\frac{1}{3}$; **3)** $\sqrt{\frac{5}{8}}$; $-\sqrt{\frac{3}{8}}$; $-\sqrt{\frac{5}{3}}$; **5)** $\frac{3}{5}$; $-\frac{4}{5}$; $-\frac{3}{4}$. **7)** $\frac{3\sqrt{10}}{10}$; $-\frac{\sqrt{10}}{10}$; 3. **8)** $\frac{5}{13}$; $\frac{12}{13}$; $\frac{5}{12}$. **836.** $\pi + 2k\pi$, kus $k \in \mathbb{Z}$. **837. 1)** $\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$; $\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$; $2-\sqrt{3}$; **4)** $-\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$; $\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$; $-\sqrt{2}-1$. **839.** $\frac{4}{5}$ ja $\frac{3\sqrt{10}}{10}$. **841.** $\frac{4}{5}$. **842. 1)** $\sin^2\alpha$; **3)** $\sin^2 4\alpha$; **5)** 1 **7)** $\cos\alpha$; **9)** 1; **11)** 1; **13)** $\tan 1$; **15)** $2\tan 2$. **846.** Kasuta eelmises ülesandes tuletatud valemeid. **848.** $\frac{2}{3}$; $\frac{\sqrt{5}}{3}$; $\frac{2\sqrt{5}}{5}$. **850. 1)** 1,5; **3)** 16,5; **5)** 8,66; **7)** 8,66. **851. 1)** = 1,56 cm² **3)** = 0,43 m². **852. 1)** 27,7 dm³ **3)** = 0,43 m². **853.** 20. **855.** 30° või 50°. **858. 1)** 277; **3)** = 25,7. **859. 1)** 33,8. **863.** $S = \frac{nr^2}{2}\sin\frac{2\pi}{n}$. **869. 1)** 20°10′ ehk = 20,2°; **3)** 19,5°; **5)** 90°; **7)** 12,2; **9)** 15. **870. 1)** $b = 92{,}7$; $c = 61{,}7$; $\gamma = 40°$; **3)** $\gamma = 44°$; $b = 25{,}7$; $c = 40$; **5)** siinusteoreemi abil ei lahendu; **7)** $\gamma = 69°48'$; $a = 48{,}4$; $b = 105{,}8$; **9)** $a = 57$; $\alpha = 69°23'$; $\beta = 58°37'$. **872.** Algandmetes on vastuolu, ülesanne ei lahendu. **873.** 388 m. **874.** 21,1 m. **876.** 13,2 m. **880.** 63,7 m; 80,0 m ja 91,3 m. **882.** Nurgad 40°, 60° ja 80°; ülejäänud küljed 16,2 cm ja 18,4 cm. **886.** Kasutades valemit $S = 0{,}5ab\sin\gamma$, esita „suure" kolmnurga pindala kahe „väikese" kolmnurga pindalade summana. **888. 1)** 8,72; **3)** 4,95; **5)** 9,64; **7)** 4,47; **9)** 78°30′; **11)** 101°. **889. 1)** $a = 15{,}6$ $\beta = 33°40'$ $\gamma = 86°20'$; **3)** $b = 4$ $\alpha = 36°52'$ $\gamma = 90°$; **5)** $c = 23{,}6$ $\alpha = 24°48'$ $\beta = 57°6'$; **7)** $\alpha = 53°8'$ $\beta = 90°$ $\gamma = 36°52'$; **9)** Kolmnurka ei teki. **891.** 117 km. **892.** 60°40′. **893.** 77°25′; 56°10′; 46°15′. **894.** 126 cm². **895. a)** $\frac{4}{5}$; **b)** $\frac{3}{5}$ ja $-\frac{3}{5}$; **c)** 5 ja 9,85. **896.** $8+\sqrt{3}$. **898.** 20 küünart. **901.** 60°. **903. 1)** kolmnurka ei teki. **3)** $\alpha = 10°55'$ $\gamma = 132°12'$ $c = 946{,}7$; **5)** kolmnurk pole määratud; **7)** $\alpha = 45°16'$ $\beta = 79°40'$ $\gamma = 55°4'$; **9)** $a = 62$ $\beta = 21°56'$ $\gamma = 34°4'$; **11)** $b = 545{,}0$ $c = 423{,}4$ $\alpha = 42°40'$. **904.** 4,36. **907.** 18,8 ja 6,84. **911. 9)** 756.

912. 3,5 cm ja 10,6 cm. **913.** 2 m. **915. 1)** 25 m või 39 m. **917. 1)** $\frac{3\sqrt{3}}{2}$; **3)** = 770. **920.** 3; 4 ja 5. Täisnurkne kolmnurk. **921.** 6; 8 ja 10. **922.** 141,6 dm². **933. a)** $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$; **b)** $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$; **c)** $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$; **d)** $2-\sqrt{3}$. **934. a)** $\sin 43°$; **b)** $\cos 46°$; **c)** $\tan 25°$; **d)** $\tan 4\alpha$; **e)** $\frac{1}{2}$; **f)** $\frac{\sqrt{2}}{2}$; **g)** $\tan 80°$; **h)** $\cos 2\alpha$. **935.** $\tan(\alpha+\beta) = -7$; $\tan(\alpha-\beta) = 1$. **936.** $\sin(\alpha+\beta) = -\frac{33}{65}$; $\cos(\alpha+\beta) = -\frac{56}{65}$; $\sin(\alpha-\beta) = \frac{63}{65}$; $\cos(\alpha-\beta) = -\frac{16}{65}$. **938. a)** $\tan\alpha\cdot\tan\beta$; **b)** $\tan(\beta-\alpha)$. **939. a)** 0,96; 0,28; $\frac{24}{7}$. **b)** $\frac{120}{169}$; $-\frac{119}{169}$; $-\frac{120}{119}$. **940. a)** $\frac{\sqrt{2}}{4}$; $-\frac{\sqrt{14}}{4}$; $-\frac{\sqrt{7}}{7}$; **b)** $\sqrt{0{,}8}$; $\sqrt{0{,}2}$; −2. **941.** 67°55′. **943.** $\frac{1}{4}$. **944. a)** $a = 14{,}7$; $b = 23{,}8$; $\gamma = 77°$; **b)** $a = 764$; $\beta = 38°50'$; $\alpha = 86°$; **c)** $c = 56{,}3$; $\beta = 65°40'$; $\gamma = 80°40'$ või $c = 30{,}1$; $\beta = 114°20'$; $\gamma = 32°$; **d)** $b = 5{,}1$; $\alpha = 39°20'$; $\gamma = 32°40'$ **e)** $\alpha = 28°58'$; $\beta = 46°34'$; $\gamma = 104°28'$. **f)** kolmnurka ei teki. **g)** kolmnurka ei teki. **h)** $c = 5{,}0$; $\gamma = 90°$; $\alpha = 36°52'$; $\beta = 53°8'$. **947.** 3,7 m, 5,28 m². **948.** 90°. **949.** 74°. **950. a)** 9,5; **b)** 14; **c)** = 6,4; **d)** 6; **e)** $\frac{9\sqrt{3}}{4}$; **f)** 180; **g)** 84; **h)** $9\sqrt{3}$. **956.** Tere. **957. a)** 5; **c)** 9; **e)** 7; **g)** 5; **i)** 10. **958.** (3; 0); (−5; 0); (0; 0). **960. a)** (3; −2); **b)** (−3; 2); **c)** (−3; 2). **962. a)** $x = -4$; $y = 4$; **b)** $x = 4$; $y = 0$; **c)** $x = 7$; $y = -3$; **d)** $x = \pm 2$; $y = \pm 5$. **963. a)** (5; −6); **b)** (−1,5; −8); **c)** (−8; −2). **965. a)** (3; −1); (5; 3); (−3; −7). **966.** $|c-b|$. **973. 6)** $\sqrt{10}$; **7)** $5\sqrt{2}$; **8)** $2\sqrt{5}$; **9)** 10; **10)** $\sqrt{106}$. **974. a)** $\sqrt{(c-a)^2+(d-b)^2}$. **975.** B, $2\sqrt{10}$. **978.** 45. **987.** −11; −1; 2; 5; 15. **988.** (3; 2). **994.** $A(3; \frac{3}{2}\pi)$; $B(4; 0)$; $C(5; \pi)$; $D(2; \frac{\pi}{6})$; $E(6; \frac{5}{4}\pi)$; $F(4\sqrt{2}; \frac{3}{4}\pi)$. **995.** $A(2; 2\sqrt{3})$; $B(\frac{1}{2}\sqrt{3}; \frac{1}{2})$; $C(-\frac{3}{2}\sqrt{2}; \frac{3}{2}\sqrt{2})$; $D(4; 0)$; $E(-1; -1)$. **996.** $A(0; 0)$; $B(1; 0)$; $C(\sqrt{3}; \frac{\pi}{6})$; $D(2; \frac{\pi}{3})$; $E(\sqrt{3}; \frac{\pi}{2})$; $F(1; \frac{2}{3}\pi)$. **998.** $2\sqrt{3}$; $2\sqrt{3}$. **1001. a)** (9; 0); **c)** (−6; 3); **e)** (−9; 2); **g)** (−9; 0); **i)** (−11; 4); **k)** (0; −8). **1002. a)** (2; 5); **c)** (3; 2). **1003. a)** (−3; −2); **c)** (−1; 5); **e)** (0; −5). **1004. a)** (4; 5); **c)** (−2; 6); **e)** (3; −5). **1005. a)** (3; −4); **c)** (5; 3). **1007.** (5; −2), (−5; 2), (−10; −8), (8; 5), (−3; 5), (−5; −10), (2; 3). **1008. a).**(−1; −6), **b)** (−1; −6). **1009.** Ei järeldu. **1010. b)** $200\sqrt{5}$ km, 63°26′. **1012.** 315°; $5\sqrt{2}$ N. **1013.** Ei, jah. **1014. a)** $2n$; **b)** n^2. **1016. a)** (7; 10); **c)** (3; −1); **e)** (−5; −7); **g)** (1; 3). **1019. a)** (7; 5); **c)** (5; 2); **e)** (1; 0); **g)** (1; 3). **1020.** 13 km/h. **1021. a)** = **b)** = **c)** = **d)** =. **1026. a)** $\overrightarrow{AO}$; **c)** $\overrightarrow{CA}$; **e)** $\overrightarrow{AC}$. **1027. a)** $\overrightarrow{AC}$; **c)** $\overrightarrow{CE}$; **e)** $\overrightarrow{AE}$. **1029. a)** $x = 0$; $y = 0$; **c)** $x = -2$; $y = -6$; **e)** $x = 5$; $y = 0$. **1030. a)** (1; 2); **c)** (2; 2); **e)** (4; −7); **g)** $(2x; b)$; **i)** $(2y; 2x)$; **k)** $(g; -h)$. **1032. a)** (9; 18); **c)** (2; 4); **e)** (6; 0); **g)** (−1,5; 3) **i)** (10; 9); **k)** (6; 17); **m)** (4; 11); **o)** (6; 2); **q)** (−4; −4); **s)** (25; −30); **u)** (13; 36). **1033. a)** $\overrightarrow{DB}$ **c)** $\overrightarrow{BO}$ **e)** $\overrightarrow{O}$ **g)** $\overrightarrow{AC}$ **i)** $\overrightarrow{AD}$ **k)** $\overrightarrow{DA}$ **m)** $\overrightarrow{CO}$. **1036. 1)** $\overrightarrow{EB}$ **3)** $\overrightarrow{AB}$ **5)** $\overrightarrow{DC}$ **7)** $\overrightarrow{AE}$. **1040. a)** jah; **c)** jah; **e)** jah; **f)** jah; **g)** ei; **h)** jah. **1041. a)** 9; **c)** −11/3. **1042.** ei ole. **1043. 1)** (0; −1,5); **3)** (2; 2); **5)** $(b+2; -1)$; **7)** $(a+1; 2)$; **9)** $(\frac{\sqrt{3}+1}{2}; \frac{\sqrt{3}-1}{2})$; **11)** $(t+2; -1)$. **1044. 1)** $B(-1; -3)$; **3)** $(-3; -7)$; **5)** (4; 10); **7)** $(2r-t; 2s-v)$; **9)** $(13z; -7y)$. **1045.** 5 kolmnurka. **1046.** 11,2. **1048.** (2; −5,5), (2; 3), 8,5. **1052. 1)** (4; 5); **3)** (4; 5). **1053.** (−1; 2) ja (1; 3). **1057.** (3; 5). **1058.** 4,1. **1059.** $\frac{mh_1+nh_2}{m+n}$. **1067.** Juhis: Leia kõigepealt mõlemate osade raskuskeskmed. Kogu detaili raskuskese on mõlema osa raskuskeskmeid ühendaval lõigul, punktis, mis jaotab selle lõigu suhtes $a:b$. **1069.** 94 N ja 34 N. **1070.** Kui peegli kaaluks võtta 50 N, siis kummaski nööris 73 N. **1071.** Kui peegli kaaluks lugeda 50 N, siis vastused on 35,3 N; 28,8 N; 25 N ja 50 N. **1072.** Parempoolse. **1074. a)** 120°; **b)** 90°; **c)** 60°. **1075.** Riideäri. **1076.** Kui auto kaaluks võtta 18 000 N, siis = 3130 N. **1077.** Vaguni liigutamiseks kulub $0{,}5\sqrt{3}\cdot F$, raisku läheb $0{,}5\cdot F$. Juhul, kui veonurk jääb samaks, siis nööri pikendamisest kasu ei ole.

1078. a) $\frac{100}{3}\sqrt{3}$ N nöörides CA ja CB, 100 N nööris CD; CD, CA ja CB; **c)** $1000\sqrt{2}$ N nööris CA, 1000 N nöörides CB ja CD; CA, CB ja CD. **1082.** 22° nurga all ristsuunast vastuvoolu sihis. **1083.** 402 km/h; 354°. **1084.** 84,5 N. **1086.** 33° nurga all $\vec{F}_1$ sihist päripäeva. **1087.** ≈ 1100 N. **1088.** 746 km. **1089.** Kell 15.44. **1090.** 22 h 57 min. ja 30 sek.; 25 h 2 min. ja 30 sek. **1092. 1)** $7{,}5\sqrt{3}$; **3)** 24; **5)** $7\sqrt{3}$; **7)** 0; **9)** 35 005; **11)** 0; **13)** 12; **15)** 98. **1093. 1)** 120°; **3)** 135°; **5)** 90°. **1095. a)** 5; **c)** –4; **e)** 8. **1096. 1)** 45°; **3)** 119°45′; **5)** 53°8′; **7)** 75°. **1097. 1)** $m=-3$; **3)** $m=\pm 3$; **5)** Sellist m ei leidu. **1099. a)** 0; 90°; **c)** 4,23; 65°; **e)** 14; 0°. **1105.** Kui poisi kaaluks lugeda 500 N, siis $10000\sqrt{3}$ J. **1106.** Kui telliskivikoorma kaaluks lugeda 10 kN, siis **a)** 80 kN; **b)** 80 kN. **1107.** 0; 0. **1127. b)** $AB=4\sqrt{5}$; $AC=2\sqrt{5}$; $BC=10$. **d)** $\overrightarrow{AB}=(4;8)$; $\overrightarrow{AC}=(4;-2)$; $\overrightarrow{BC}=(0;-10)$. $|\overrightarrow{AB}|=4\sqrt{5}$; $|\overrightarrow{AC}|=2\sqrt{5}$; $|\overrightarrow{BC}|=10$. **f)** $\overrightarrow{AU}=(\frac{8}{3};2)$; $\overrightarrow{BV}=(-\frac{4}{3};-6)$; $\overrightarrow{CW}=(-\frac{4}{3};4)$. **g)** $U=V=W(\frac{5}{3};-1)$. **h)** $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BA}=80$; $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0$; $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=20$. **i)** $\angle A=90°$; $\angle B=26°34'$; $\angle C=63°26'$. **1128. a)** (7; –1); **b)** (4; –9); **c)** (2; –3); **d)** (–1; –1). **1129. a)** (0; 0); **b)** (3; –4); **c)** (5; –5); **d)** (–3; 4). **1130. a)** (12; –13); **b)** (4; –9); **c)** (1; –6); **d)** (–14; 9). **1131. a)** 5; **b)** 13; **c)** 17; **d)** $\sqrt{170}\approx 13{,}0$. **1132.** $\vec{O}$; Ei ole. **1134.** $\overrightarrow{AC}=\vec{a}+\vec{b}$; $\overrightarrow{BD}=\vec{b}-\vec{a}$; $\overrightarrow{MA}=-0{,}5\vec{a}-0{,}5\vec{b}$; $\overrightarrow{MB}=0{,}5\vec{a}-0{,}5\vec{b}$; $\overrightarrow{MC}=0{,}5\vec{a}+0{,}5\vec{b}$; $\overrightarrow{MD}=0{,}5\vec{b}-0{,}5\vec{a}$. **1135.** $\overrightarrow{AB}=0{,}5\vec{a}-0{,}5\vec{b}$; $\overrightarrow{BC}=0{,}5\vec{a}+0{,}5\vec{b}$; $\overrightarrow{CD}=0{,}5\vec{b}-0{,}5\vec{a}$; $\overrightarrow{DA}=-0{,}5\vec{a}-0{,}5\vec{b}$. **1136. 1)** $\vec{v}-\vec{u}$; **2)** $2\vec{u}$; **3)** $-\vec{u}-\vec{v}$; **4)** $2\vec{u}+\vec{v}$; **5)** $2\vec{u}+2\vec{v}$; **6)** $-\vec{v}$; **7)** $-\vec{u}-2\vec{v}$; **8)** $\vec{u}-2\vec{v}$; **9)** $3\vec{u}+3\vec{v}$. **1137.** $\vec{d}=-\vec{a}-\vec{b}-\vec{c}$. **1138. a)** (4; –0,5); **b)** (–2; 0); **c)** (0; 1). **1139.** $B(-3;2)$. **1141. a)** 10; **b)** –1. **1145. 1)** 1; **3)** –1; **5)** –1; **7)** 0; **9)** $-\frac{a}{b}$; **11)** $\frac{y-s}{t-r}$. **1146. 1)** $y=x+5$; **3)** $y=3x$; **5)** $y=\frac{2}{3}x-\frac{5}{3}$; **7)** $y=\frac{5}{4}x-\frac{7}{4}$; **9)** $y=0$; **11)** $x=3$. **1148. a)** $t=-3$. **1149. a)** $\frac{25}{3}$; **c)** $t(r-p)+q$. **1151.** $(-\frac{1}{2};0)$ ja $(0;\frac{1}{3})$. **1152.** $2\sqrt{3}+1$. **1154.** $y=kx-ka$. **1155.** $y=3x+10$. **1156. 1)** $y=\frac{3}{2}x$; **3)** $\frac{x}{3}+\frac{y}{5}=1$; **5)** $y=-3x-11$; **7)** $\frac{b}{a}x$; **9)** $y=-x+a$; **11)** ei määra sirget. **1158. 1)** $-\frac{x}{2}+\frac{y}{3}=1$; **3)** $-\frac{x}{3}+\frac{y}{5}=1$; **5)** $\frac{x}{2{,}5}-\frac{y}{5}=1$. **1159.** $y=-\frac{3}{4}x+2$. **1160. a)** $\frac{x}{5}-\frac{y}{4}=1$. **1164.** $y=0$, $x=0$. **1168.** Küljed: $y=4$, $x=0$, $y=0$, $x=-4$. Diagonaalid: $y=-x$ ja $y=4+x$. **1169. 1)** $y=-1$; **3)** $x=-49{,}5$. **1170.** $y=4$. **1171.** 72,75 cm. **1172.** $y=\frac{31}{100}t+85$; 54 (kPa). **1173. 1)** $y=-0{,}1x+400$; **2)** 2400$; **3)** 125. **1174.** $s=50t-415$, kus t on aeg tundides kümnendsüsteemis, ei. **1175. b)** $y=9x+350$; **c)** 2150$; **d)** 150. **1177. 1)** $y=-1{,}5x+0{,}5$; **3)** $y=\frac{5}{3}x+3$; **5)** $x=3$; **7)** $y=0$. **1180. 1)** $7x+5y+35=0$; **3)** $2x-3y-7=0$; **5)** $2x-y+5=0$. **1181. 1)** $y=\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}$; **3)** $y=-\frac{2}{3}x+\frac{2}{3}$. **1183. 1)** 18°26′; **3)** 45°; **5)** 52°7′; **7)** 71°34′; **9)** 90°. **1185.** 78°41′. **1186.** 60°15′. **1188. a)** $y=0{,}5x-4$. **1189.** $y=\frac{1}{3}x-\frac{7}{3}$. **1192. 1)** $y=4x$; **2)** $y=-2x$; **3)** $y=\frac{1}{3}x$ ja $y=-3x$. **1194. 1)** $5x-2y-5=0$; **1)** $x+y+1=0$; $x-4y-4=0$. **1196.** 17°56′. **1198. 1)** (3; 2); **3)** ühtivad; **5)** paralleelsed; **7)** ühtivad; **9)** $(-\frac{15}{13};-4\frac{10}{13})$; **10)** (6; 4). **1200. 1)** $A=3$; $B=-4$; **3)** $A=-2$; $B=1$. **1201.** 18^{00}; 18 km. **1202.** 39 km, 1 tund 7 minutit. **1203.** $12<k<18$. **1204.** ei. **1205.** $\frac{n(n+1)}{2}+1$. **1207. b)** $AC=\sqrt{29}$; $AB=\sqrt{37}$; $4\sqrt{2}$; $\angle C=66°50'$; $\angle B=54°30'$; $\angle A=58°40'$; $S=14$. **1210.** $(4;2\frac{2}{3})$. **1211.** Leia külgede keskristsirgete lõikepunkt. See ongi ümberringjoone keskpunktiks. **1212. 1)** Küljed $\sqrt{29}$, $\sqrt{37}$, $4\sqrt{2}$. Nurgad 66°50′, 58°40′, 54°30′. Pindala 14. **1216. 1)** 6π; 9π; **3)** $1{,}8\pi$; $0{,}81\pi$; **5)** $2\pi\sqrt{10}$; 10π. **1217. 1)** $(x-2)^2+(y-3)^2=4^2$; **3)** $x^2+(y-2)^2=25$. **1218. 1)** (0; 0), 4; **3)** (2; 0), 2; **5)** (-2;0), 2;7) ei; **9)** $(\frac{1}{2};\frac{5}{2})$; $\sqrt{3{,}5}$; **11)** $(\frac{3}{2};\frac{1}{2})$, 1.

1219. 1) $(x-2)^2+y^2=4$; **3)** $(x-3)^2+(y-1)^2=9$; **5)** $(x-3)^2+(y-2)^2=4$; **7)** $(x-2)^2+(y-4)^2=17$; **8)** neli võrrandit: $(x\pm 2)^2+(y\pm 2)^2=4$. **1220.** Ringi sees A, C ja E; ringjoonel B; ringist väljas D ja F. **1221.** $x^2+(y-5\sqrt{2})^2=25$. **1224.** $x^2+(y-3)^2=9$. **1225. b)** $x^2+y^2=16(\sqrt{2}+1)^2$; **c)** $x^2+y^2=16(\sqrt{2}-1)^2$. **1226.** Diameetrid 2; 4 ja 6. **1228.** $r=R\sqrt{3}(2-\sqrt{3})$. **1229. 1)** $x^2+y^2+2x-14y+25=0$; **2)** $x^2+y^2-8x+10y-4=0$; **4)** punktid ühel sirgel. **1232.** Milline on avaldise d^2+e^2-4f märk? **1233. 1)** $x=\frac{1}{4}y^2-1$; **3)** $y=\frac{1}{12}(x-2)^2$; **5)** $y=-\frac{1}{8}(x-2)^2+2$; **7)** $y=-\frac{1}{8}(x-3)^2$. **1235. 1)** (1; 0), $x=-1$; **3)** (0; –2), $y=2$; **5)** (0; 1,5), $y=-1{,}5$. **1239.** $2p$. **1240.** 3 m. **1242.** Kui võtta parabooli haripunkt punkti (0; 0), siis $x^2=-64y$. **1243.** $x^2+y^2=32$. **1249. 2)** $\frac{x^2}{20}+\frac{y^2}{36}=1$. **1250. 1)** $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$; **3)** $\frac{x^2}{18}+\frac{y^2}{9}=1$; **5)** $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$; **7)** $\frac{x^2}{1}+\frac{y^2}{0{,}75}=1$; **9)** $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{2}=1$. **1251. 1)** $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{25}=1$; **2)** $\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{48}=1$; **4)** $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$. **1253.** $\frac{1}{3}\sqrt{5}$. **1256.** ≈0,017. **1259. 1)** $F_1(5;0)$, $F_2(-5;0)$, $V_1(4;0)$, $V_2(-4;0)$, $y=\pm\frac{3}{4}x$, $e=\frac{5}{4}$; **3)** $F_1(0;5)$, $F_2(0;-5)$, $V_1(0;4)$, $V_2(0;-4)$, $y=\pm\frac{4}{3}x$, $e=\frac{5}{4}$; **7)** $F_1(\sqrt{149};0)$, $F_2(-\sqrt{149};0)$, $V_1(10;0)$, $V_2(-10;0)$, $y=\pm\frac{7}{10}x$, $e=\frac{\sqrt{149}}{10}$; **9)** $F_1(0;\sqrt{5})$, $F_2(0;-\sqrt{5})$, $V_1(0;2)$, $V_2(0;-2)$, $y=\pm 2x$, $e=\frac{\sqrt{5}}{2}$. **1260. 1)** $\frac{y^2}{9}-\frac{x^2}{16}=1$; **3)** $\frac{y^2}{4}-\frac{x^2}{32}=1$. **1261. 1)** $\frac{y^2}{64}-\frac{x^2}{36}=1$; **3)** $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$; **5)** $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$; **7)** $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{4}=1$; **9)** $\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{36}=1$; **11)** $\frac{x^2}{40}-\frac{y^2}{360}=1$; **13)** $x^2-3y^2=1$. **1267.** $x^2-y^2=\frac{49}{2}$. **1271.** 17,2 au; 0,6 au; 35,0 au; 75,0 a. **1274. 1)** $(0;b)$, $(a;0)$; **3)** $(-f;2f)$, $(f;2f)$; **5)** $(h-m;n)$; **7)** $(\frac{s}{2};\frac{s}{2}\sqrt{3})$; **9)** $(\sqrt{a^2-b^2};b)$, $(a+\sqrt{a^2-b^2};b)$. **1285. a)** (–3; 4), (4; –3); **c)** (–2; 3). **1286. a)** (4; 12) ja (–1; –3); **c)** (1; –2) ja (2; –1); **e)** (8; 6) ja (–6; –8); **g)** (3; –1); **i)** (2; 0) ja (–2; 0); **e)** neli lahendit, $(\pm 3;\pm\sqrt{10})$. **1305. a)** 4; **b)** IV; **c)** 5; **d)** (2,5; 0); **e)** $(x-4)^2+(y-2)^2=25$; **f)** $(x-1)^2+(y+2)^2=1$; **g)** $4x-3y-10=0$; **h)** –3/4; **i)** $y=-\frac{3}{4}x-\frac{1}{2}$; **j)** –2; **k)** $y=\frac{4}{3}x+4$; **l)** (–2; –6); **m)** (4; 2) ja 8°8′. **1306.** $y=5-x$. **1307.** jah. **1308.** $18x+8y=37$. **1309.** $M(-1;-2)$. **1310.** $4x-3y+9=0$ ja $\frac{x}{-\frac{9}{4}}+\frac{y}{3}=1$. **1311.** 7. **1312.** (–2; –6), (8; 2), (–6; 10). **1313. a)** $\frac{\pi}{4}$; **b)** $\frac{\pi}{2}$; **c)** 0; **d)** $\frac{\pi}{3}$. **1314.** 16 km/h. **1315. a)** $y=1$; **b)** $y=x-2$ ja $y=4-x$; **c)** $y=3x-8$. **1316. a)** $b=-a$; **b)** $b=a$; **c)** $b=-a\sqrt{3}$. **1317.** $AD\parallel BC$, kesklõigu otspunktid (–2,5; –0,5) ja (5; 4), kesklõik $y=0{,}6x+1$, diagonaalid $y=x$ ja $y=1$. **1318.** $y=\pm x\pm\frac{a}{2}\sqrt{2}$. **1319.** $(x+3)^2+(y+2)^2=25$. **1320.** (4; –3) $r=2$. **1321.** $(x-17)^2+(y-17)^2=17$ ja $(x-5)^2+(y-5)^2=25$. **1322. b)** $y=100-0{,}2x$; **c)** kütusekulu (l) ühe kilomeetri kohta; **d)** 20 l; **e)** 100 l; **f)** 500 km. **1323. a)** (3; –4), (–3; –4), (–4; –3), (4; 3); **b)** (1; –1), $(-\frac{3}{2};\frac{2}{3})$. **1324.** $(a-b;c)$. **1327. a)** (0; 6), (0; 5), (5; 0), (0; 18); **c)** (2,4; 0,4), (4; 0), (0; 2). **1328.** 16 lehma, 0 kitse. Miks ei ole kitsepidamine kasulik? **1330.** Kõik jämedad palgid saagida esimesel saeraamil, kõik peened palgid saagida teisel saeraamil. **1331.** 6 kampsunit ja 20 paari kindaid. Millist tingimust ei olnud vaja kasutada ülesande lahendamisel? **1332.** 400 g kirsse ja 200 g aprikoose. **1331.** 60 pesumasinat ja 80 kuivatusmasinat. 12000 kr. **1335.** Mõlemat lähteainet tuleb võtta ühepalju. **1337.** 400 ja 80. **1339.** 180 ja 600 **1340.** Juhkentalist ja Paljassaarelt peavad minema kõik Kalamaja sauna. Tondilt 100 meest Kalamaja ja 400 meest Kivimäe sauna. **1341.** Los Angeles'ist kõik Denverisse, New Orleansist kõik Miamisse. Detroidist 1300 Denverisse ja 200 Miamisse. **1346.** Tooge siinkohal ära kaks kõige ratsionaalsemat lõikamisviisi:

Üldse lõigatakse lahti 200 lehte, neist pooled ühel, pooled teisel

B	B	B	B	
A		A	B	
			B	

	B	B	B
A	B	B	B
	B	B	B

viisil. Vt. ka V. Abtšuk „Suurte väejuhtide saladus", Tln, „Valgus", 1984. **1347. a)** $\frac{35}{23}$; **c)** -1. **1348. a)** $2\frac{1}{3}$; **b)** $\frac{2}{3}$; **c)** $\frac{67}{100}$; **d)** $\frac{49}{45}$. **1350. a)** $\frac{12}{2a+b}$; **c)** $\frac{4ax}{x^2-a^2}$. **1351. a)** $\frac{(a+x+1)^2}{2ax}$; **c)** 0,5. **1352. a)** $\frac{1}{2-a}$ ja $\frac{24}{47}$; **b)** $\frac{(a-1)(a+2)}{(a+1)(a-2)}$ ja 0; **c)** $23-10\sqrt{3}$. **1357.** 400 $. **1358.** $33\frac{1}{3}$%. **1359.** $23\frac{1}{13}$%. **1360.** $\frac{100k}{100-k}$%. **1361.** 2,5 kg. **1362.** 150 g ja 450 g. **1363.** 50%. **1364.** 20%. **1365.** Kui koristaja palk on igas ettevõttes ühesugune, siis 20%. **1366.** 128,125%. **1367.** 212,5%. **1374. a)** $a \geq 0$; **b)** alati; **c)** $a \leq 0$; **d)** $a \geq 0$; **e)** iga a korral; **f)** $a \geq 0$; **g)** $x \geq 2$; **h)** $x \leq -1$ või $x \geq 1$; **i)** iga x korral; **j)** iga x korral. **1377. a)** a^2b^3; **b)** $\frac{a^2\sqrt{a}}{b}$; **c)** $a^3b\sqrt{ab}$; **d)** $\sqrt{1-b}$. **1378.** Esimene arv on väiksem. **1379. a)** 49; **b)** 4,25. **1380.** $\frac{1}{2\sqrt{a}(a-b)}$; **b)** 1; **c)** 1. **1382. a)** $\sqrt{2}$; **b)** $\frac{\sqrt{2}}{2}$; **c)** $\frac{2\sqrt{6}}{3}$; **d)** $\frac{\sqrt{2}-2}{2}$; **e)** 4; **f)** $3(2\sqrt{3}+3)$; **g)** $3(3\sqrt{2}-4)$; **h)** $\frac{1}{2}(5\sqrt{3}+3\sqrt{5})$. **1383. b)** $\sqrt{5}+\sqrt{2}$. **1384. a)** 6. **1389. a)** 1,25; **b)** -4 ja 9; **c)** $-0,5$ ja 1,5; **d)** lahendid puuduvad; **e)** -2. **1390. a)** $\frac{n+1}{n-1}$ ja -1; **c)** $\pm 2a$; **e)** $\pm(a-2b)$; **g)** a ja b. **1394. a)** $(x+1)(x-3)$; **b)** $(x-1)(x+1)$; **c)** ei lahutu teguriteks; **d)** $x(x+3)$; **g)** $2(x+1)(x-4)$; **h)** ei lahutu teguriteks. **1396.** $-1,75$. **1397.** $c=3$ või $c=-4$. **1399.** ei, ei, ja. **1402. a)** lahendeid pole; **b)** (3; 5); **c)** lahendeid pole. **1405. a)** -24; **b)** -27; **c)** 52; **d)** $a-s$; **e)** -9; **f)** 7; **g)** 1; **h)** $2a^2+b^3-3a^2b$. **1410.** Süsteemil on lahendid olemas. **1412.** $a=1, b=-1$ või $a=-1, b=1$. **1413. a)** $x=1, y=2, z=3$; **c)** $x=1, y=-2, z=1$. **1414.** 5 tunni pärast. **1417.** 12 ja 36. **1418.** 8 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$. **1419.** $2\frac{2}{7}\frac{\text{km}}{\text{h}}$. **1420.** 24 ja 40. **1421.** 162 kala ja 9 poissi. **1422.** 18 kr ja 27 kr. **1423.** Peole jõudis $25\frac{25}{59}$ minutit pärast kella 12 ja peolt tuli ära $\frac{2}{59}$ minutit pärast kella 5. **1424.** 8, 14 ja 26. **1425.** Ülesanne on ebarealne, kümme meest ei saa üheaegselt kaevata auku, mille läbimõõt on üks meeter. . **1426.** 20 km. **1427.** 9,6 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$. **1428.** $\frac{-bc+\sqrt{b^2c^2+4abc}}{2b}$. **1429.** $\sqrt{\frac{p^2}{4}+\frac{np}{t}}-\frac{p}{2}$. **1432.** **a)** -1; **c)** iga arv lõigust $1 \leq x \leq 2$; **d)** -1 ja 0. **1434. a)** 8; **b)** 8; **d)** 1,5 ja 3; **g)** -2. **1440. a)** $x < \frac{26}{45}$; **c)** $x \geq 16\frac{4}{9}$. **1443. a)** $1 < x < 5$; **c)** $x < -2$ või $-2 < x < 1$ või $x > 4$; **e)** $-4 < x < 1$ või $x > 3$. **1444. a)** $x < 4/3$ või $x > 3$; **c)** $x < -1$ või $-1 < x < 1$ või $x > 3$; **e)** $-5 < x < -2$ või $-1,5 < x < 0$ või $2 < x < 3$. **1445. a)** $x < -2$ või $x > 2$; **c)** $x < -2$ või $x > -1$; **e)** $-1 \leq x \leq 2$. **1449. a)** $x < 3$; **b)** $-2 \leq x \leq 10$; **c)** mistahes reaalarv; **d)** $-2 < x < -1$ või $0 < x < 1$; **e)** $x < -1$ või $0 < x < 1$ või $x > 3$; **f)** $2 < x < 0$ või $1 < x < 3$. **1450.** $m > 7$. **1452.** 0,5 ja 2. **1453. a)** $0 < a < 28$; **b)** $a < -0,25$; **c)** $a > \frac{19}{24}$; **d)** $m > 2$; **e)** $t < 0,5$. **1454.** $n < 0$ või $n > 1$, $n \neq 2$. **1455.** $m > -2$ ja $m \neq 2$. **1456.** $-1 < x < 1$ või $2 < x < 4$. **1457.** 12 lehte. **1458.** Hinne „5" – 4 õpilast, hinne „4" – 10 õpilast, hinne „3" – 6 õpilast ja hinne „2" – 10 õpilast. **1463.** Ülesandes ei ole märgitud, mitmenda veerandi nurgaga on tegemist. Kui x on esimese veerandi nurk, siis **a)** $\cos x = 0,9887$ ja $\tan x = 1,5171$; **c)** $\sin x = 0,9999$ ja $\cos x = 0,0135$. **1466.** 12,9 ja 49,1. **1467.** Diagonaalid on 24,4 cm ja 36,6 cm, pindala 446,5 cm^2. **1476. a)** I veerand; **b)** andmed on vastuolulised; **c)** IV veerand; **d)** III veerand. **1477. a)** 3,5; **b)** $-0,25$; **c)** 2; **d)** 0,5. **1480.** Summa on positiivne, sest kõik liidetavad on positiivsed. **1481.** Nurgad $\frac{\alpha}{2}$, $\frac{\beta}{2}$ ja $\frac{\gamma}{2}$ on esimese veerandi nurgad, seega on mõlema avaldise väärtus positiivne. **1482. a)** $\cos^2\alpha$; **b)** 0; **c)** $\sin\alpha$; **d)** $2\cos\alpha$; **e)** $|\tan\alpha|$. **1485. a)** 0; **c)** $-0,5$. **1486. a)** 1; **c)** $\cot\alpha \cdot \tan\beta$. **1487. a)** $\sin 2\alpha = -0,96$, $\cos 2\alpha = -0,28$, $\tan 2\alpha = -3,429$; **d)** $\sin 2\alpha = 1$, $\cos 2\alpha = 0$, $\tan 2\alpha$ väärtus puudub. **1490.** 56,25. **1491. c)** $-0,5$; **d)** $-0,5$. **1492. a)** $\frac{50\pi}{3}$; **c)** $\frac{3\pi}{8}$; **e)** 9π. **1500. 1)** $a = 16,4$ $b = 32,2$ $\alpha = 25°$ $S = 136$;

3) sellist kolmnurka pole olemas; **5)** $a = 764$ $\alpha = 86°$ $\beta = 38°50'$; **7)** sellist kolmnurka pole olemas; **10)** $c = 125$ $\alpha = 30°30'$ $\beta = 120°50'$; **13)** $c = 32,3$ $\alpha = 38°50'$ $\beta = 19°20'$; **15)** sellist kolmnurka pole olemas; **17)** $\alpha = 50°47'$ $\beta = 42°40'$ $\gamma = 86°33'$. **1505. a)** 4; **b)** 11; **c)** $\sqrt{(c-a)^2+(d-b)^2}$. **1506.** Punkt B. **1507.** Ei ole. **1510.** Ei leidu. **1513.** Ei ole. Vektorid $\vec{a} = (5; 3)$ ja $\vec{a} = (3; 5)$ on erinevad vektorid. **1514. b)** 0,8; **c)** -1; **e)** -1; **f)** -1; **h)** $-1/3$; **i)** $-0,5$. **1515. b)** $A(4; -2)$; **d)** $A(-2; -3)$. **1516. b)** $A(-4; 2)$; **d)** $(-4; -5)$. **1517. a)** $0,5(\vec{a}+\vec{b})$; **c)** $0,5(\vec{a}+\vec{b})$; **e)** $\vec{a}$. **1522. a)** $\vec{m} = (-8; 17)$; **c)** $\vec{m} = (7; 4)$; **e)** $\vec{m} = (2\frac{1}{3}; -1\frac{2}{3})$. **1525. a)** $-0,6$; **b)** 0; **c)** $-0,5$; **d)** $6a$. **1526.** $T(-3; 6)$. **1528.** $(2; -1)$ ja $(3; 1)$. **1531. a)** 0; **b)** 0; **c)** 15; **d)** 0. **1532. a)** 0°; **b)** ≈ 137,8°; **c)** 90°; **d)** ≈ 85°. **1533. a)** $-3,75$; **b)** sellist x väärtust ei leidu. **1534. a)** 45°; **c)** ≈ 26,6°; **e)** ≈ 130,6°. **1535.** Ei. **1537.** Romb. **1538. a)** $y = 5$; **c)** $y = -2x - 2$; **e)** $y = x$. **1539. a)** kui $k = 1$, siis $y = x - 5$; kui $k = 2$, siis $y = 2x - 9$; kui $k = 3$, siis $y = 3x - 13$; kui $k = 0$, siis $y = -1$; kui $k = -1$, siis $y = -x + 3$; kui $k = -2$, siis $y = -2x + 7$. **1540. a)** $y = \sqrt{3}x - 2\sqrt{3} - 1$; **b)** $y = x + 4$; **c)** $x = 3$; **d)** $y = 3$; **e)** $y = -\sqrt{3}x + 3\sqrt{3} + 4$; **f)** $y = -x$. **1544. a)** $y = 0,4x + 3,8$; **c)** $y = -x$; **e)** $y = -x + 3$. **1545.** $\vec{s} = (-B; A)$. **1546. a)** $k = -2$ ja $b = 8$; **b)** $k = 3$ ja $b = 6$; **c)** $k = -\frac{1}{3}$ ja $b = 0$; **d)** $k = -\frac{1}{3}$ ja $b = -\frac{5}{3}$; **e)** $k = -\frac{2}{3}$ ja $b = 0$; **f)** $k = 6\frac{2}{3}$ ja $b = -20$. **1548.** Külgede võrrandid on $y = 0$, $x = 0$, $x = 4$, $y = 4$. Diagonaalide võrrandid on $y = x$ ja $y = -x + 4$. **1549.** Üks võimalus: $x = 0$, $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$ ja $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + 8$. **1551.** 5 ühikut. **1552.** $y = x - 2$. **1553. a)** ≈ 18,4°; **c)** ≈ 11,3°. **1555.** $y = -2x + 10$. **1556.** $y = 0,5x + 2$. **1558.** Langev kiir $y = -\frac{1}{3}x + 5\frac{1}{3}$, peegeldunud kiir $y = -3x + 16$. **1560. a)** küljed on $4\sqrt{2}$, $2\sqrt{13}$ ja $2\sqrt{17}$, nurgad on 59°, 42° ja 79° ja pindala 20. **1563.** Ringjooned on c, d, e ja g. **1567.** $(x-3)^2 + (y+1)^2 = 50$. **1568.** Punktis (3; 3) sirge puudutab ringjoont. **1570. a)** $a = 5$, $b = 4$, $F(\pm 3; 0)$, $e = 0.6$. **1571.** $2a = 6$, $2b = 4$. **1574. a)** $a = 3$, $b = 5$, $F(\pm\sqrt{34}; 0)$. **1576.** $(\pm 6\frac{2}{3}; \pm 6\frac{2}{3})$ ja $(\pm 6\frac{2}{3}; \mp 6\frac{2}{3})$, pindala on $177\frac{7}{9}$. **1578. a)** haripunkt $(1; -2)$, fookus $(1; -\frac{7}{4})$. **1581.** $\frac{4}{x(x+4)}$. Kasuta asjaolu, et $\frac{1}{x(x+1)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$ jne. **1582.** $b(a^3 - b^3)$. **1585.** $a+b+c$. **1586.** $\frac{a+b}{a-b}$. **1587.** $abx^2 - (a^2+b^2)x + ab = 0$. **1588.** -1. **1589.** 1; 2 ja 10. **1591.** 27. **1592.** (12; 9) ja (10; 1). **1593.** Ei leidu. **1594.** (4; 7), (4; –7), (3; 5), (3; –5), (0; 2) ja (0; –2). **1595.** $x = 2$, $y = 1$, $z = 3$, $u = -1$, $v = -2$. Liidame kõik viis võrrandit, siis saame, et $x+y+z+u+v = 3$. Lahutame sellest võrrandist järgemööda kõik süsteemi võrrandid. **1596. a)** $(-1; 2)$ ja $(2; -1)$; **b)** $(1; 2)$ ja $(2; 1)$; **c)** $(1; 0)$ ja $(0; 1)$. **1597. a)** $(14; -11)$ ja $(11; -14)$; **b)** $(\pm 4; \pm 3)$ ja $(\pm 3; \pm 4)$. **1598. a)** $(3; 3; 3)$; **b)** $(-1; -1; -1)$. **1601.** 100. **1605.** 3. koha saavutanu võitis. Need, kes jäid neljale viimasele kohale, mängisid omavahel 6 partiid ja said kokku vähemalt 6 punkti. Teise koha saavutanu ei saanud vähem kui 6 punkti. Kui turniiri võitja sai 7 punkti, siis teiseks jäänu kaotas talle ja sai täpselt 6 punkti. Kui esimesel on 6,5 punkti, siis teiseks jäänul peab olema 6 punkti. Viimased neli said kokku 6 punkti, järelikult neli esimest võitsid nelja viimast. **1607.** $21\frac{9}{11}$ min. **1608.** 12. **1609.** 20 ja 30. **1610.** Esimene traktor $K + \sqrt{K^2 - 2KT}$, teine traktor $K - \sqrt{K^2 - 2KT}$. Ülesandel on mõte vaid siis, kui $T < 0,5K$. **1611.** Esimesel kulub $0,25(5T - 2 + \sqrt{25T^2 + 4T + 4})$ tundi. **1612.** Segusid tuleb võtta vahekorras 1 : 7. **1614.** $[R - \frac{AP}{100} - \frac{BQ}{100}(1 - \frac{A}{100})] / [(1 - \frac{A}{100})(1 - \frac{B}{100})]$%. **1615.** 4 s ja 6 s. **1618.** $1 + \tan^2\alpha$, $\frac{4}{3}$. **1625. a)** lõikuvad; **b)** ei lõiku, **c)** ei lõiku. **1627.** 6. **1629. a)** $-\frac{9}{14}$; **c)** -3. **1633. a)** 1,5; **b)** 30. **1634.** 20. **1638.** $(x-3,5)^2 + (y-\sqrt{10})^2 = 12,25$.

Vastuseid ja juhtnööre vanadele ülesannetele:

5. Et aastapalk oli 12 rbl + kaftan, siis kuupalk 1 rbl + $\frac{1}{12}$ kaftani. 7 kuu eest pidi antama 7 rbl + $\frac{7}{12}$ kaftani, aga anti 5 rbl + kaftan. Seega $\frac{5}{12}$ kaftanist maksab 2 rubla. Seega kaftan maksab $2 : \frac{5}{12} = \frac{24}{5} = 4\frac{4}{5}$ rbl. Teine võimalus: teha võrrandiga:

$7 + \frac{7}{12}x = 5 + x$ jne.

6. Koostame võrrandisüsteemi $\begin{cases} x+100 = 2(y-100) \\ y+10 = 6(x+10) \end{cases}$

Siit $x = 40$ ja $y = 170$.

7. 5 mõõtu ja 7 mõõtu.

8. $7\frac{2}{17}$ ja $9\frac{14}{17}$ dinaari.

9. Tähistame ostetud kallimat liiki veini pangede arvu x-ga. Koostame võrrandi $\frac{150}{5}x + (50-x)\frac{140}{7} = 50(30-3)$. Siit $x = 35$.

10. 48 või 16.

11. Teeme joonise ja koostame joonise põhjal võrrandi:

$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 = x^2 + 2^2$. Siit $x = 3\frac{3}{4}$ jalga.

12. Tähistades $\frac{1}{x} = z$, saame $z^2 + 2z = \frac{5}{4}$. Siit $z_1 = \frac{1}{2}$ ja $z_2 = -\frac{5}{2}$. Seega $x_1 = 2$ ja $x_2 = -\frac{2}{5}$.

13. 8 ja 12.

14. 2 ja 8.

15. 45, $37\frac{1}{2}$ ja $22\frac{1}{2}$.

16. 6 ja 2.

17. 4, 3 ja 5.

18. Koostame võrrandististeemi

$\begin{cases} x = \frac{m}{n} \\ y = \frac{n}{m} \\ x \cdot y = S. \end{cases}$ Korrutades nende võrduste vastavad pooled, saame

$x^2 = \frac{m}{n} \cdot S \Rightarrow x = \sqrt{\frac{m}{n} \cdot S}$; $y = \frac{n}{m}\sqrt{\frac{m}{n} \cdot S}$.

19. Tähistades $\frac{x}{10-x} = y$, saame $y + \frac{1}{y} = 25$ jne.

20. $3\frac{9}{17}$, $7\frac{13}{17}$ ja $9\frac{3}{17}$ floriini.

21. Oletame, et teine talunaine tõi turule m korda rohkem mune kui esimene. Et nad teenisid ühepalju, siis müüs esimene mune m korda kallimalt. Kui nad oleksid enne müümist munad ära vahetanud, oleks esimene talunaine teeninud m^2 korda rohkem kui teine.

Siit $m^2 = \frac{15}{6\frac{2}{3}} = \frac{45}{20} = \frac{9}{4}$. Seega $m = \frac{3}{2}$.

Jagades 100 vahekorras 3 : 2, saame 60 muna ja 40 muna.

22. Saame võrrandi $2x^3 + 14\frac{1}{4} = 100$. Siit $x^3 = \frac{343}{8}$; $x = \frac{7}{2}$.

23. 20.

24. 2 tukatit ja 0,5 tukatit.

26. Alguses on kaupmehel x naela.
Jääb järele $x - 100$ naela.
Aasta pärast on $x - 100 + \frac{x-100}{3} = \frac{4x-400}{3}$
Jääb järele $\frac{4x-400}{3} - 100 = \frac{4x-700}{3}$
Kahe aasta pärast on $\frac{4x-700}{3} + \frac{4x-700}{9} = \frac{16x-2800}{9}$
Jääb järele $\frac{16x-2800}{9} - 100 = \frac{16x-3700}{9}$
Kolme aasta pärast on $\frac{16x-3700}{9} + \frac{16x-3700}{27} = \frac{64x-14\,800}{27}$.

Saame võrrandi $\frac{64x-14\,800}{27} = 2x$. Siit $x = 1480$ naela.

27. 5 meest, 1 naine ja 6 last.

28. Oletame, et kõik pojad said a rubla.

Et vanem poeg sai 100 rbl + $\frac{1}{6}$ jäägist, siis on päranduse kogu suurus

$100 + 6(a - 100) = 6a - 500$ rbl.

Teine vend sai 200 rbl + $\frac{1}{6}$ jäägist, seega tema osa

$a = 200 + \frac{1}{6}(6a - 500 - a - 200) = \frac{5a+500}{6}$. Seega $a = \frac{5a+500}{6}$, kust $a = 500$ rubla ja kogu varandus on $6 \cdot 500 - 500 = 2500$ rbl. Et leida vendade arvu, jagame 2500 vendade osa suurusega, s.o. a-ga ja saame $2500 : 500 = 5$.

29. 8 osa tseiloni teed, 1 osa india teed ja 1 osa hiina teed.

30. 36 härga.

SISUNÄITAJA

absoluutne viga — 90
absoluutväärtus — 32
abstsiss — 269
abstsisstelg —268
arv π — 25
arvu ümardamine — 87
assotsiatiivsus — 14
aste — 55

determinandi element — 129
— kõrvaldiagonaal — 133
peadiagonaal — 133
rida — 133
veerg — 133
diskriminant — 114
distributiivsus — 14

ellips — 344

faktoriaal — 193

hulknurgareegel — 286
hüperbool — 351

irratsionaalarv — 25

juur — 64

kaheksandsüsteem — 51
kahendsüsteem — 44
kollineaarsed vektorid — 292
kolmandat järku determinant —133
kolmnurga lahendamine — 288
kommutatiivsus — 14
koonuselõiked — 358
koosinus — 199
koostamisteoreem — 254
kootangens — 199
kraad — 198
kraadimõõt — 213
kuueteistkümnendsüsteem — 51
kümnendsüsteem — 41

lahendite kadu — 109
ligikaudse arvu standardkuju — 98
lineaarne planeerimisülesanne — 374
lineaarvõrrandisüsteem — 117
lineaarvõrratus — 146
lähend — 89

murdvõrratus — 189
murruline astendaja — 75

naturaalarv — 13
negatiivne nurk — 209
nullvektor — 289
nurkade liigitamine — 208

ordinaat — 269
ordinaattelg —268

parabool — 340
paralleelsed sirged — 329
puhtperioodiline murd — 21
Pythagoras — 23

radiaan — 213
radiaanmõõt — 213
ratsionaalarv — 24
reaalarv — 27
ringjoon —335
ristuvad sirged — 329
— vektorid — 310
ruutvõrratus — 151

samaväärsed võrrandid — 109
— võrratused — 148
Sarruse reegel — 133
segaperioodiline murd — 21
siinus — 199
siinusteoreem — 249
sirge — 315
skalaarkorrutis — 307

taandamisvalemid — 227
tangens — 199
trigonomeetria — 197
— põhivalemid — 205
täisarv — 16

vastandvektor — 289
võrrand — 107
võrratus — 145

ühikvektor — 282

SISUKORD

Kallis lugeja 3
Ülesanded kordamiseks (A. Veelmaa) 5

I peatükk. REAALARVUD (A. Veelmaa)

1.1. Naturaalarvude hulk ja selle omadused 13
1.2. Täisarvude hulk ja selle omadused 16
1.3. Ratsionaalarvude hulk ja selle omadused 18
1.3.1. Ratsionaalarvud ja kümnendmurrud 21
1.4. Irratsionaalarvude hulk ja selle omadused 23
1.5 Reaalarvude hulk ja selle omadused 26
1.6. Reaalarvude piirkonnad 29
1.7. Reaalarvu absoluutväärtus 32
1.8. Küsimusi ja ülesandeid kordamiseks 34
1.9. Arvusüsteemid (T. Tõnso) 37
1.9.1 Ajaloolisi märkmeid. Positsioonilised ja mittepositsioonilised arvsüsteemid 37
1.9.2. Kümnendsüsteemist ja kahendsüsteemist 44
1.9.3 Kaheksandsüsteemist ja kuueteistkümnendsüsteemist 51

II peatükk. ASTME MÕISTE ÜLDISTAMINE (A. Veelmaa)

2.1. Naturaalarvulise astendajaga aste 55
2.2. Täisarvulise astendajaga aste 57
2.3. Arvu 10 astmed 60
2.4. Kordamisülesanded 61
2.5. Juure mõiste 64
2.6. Kuidas leida juure väärtust ilma arvutita? Kuidas teha seda arvutil? 66
2.7. Juure omadused. Tehted juurtega. 70
2.8. Ratsionaalarvulise astendajaga aste 75
2.9. Murru nimetaja vabastamine irratsionaalsusest 78
2.10 Irratsionaalavaldiste teisendamine 80
2.11 Küsimusi ja ülesandeid kordamiseks 83

III peatükk. LIGIKAUDNE ARVUTAMINE (A. Veelmaa)

3.1. Täpsed ja ligikaudsed arvud 85
3.2. Ümardamine ja ümardamisviga 86
3.3. Mis on mõõtmine 88
3.4. Absoluutne viga. Vea alam- ja ülemtõke 89

3.5. Suhteline ehk relatiivne viga 92
3.6. Arvu õiged numbrid. Tüvenumbrid. Standardkuju 95
3.6.1. Arvu õiged numbrid 95
3.6.2. Arvu tüvenumbrid 96
3.6.3. Arvu standardkuju 98
3.7. Ligikaudsete arvude liitmine ja lahutamine 99
3.8. Ligikaudsete arvude korrutamine ja jagamine 103
3.9. Küsimusi ja ülesandeid kordamiseks 105

IV peatükk. VÕRRANDID JA VÕRRANDISÜSTEEMID (A. Veelmaa)

4.1. Kordamine 107
4.1.1. Võrrand. Võrdus. Samasus 107
4.1.2. Võrrandite samaväärsus. Võrduste omadused 109
4.1.3. Lineaar- ja ruutvõrrandi lahendamine 111
4.1.4. Parameetrit sisaldavad võrrandid 116
4.1.5. Võrrandisüsteemide lahendamine 117
4.1.6. Võrrandite ja võrrandisüsteemide koostamine ja lahendamine 122
4.2. Determinandi mõiste. Kahereaalise determinandi kasutamine võrrandisüsteemide lahendamisel 127
4.3. Kolmerealine determinant. Determinandi omadused 133
4.4. Kolme tundmatuga lineaarvõrrandisüsteemid 136
4.5. Juurvõrrand 141
4.6. Arvvõrratused 145
4.7. Ühe muutujaga lineaarvõrratused 146
4.8. Ühe muutujaga ruutvõrratused 151
4.9. Intervallide meetod. Murdvõrratused 155
4.9.1. Intervallide meetod 155
4.9.2. Murdvõrratused 159
4.10. Absoluutväärtust sisaldavad võrrandid 164
4.11. Absoluutväärtust sisaldavad võrratused 168
4.12. Võrratusesüsteemide lahendamine 170
4.13. Küsimusi ja ülesandeid kordamiseks 174
4.14. Juurvõrratused 179
4.15. Mittelineaarsete võrrandisüsteemide lahendamine 182
4.16. Võrratuste tõestamine (T. Tõnso) 189

V peatükk. TRIGONOMEETRIA (T. Tõnso)

5.1. Kordamine 197
5.2. Nurga mõiste üldistamine. Nurkade liigitus 208
5.3. Nurga kraadi- ja radiaanmõõt 213
5.4. Ringjoone kaare pikkus ja sektori pindala 216
5.5. Mistahes nurga trigonomeetrilised funktsioonid 220

5.6. Seosed ühe ja sama nurga trigonomeetriliste funktsioonide vahel 224
5.7. Taandamisvalemid. Ülesandeid kordamiseks 227 233
5.8. Kahe nurga summa ja vahe trigonomeetrilised funktsioonid 235
5.9. Kahekordse nurga trigonomeetrilised funktsioonid 240
5.10. Poolnurga trigonomeetrilised funktsioonid 243
5.11. Kolmnurga pindala kahe külje ja nendevahelise nurga järgi 246
2.12. Siinusteoreem 249
5.13. Koosinusteoreem 254
5.14. Kolmnurkade lahendamisest 258
5.15. Kolmnurga pindala valemid 260
Kordamisülesandeid 265

VI peatükk. VEKTOR TASANDIL. JOONE VÕRRAND (T. Tõnso)

6.1. Punkti koordinaadid tasandil 267
6.2. Kahe punkti vaheline kaugus 272
6.3. Polaarkoordinaadid 274
6.4. Vektor. Tehted vektoritega 277
6.4.1. Vektori mõiste 277
6.4.2. Vektorite tähistamisest. Vektorite võrdsus 278
6.4.3. Vektorite liigitus 279
6.4.4. Vektori koordinaadid. Vektori pikkus 281
6.4.5. Vektorite liitmine 284
6.4.6. Nullvektor. Vastandvektor. Vektorite vahe 289
6.4.7. Vektori korrutamine arvuga 291
6.5. Lõigu keskpunkti koordinaadid 295
6.6. Lõigu jaotamine antud suhtes 297
6.7. Vektori projektsioonid koordinaattelgedel. Vektori komponendid 299
6.8. Vektori polaarkoordinaadid 303
6.9. Vektorite skalaarkorrutis 307
6.10. Vektorite skalaarkorrutise arvutamine vektorite koordinaatide abil. Nurk kahe vektori vahel 309
Ülesandeid kordamiseks 312
6.11. Sirgjoone tõusumurk ja sirge tõus 315
6.12. Punkti ja tõusuga määratud sirge võrrand. Tõusu ja algordinaadiga määratud sirge vorrand 317
6.13. Kahe punktiga määratud sirge võrrand 320
6.14. Punkti ja sihivektoriga määratud sirge võrrand 325
6.15 Sirge üldvõrrand 326
6.16. Nurk kahe sirge vahel 328
6.17. Kahe sirge lõikepunkt 331
6.18. Kuidas lahendada kolmnurka, mille tipud on antud koordinaatidega? 333
6.19. Ringjoone võrrand 335

6.20. Parabool. Parabooli kanooniline võrrand 340
6.21. Ellips. Ellipsi kanooniline võrrand 344
6.22. Hüperbool. Hüperbooli kanooniline võrrand 351
6.23. Koonuselõiked 358
6.24. Tõestusülesanded koordinaatide meetodi abil 361
6.25. Kahe joone lõikepunkt 367
Ülesandeid kordamiseks 370
6.26. Graafiline lineaarplaneerimine 374
6.26.1. Sissejuhatus 374
6.26.2. Kahe muutujaga lineaarvõrratus. Selle graafiline lahendamine 376
6.26.3. Kahe muutujaga võrratusesüsteemi graafiline lahendamine 378
6.26.4. Graafiline lineaarplaneerimine 380

VII peatükk. KÜSIMUSI JA ÜLESANDEID 10.KLASSI KURSUSE KORDAMISEKS (A. Veelmaa) 394

VIII peatükk. KEERUKAMAID ÜLESANDEID (A. Veelmaa) 415

IX peatükk. LÜHIKE JUHEND TÖÖKS BASIC'US (T. Tõnso) 423

X peatükk. LÜHILEKSIKON 450

PEA MEELES (A. Veelmaa) 458

ÜLESANNETE VASTUSED 463

SISUNÄITAJA 476

Andrea Froloo 2002/2003 10A
Ilona Tšmilova 2004/05 10A
Kristjan Randsepp 05/06 10A :D Mina
Karl Lindmaa 08/09 10A

LL. 805 mi/307